Can. J. Math., Vol. XXXII, No. 3, 1980, pp. 531–558

PROPRIÉTÉS PRESQUE SÛRES ET QUASI-SÛRES DES SÉRIES DE DIRICHLET ET DES PRODUITS D'EULER

HERVÉ QUEFFÉLEC

Il y a en mathématiques plusieurs théorèmes d'existence: ceux liés à la notion de point fixe (théorème des fonctions implicites, solution locale des équations différentielles $y' = f(x, y)$) ou ceux liés à la notion de cardinalité (théorèmes de Chevalley et Warning, de Sylow, existence de nombres réels transcendants) par exemple. Nous nous interessons ici exclusivement à deux sortes de théorèmes d'existence: ceux liés au théorème de Baire (méthodes quasi-sûres) et ceux liés à la théorie des probabilités (méthodes presque sûres). Ces deux méthodes ont déjà donné lieu à de nombreux théorémes: existence de fonctions continues partout sans dérivée, existence de fonctions C^∞ partout non analytiques, existence d'ensembles de Kronecker parfaits (Kaufman) par le quasi-sûr, existence de réels t tels que (t^n) soit équirépartie modulo 1 (Koksma), existence de nombres normaux au sens de Borel, existence d'ensembles de non-synthèse par le presque sûr, etc . . .

On se propose d'appliquer ces méthodes dans la théorie des séries de Dirichlet

$$\text{(i)} \quad \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s}$$

et des produits d'Euler

$$\text{(ii)} \quad \prod_p \frac{1}{1 + a_p p^{-s}}$$

où p décrit l'ensemble des nombres premiers. Les séries (i) ont été étudiées en détail, par des méthodes sûres, par Harald Bohr, qui considère les abscisses suivantes (on pose comme d'habitude $s = \sigma + it$):

abscisse de convergence absolue

$$\sigma_a = \inf\left\{\sigma_0 \Big/ \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{n^\sigma} \text{ converge pour } \sigma > \sigma_0\right\};$$

abscisse de convergence simple

$$\sigma_s = \inf\left\{\sigma_0 \Big/ \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \text{ converge pour } \sigma > \sigma_0\right\};$$

Reçu le 22 juin, 1978 et sons forme revisée, le 16 mai, 1979.

abscisse de convergence uniforme

$$\sigma_u = \inf \left\{ \sigma_0 \Big/ \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \text{ converge uniformément dans le demi-plan } \sigma > \sigma_0 \right\};$$

abscisse d'holomorphie

$$\sigma_h = \inf \left\{ \sigma_0 \Big/ \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} \text{ se prolonge en une fonction analytique } f(s) \text{ dans le demi-plan } \sigma > \sigma_0 \right\}.$$

On a évidemment:

$$\sigma_h \leqq \sigma_s \leqq \sigma_u \leqq \sigma_a.$$

Il considère aussi la "fonction de Lindelöf" associée à (i) et à son prolongement éventuel $f(s)$:

$$\mu(f, \sigma) = \mu(\sigma) = \inf \{\xi \geqq 0/f(\sigma + it) = 0(|t|^\xi) \text{ quand } |t| \to +\infty\}.$$

D'aprés la théorie des fonctions analytiques, μ est convexe décroissante positive sur $]\sigma_h, +\infty[$; Bohr a démontré qu'inversement toute fonction μ ayant ces propriétés et telle que $\mu' \leqq -1$ était la fonction de Lindelöf d'une série du type (i).

La démonstration de Bohr est extrèmement compliquée, et il aurait été souhaitable de retrouver son résultat par des méthodes presque sûres ou quasi-sûres malheureusement on n'y est pas parvenu, quoique l'on arrive à des séries de Dirichlet à coefficients ± 1, se prolongeant en des fonctions entières, et dont la fonction de Lindelöf est connue, étant exactement, dans un cas, celle conjecturée pour la série sûre

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

à savoir

$$\mu(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > \frac{1}{2} \text{ (conjecture de Lindelöf)} \\ \frac{1}{2} - \sigma & \text{si } \sigma \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ce travail a été inspiré par des conversations avec Monsieur Jean-Pierre Kahane, qui avait déjà étudié ces questions dans [**5**]; dans la première partie, on reprend avec son accord les résultats et les démonstrations de la note avec des prolongements divers; dans la deuxième partie, on étudie les propriétés presque sûres et quasi-sûres des produits $\pi(1 \pm p^{-s})^{-1}$ déduits de l'expression de ζ sous la forme $\pi(1 - p^{-s})^{-1}$, où π désigne le produit infini étendu à l'ensemble des nombres premiers. On

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

rencontre dans cette deuxième partie des propriètès de croissance assez différentes de celles de la première.

1. Soit $\Omega = \{-1, +1\}^N$, muni de la topologie produit de la topologie discrète sur chaque facteur et de la probabilité produit de la probabilité de pile ou face sur chaque facteur. On note $\omega = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, \ldots)$ un point de Ω; ses composantes $\epsilon_n(\omega)$ apparaissent comme des variables de Rademacher indépendantes sur Ω. Ω est un espace de probabilité: une propriété qui a lieu sur un ensemble de probabilité 1 est dite *presque sûre* (en abrégé ps).

Ω est un espace topologique compact, donc de Baire: une propriété qui a lieu sur une intersection dénombrable d'ouverts denses est dite *quasi-sûre* (en abrégé qs). On s'intéresse aux propriétés ps et qs des séries de Dirichlet:

$$(1) \quad \sum_1^\infty \frac{\epsilon_n}{n^s} = f(s).$$

$$(2) \quad \sum_1^\infty \epsilon_n\left(\frac{1}{(2n+1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right) = g(s).$$

THÉORÈME 1. 1) *Les séries* (1) *ont les propriétés* qs *suivantes:* $\sigma_s = \sigma_u = \sigma_h = 1$, *la droite* $\sigma = 1$ *est une coupure pour* f.

2) *Les séries* (1) *ont les propriétés* ps *suivantes:* $\sigma_u = 1$, $\sigma_s = \sigma_h = \frac{1}{2}$, *la droite* $\sigma = \frac{1}{2}$ *est une coup une pour* f, $\mu(\sigma) = 0$ *si* $\sigma > \frac{1}{2}$ *et plus précisément*

$$f(\sigma + it) = 0(\log |t|)^{1-\sigma} \text{ quand } |t| \to +\infty, \text{ pour } 1 > \sigma > \tfrac{1}{2}.$$

Preuve. 1) Il suffit de montrer que $\sigma = 1$ est qs une coupure pour f, mais cela va résulter du théorème plus général suivant:

THÉOREMÈ 1'. *Soit* $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ *une série de Dirichlet à coefficients réels, d'abcisse de convergence simple* $\sigma_s = \alpha > -\infty$; *alors la série* $\sum_1^\infty \epsilon_n a_n e^{-\lambda_n s}$ *admet* qs *la droite* $\mathscr{R}s = \alpha$ *comme coupure.*

Preuve. Soit α_n' une suite de ± 1 telle que $\alpha_n' a_n = |a_n|$, et soit $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \ldots) \in \Omega$; la multiplication par α' est un homéomorphisme de Ω et $(\epsilon_n \alpha_n') a_n = \epsilon_n |a_n|$, donc on peut se limiter à $a_n \geqq 0$. D'autre part, l'ensemble E des ω pour lesquels $\mathscr{R}s = \alpha$ n'est pas une coupure, peut s'écrire:

$$E = \cup E_{a,r,N}$$

avec: $a = \alpha + it$, $t \in Q$, $r \in Q^+$, N entier $\geqq 1$ et:

$E_{a,r,N} = \{\omega | \sum_1^\infty \epsilon_n(\omega) a_n e^{-\lambda_n s} = f_\omega(s)$ possède une prolongement analytique, toujours noté f_ω, dans le disque $D_{a,r} = \{s : | s - a | < r\}$ et $|f_\omega| \leqq N$ sur $D_{a,r}\}$

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

Chaque $E_{a,r,N}$ est fermé: en effet, si $\omega \in \overline{E_{a,r,N}}$, il existe une suite $\omega^i \in E_{a,r,N}$, $\omega^i \to \omega$; si $f_i(s) = f_{\omega^i}(s)$, $|f_i| \leqq N$ sur $D_{a,r}$, donc les f_i forment une famille normale sur $D_{a,r}$, et quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer $f_i \to g$ uniformément sur tout compact de $D_{a,r}$, avec g holomorphe et $|g| \leqq N$ sur $D_{a,r}$. Or $\omega^i \to a \Leftrightarrow \epsilon_n{}^i \to \epsilon_n$, $\forall\, n$; mais, puisque $a_n \geqq 0$, pour $\mathscr{R}s > \alpha$, on a:

$$\sum_1^\infty \epsilon_n{}^i a_n e^{-\lambda_n s} \to \sum_1^\infty \epsilon_n a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Donc, $g = f_\omega$ sur $D_{a,r} \cap \mathscr{R}s > \alpha$, et g définit donc un prolongement de module $\leqq N$ de f_ω dans D_{ar}, donc $\omega \in E_{a,r,N}$.

Chaque $E_{a,r,N}$ est d'intérieur vide: en effet, soit $\omega \in E_{a,r,N}$ et V_M le voisinage de ω défini par:

$$V_M = \{\omega' = (\epsilon_n')/\epsilon_n' = \epsilon_n \text{ si } n \leqq M\},\ M \text{ entier} \geqq 1.$$

Si $V_M \subset E_{a,r,N}$, si $\omega'' = (\epsilon_n'') \in \Omega$, on peut écrire, pour $\mathscr{R}s > \alpha$:

$$f_{\omega''}(s) = \left[\sum_{n=1}^{M} \epsilon_n a_n e^{-\lambda_n s} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \epsilon_n'' a_n e^{-\lambda_n s}\right] + \sum_{n=1}^{M} (\epsilon_n'' - \epsilon_n) a_n e^{-\lambda_n t}$$
$$= f_{\omega'}(s) + g(s)$$

où $\omega' \in V_M$ et où g est une fonction entière.

On voit donc que $f_{\omega''}$ admet un prolongement analytique à D_{ar}, pour tout $\omega'' \in \Omega$; soit $\epsilon > 0$ assez petit pour que, si $|u - t| \leqq \epsilon$, le disque de centre $\alpha + \epsilon + iu$, de rayon 2ϵ soit inclus dans D_{ar} (avec $a = \alpha + it$). Pour $t - \epsilon \leqq u \leqq t + \epsilon$, prenons $\epsilon_n'' = \text{sign } \cos \lambda_n u$; posons $b = \alpha + \epsilon + iu$, $c = \alpha - \epsilon + iu$, $f = f_{\omega''}$.

Nous avons:

$$f(c) = \sum_0^\infty \frac{(c-b)^m}{m!} f^{(m)}(b) = \sum_0^\infty \frac{(c-b)^m}{m!} \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n'' a_n (-1)^m (\lambda_n)^m e^{-\lambda_n b}.$$

D'où:

$$\mathscr{R}f(c) = \sum_0^\infty \frac{(2\epsilon)^m}{m!} \sum_1^\infty a_n (\lambda_n)^m e^{-\lambda_n(\alpha+\epsilon)} |\cos \lambda_n u|.$$

Tous les termes étant positifs, nous pouvons intervertir l'ordre des sommations:

$$\mathscr{R}f(c) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n(\alpha+\epsilon)} |\cos \lambda_n u| \sum_{m=0}^\infty \frac{(2\epsilon)^m}{m!} (\lambda_n)^m,$$

soit:

$$\mathscr{R}f(c) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n(\alpha-\epsilon)} |\cos \lambda_n u| < \infty.$$

Comme ceci a lieu pour $|u - t| \leqq \epsilon$, on en déduit, suivant un lemme classique [6]: $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n(\alpha-\epsilon)} < \infty$, ce qui contredit la définition de α. Donc $V_M \not\subset E_{a,r,N}$; comme les V_M forment une base de voisinages de ω, on en déduit: $E^0_{a,r,N} = \emptyset$; ceci achéve la démonstration du théorème 1′.

2) Montrons d'abord que $\sigma_u = 1$; suivant une formule de Bohr [2], si

$$U_n = \operatorname{Sup}_{t\in R}|\epsilon_1 e^{it\log 1} + \ldots + \epsilon_n e^{it\log n}|$$

alors

$$\sigma_u = \overline{\lim}_{n\to\infty} \log U_n/\log n.$$

D'aprés un autre résultat de Bohr [11], nous avons:

$$U_n \geqq \sum|\epsilon_p| \quad p \text{ premier, } p \leqq n$$
$$= \pi(n) \sim n/\log n$$

par le théorème des nombres premiers. Il est alors évident que $\sigma_u = 1$. Néanmoins on a, dans l'autre sens, l'inégalité suivante:

$$U_n = 0(n\sqrt{\log\log n/\log n}) \quad \text{ps quand } n \to +\infty.$$

Soient $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers $\leqq n$, avec $k = \pi(n) \sim n/\log n$. Si

$$f_n(t) = \epsilon_1 e^{it\log 1} + \ldots + \epsilon_n e^{it\log n},$$

on a aussi bien:

$$f_n(t) = \sum \rho_{\alpha_1\ldots\alpha_k} e^{it(\alpha_1\log p_1 + \ldots + \alpha_k \log p_k)}$$

la somme étant étendue aux nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$ et aux entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que $(p_1)^{\alpha_1} \ldots (p_k)^{\alpha_k} \leqq n$ et où $\rho_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \epsilon_m$ si $m = (p_1)^{\alpha_1} \ldots (p_k)^{\alpha_k}$.

D'aprés le théorème de Kronecker:

$$\operatorname*{Sup}_{t\in R} |f_n(t)| = \operatorname*{Sup}_{t_i\in[0,2\pi]} \left|\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_k} e^{i(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \ldots + t_k\alpha_k)} \rho_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right|.$$

Cette dernière somme est un polynôme trigonométrique de degré $d \leqq \log n/\log 2$, puisque

$$2^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k} \leqq (p_1)^{\alpha_1} \ldots (p_k)^{\alpha_k} \leqq n.$$

Par un lemme de [7]:

$$P\left(\sup_{t_i} \left|\sum_{\alpha_i} \rho_{\alpha_1\ldots\alpha_k} e^{i(t_1\alpha_1+\ldots+t_k\alpha_k)}\right| > C\sqrt{\log\,(d^k\chi n)}\right) \leqq \frac{1}{\chi}$$

où C est une constante; en faisant $\chi = n^2$ par exemple, on déduit facilement de l'inégalité précédente:

$$p\left(\sup_{t_1\ldots t_k} \left|\sum \rho_{\alpha_1\ldots\alpha_k} e^{i(t_1\alpha_1+\ldots+t_k\alpha_k)}\right| > C'n\sqrt{\frac{\log\log n}{\log n}}\right) \leqq \frac{1}{n^2}.$$

Le lemme de Borel-Cantelli entraîne alors l'estimation ps annoncée; il serait intéressant de connaître l'ordre de grandeur ps exact de U_n quand $n \to \infty$.

Avant de continuer la preuve du théoréme 1.2, rappelons quelques résultats classiques de probabilités.

THÉORÈME DES TROIS SÉRIES [**10**]. *Soit u_n une suite de nombres complexes, alors: $\sum_1^\infty \epsilon_n u_n$ converge* ps $\Leftrightarrow \sum_1^\infty |u_n|^2 < \infty$.

THÉORÈME. ([**7**]) *Soit $\sum_1^\infty X_n(\omega)e^{-\lambda_n s}$ une série de Dirichlet à coefficients indépendants et symétriques (X_n et $-X_n$ équidistribuées), alors l'abcisse de convergence simple $\sigma_s(\omega)$ est* ps *une constante et, si $\sigma_s > -\infty$, la droite $\sigma = \sigma_s$ est* ps *une coupure.*

LEMME. (S. Bernstein [**10**]) *Soient $a_1, \ldots, a_N \in C$, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ des Rademacher indépendantes, $Y = \sum_1^N \epsilon_n a_n$, $A = \sum_1^N |a_n|^2$ et χ un réel $\geqq 4$. Alors:*

$$P(|Y| > 2\sqrt{A \log \chi}) \leqq 4/\chi.$$

Le lemme de S. Bernstein a pour conséquence le lemme suivant, qui est la clé des estimations ps à venir.

LEMME 1. *Soit j un entier $\geqq 0$, n_j et m_j deux entiers avec $0 \leqq n_j < m_j$, α un entier $\geqq 1$, b et B deux réels avec $0 \leqq b \leqq B$, $B \geqq 1$, et* $\sup (b, n_j) \geqq 1$, *T un réel $\geqq 1$, σ un réel $> \frac{1}{2}$ et*

$$f_j(t, \beta) = \sum_{n_j < n \leqq m_j} \epsilon_n (\alpha n + \beta)^{-\sigma - it} = f_j \quad \text{avec } 0 \leqq t \leqq T, b \leqq \beta \leqq B.$$

Soit

$$\|f_j\| = \operatorname{Sup}\{|f_j(t, \beta)|, t \in [0, T], \beta \in [b, B]\}.$$

Alors, si ν est un paramètre $\geqq 1$, on a:

$$P\left(\|f_j\| > \frac{C_\sigma \log(\alpha + B)}{(\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}} \log(T m_j \nu B \alpha) \right) \leqq \frac{1}{\nu}$$

où C_σ est une constante qui ne dépend que de σ.

La pleine généralité de ce lemme ne sera nécessaire que pour la démonstration du Théorème 4.

Soient $t_k = kT/N_1$, $0 \leqq k \leqq N_1$ et $B_1 = b + l(B - b)/N_2$, $0 \leqq l \leqq N_2$, où N_1 et N_2 sont des entiers à ajuster par la suite, où k et l sont entiers. Dans les calculs, C_σ désignera une constante qui ne dépend que de σ, mais qui peut varier de ligne en ligne; nous avons:

$$\|f_j\| \leqq \sup_{k,l} |f_j(t_k, B_1)| + \frac{T}{N_1} \left\| \frac{\partial f_j}{\partial t} \right\| + \frac{B}{N_2} \left\| \frac{\partial f_j}{\partial B} \right\|.$$

Un estimation grossière de $\|\partial f_j / \partial t\|$ et $\|\partial f_j / \partial B\|$ suffira.

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

Nous avons:

$$(3)\qquad \left\| \frac{\partial f_j}{\partial t} \right\| \leqq \sum_{n_j < n \leqq m_j} \frac{\log (\alpha n + B)}{(\alpha n + b)^{\sigma}} \leqq m_j \log (\alpha m_j + B)$$
$$\leqq (m_j)^2 \log (\alpha + B).$$

$$(4)\qquad \left\| \frac{\partial f_j}{\partial t} \right\| \leqq C_\sigma T m_j.$$

D'autre part, si

$$f_j(t_k, B_1) = \sum_{n_j < n \leqq m_j} \frac{\epsilon_n}{(\alpha n + B_1)^{\sigma + i t_k}} = \sum \epsilon_n a_n$$

$$\sum |a_n|^2 \leqq \sum_{n_j < n \leqq m_j} \frac{1}{(\alpha n + b)^{2\sigma}} \leqq \int_{n_j}^{\infty} \frac{dt}{(\alpha t + b)^{2\sigma}} \leqq C_\sigma \frac{1}{(\alpha n_j + b)^{2\sigma - 1}},$$

puisque $\alpha \geqq 1$. Par le lemme de S. Bernstein:

$$P\left(|f_j(t_k, B_1)| > \frac{C_\sigma}{(\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}} \sqrt{\log \chi} \right) \leqq \frac{4}{\chi}.$$

Donc,

$$(5)\qquad P\left(\sup_{k,l} |f_j(t_k, B_1)| > \frac{C_\sigma}{(\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}} \sqrt{\log \chi} \right)$$
$$\leqq \frac{4}{\chi} (N_1 + 1)(N_2 + 1) \leqq \frac{16}{\chi} N_1 N_2.$$

(3), (4) et (5) donnent:

$$P\left(||f_j|| > C_\sigma \log (\alpha + B) \times \left(\frac{\sqrt{\log \chi}}{(\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}} + \frac{T}{N_1} m_j^{\,2} + \frac{B}{N_2} T m_j \right) \right)$$
$$\leqq \frac{16 N_1 N_2}{\chi}.$$

Soit:

$$(6)\qquad P(E^c) \leqq 16 N_1 N_2 / \chi.$$

Si $\omega \in E$, nous avons:

$$||f_j|| \leqq \frac{C_\sigma \log (\alpha + B)}{(\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}} \left(\sqrt{\log \chi} + \frac{T}{N_1} (m_j)^2 (\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2} \right.$$
$$\left. + \frac{B}{N_2} T m_j (\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2} \right).$$

Prenons:

$$N_1 = [T(m_j)^2 (\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}] + 1 \leqq (T m_j B \alpha)^{C_\sigma}$$
$$N_2 = [B T m_j (\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}] + 1 \leqq (T m_j B \alpha)^{C_\sigma}$$
$$\chi = 16 (T m_j B \alpha)^{2 C_\sigma \nu} = 16 (T m_j B \alpha)^{C_\sigma \nu}.$$

Nous avons alors:

$$\omega \in E \Rightarrow ||f_j|| \leqq \frac{C_\sigma \log(\alpha + B)}{(\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}}[\sqrt{\log \chi} + 2]$$
$$\leqq \frac{C_\sigma \log(\alpha + B)}{(\alpha n_j + b)^{\sigma - 1/2}} \sqrt{\log \chi}.$$

En remplacant χ par sa valeur et en tenant compte de (6), on obtient le lemme 1.

Considérons alors les propriétés ps de la série (1).

$\sigma_s = \frac{1}{2}$ résulte du théorème des trois séries, et $\sigma_h = \frac{1}{2}$ du théorème de la coupure; reste à estimer $\mu(\sigma)$. Soit $1 > \sigma > \frac{1}{2}$ fixé, nous avons:

$$f(\sigma + it) = \sum_1^\infty \frac{\epsilon_n}{n^{\sigma+it}} = \epsilon_1 + \sum_{j=0}^\infty f_j(\sigma + it),$$

avec:

$$f_j(\sigma + it) = \sum_{2^j < n \leqq 2^{j+1}} \frac{\epsilon_n}{n^{\sigma+it}}.$$

Appliquons le lemme 1 à f_j, avec: $\alpha = 1$, $b = 0$, $B = 1$, $n_j = 2^j$, $m_j = 2^{j+1}$, $T = T_k$, $\nu = T_k n_j$, où T_k est une suite de valeurs de T telle que $\sum_k 1/T_k < \infty$, qu'on ajustera par la suite.

En posant:

$$||f_j||_{[0,T_k]} = \sup_{0 \leqq t \leqq T_k} |f_j(\sigma + it)| \leqq \sup_{\substack{0 \leqq t \leqq T_k \\ 0 \leqq B \leqq 1}} \left| \sum_{2^j < n \leqq 2^{j+1}} \frac{\epsilon_n}{(n + B)^{\sigma+it}} \right|,$$

nous obtenons:

$$P\left(||f_j||_{[0,T_k]} \geqq \frac{C_\sigma}{[n_j]^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log T_k n_j}\right) \leqq \frac{1}{T_k n_j}, \text{ soit: } P(A_{jk}) \leqq \frac{1}{T_k n_j}.$$

$\sum_{j,k} P(A_{jk}) < \infty$, donc, par le lemme de Borel-Cantelli, il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$, tel que, si $\omega \in \Omega_0$, il existe $j_0(\omega) = j_0$ et $k_0(\omega) = k_0$, tels que: $j \geqq j_0$ et $k \geqq k_0 \Rightarrow \omega \in (A_{jk})^c$.

Soit $t > \sup(T_{j_0}(\omega), T_{k_0}(\omega))$, et soit k l'unique indice tel que: $T_{k-1} \leqq t < T_k$, $k \geqq k_0$, $k \geqq j_0$ d'aprés le choix de t. Supposant $\sigma < 1$, écrivons:

$$f(\sigma + it) = \left(\epsilon_1 + \sum_{j<k} f_j\right) + \left(\sum_{j \geqq k} f_j\right) = S_1 + S_2.$$

$$(7) \qquad |S_1| \leqq \sum_1^{n_k} \frac{1}{t^\sigma} \leqq \int_0^{n_k} \frac{dt}{t^\sigma} \leqq C_\sigma [n_k]^{1-\sigma}.$$

Dans S_2, on a $k \geqq k_0$ et $j \geqq k \geqq j_0$; donc, on peut majorer $|f_j(\sigma + it)|$ par $C_\sigma \sqrt{\log T_k n_j}/[n_j]^{\sigma-1/2}$, ce qui donne:

$$|S_2| \leqq \sum_{j \geqq k} \frac{C_\sigma}{[n_j]^{\sigma-1/2}} \sqrt{\log T_k n_j} \leqq \sum_{j \geqq k} \frac{C_\sigma}{[n_j]^{\sigma-1/2}} (\sqrt{\log T_k} + j)$$

Soit, en posant $q = 2^{-(\sigma-1/2)} < 1$:

(8) $$|S_2| \leqq C_\sigma\left(\sum_{j \geqq k} q^j\sqrt{\log T_k} + jq^j\right) \leqq C_\sigma(q^k\sqrt{\log T_k} + kq^k).$$

(Comme dans la preuve du lemme 1, C_σ désigne une constante qui ne dépend que de σ, mais qui peut varier d'inégalité en inégalité).

Remarquons que $q^k = [n_k]^{1/2-\sigma}$ et choisissons $T_k = \exp n_k = \exp 2^k$; $k \leqq \sqrt{\log T_k}$, donc (8) donne:

(9) $$|S_2| \leqq C_\sigma(\log T_k)^{1-\sigma} \leqq C_\sigma(\log t)^{1-\sigma}$$

puisque $T_k = T_{k-1}{}^2 \leqq t^2$. Avec le choix de T_k, (7) se réécrit:

(10) $$|S_1| \leqq C_\sigma(\log T_k)^{1-\sigma} \leqq C_\sigma(\log t)^{1-\sigma}.$$

(9) et (10) entraînent: si $\omega \in \Omega_0$, si $t > \sup\,(T_{j_0}(\omega), T_{k_0}(\omega))$, alors:

$$|f(\sigma + it)| \leqq C_\sigma(\log t)^{1-\sigma}.$$

Il reste à remarquer que $f(\sigma - it) = \overline{f(\sigma + it)}$, et à faire varier σ sur un dénombrable dense de $]\frac{1}{2}, +\infty[$, en utilisant le principe de Phragmen-Lindelöf [**13**; p. 284] pour avoir le Théorème 1.

THÉORÈME 2. 1) *Les séries* (2) *ont les propriétés* qs *suivantes:* $\sigma_s = \sigma_h = 0$, *la droite* $\sigma = 0$ *est une coupure pour* g, $\mu(\sigma) = 1 - \sigma$ *si* $0 < \sigma \leqq 1$.

2) *Les séries* (2) *ont les propriétés* ps *suivantes:* $\sigma_s = 0$, $\sigma_h = -\frac{1}{2}$, *la droite* $\sigma = -\frac{1}{2}$ *est une coupure pour* g *et*

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma \geqq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \sigma \text{ si } -\frac{1}{2} < \sigma \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Preuve. 1) Soit $u_n(s) = (2n + 1)^{-s} - (2n)^{-s}$; nous avons:

$$u_n(s) = -s(2n)^{-s-1} + s(s+1)\int_0^1 (1-t)(2n+t)^{-s-2}dt$$

soit: $u_n(s) = -s(2n)^{-s-1} + s(s+1)v_n(s)$ avec: $|v_n| \leqq n^{-\sigma-2}$. Donc:

(10′) $$\sum_1^\infty \epsilon_n u_n(s) = -\frac{s}{2^{s+1}}f(s+1) + s(s+1)\sum_1^\infty \epsilon_n v_n(s).$$

Le fait que $\sigma_s = \sigma_h = 0$ et que la droite $\sigma = 0$ soit qs une coupure pour g résulte alors du Théorème 1.1. L'estimation de $\mu(\sigma)$ découlera du Lemme 2, mais il nous faut d'abord introduire, pour une fonction φ C^∞ sur $[1, \infty[$, ses différences successives. Soit n un entier $\geqq 1$, et posons:

$$\Delta_0\varphi(n) = \varphi(n)$$

$$\Delta_1\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n) = \int_0^1 \varphi'(n + x_1)dx_1$$

$$\Delta_2\varphi(n) = \Delta_1\varphi(n+2) - \Delta_1\varphi(n) = \varphi(n+3) - \varphi(n+2) - \varphi(n+1) + \varphi(n) = \int\int \varphi''(n + x_1 + x_2)dx_1dx_2$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

où l'intégrale est étendue au domaine $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 2$. Et, de façon générale, si $p \geqq 1$:

$$(11)\quad \Delta_p\varphi(n) = \Delta_{p-1}\varphi(n+2^{p-1}) - \Delta_{p-1}\varphi(n) = \int\ldots\int_{(P)} \varphi^{(p)}(n+x_1+\ldots+x_p)dx_1\ldots dx_p.$$

où

$$\int\ldots\int_{(P)}$$

désigne l'intégrale dans $\mathbf{R}^p$ étendue au domaine

$$0 \leqq x_1 \leqq 1, 0 \leqq x_2 \leqq 2, \ldots, 0 \leqq x_p \leqq 2^{p-1}.$$

On voit que: $\Delta_p\varphi(n) = \sum_{n \leqq m \leqq n+2^p-1} \pm \varphi(m)$.

Le cas qui nous intéresse est $\varphi(x) = x^{-s}$; (11) donne alors:

$$(12)\quad \Delta_p\varphi(n) = (-1)^p \int\ldots\int_{(P)} \frac{s(s+1)\ldots(s+p-1)}{(n+x_1+\ldots+x_p)^{s+p}}dx_1\ldots dx_p.$$

LEMME 2. *Soit* $\varphi(x) = x^{-s}$, $s = \sigma + it$, p *et* n *des entiers* $\geqq 1$; *alors:*

a) $|\Delta_p\varphi(n)| \leqq \dfrac{|s(s+1)\ldots(s+p-1)|}{n^{\sigma+p}}2^{p(p-1)/2}$

b) *Si, de plus* $0 \leqq t(2^p-1)/n \leqq 1$, *alors:*

$$|\Delta_p\varphi(n)| \geqq c\frac{|s(s+1)\ldots(s+p-1)|}{(n+2^p)^{\sigma+p}}2^{p(p-1)/2} \quad \textit{avec } c = \cos\tfrac{1}{2}.$$

(a) découle immédiatement de (12); d'autre part:

$$(13)\quad \frac{(-1)^p\Delta_p\varphi(n)}{s(s+1)\ldots(s+p-1)} = \int\ldots\int_{(P)}\frac{dx_1\ldots dx_p}{(n+x_1+\ldots+x_p)^{s+p}} = A_{np}.$$

L'argument θ de l'integrand est $-t\log(n+x_1+\ldots+x_p)$; il a donc une variation:

$$V = t\log(n+1+2+\ldots+2^{p-1}) - t\log n = t\log(n+2^p-1)/n.$$

Donc: $V \leqq t(2^p-1)/n \leqq 1$ sous les hypothéses du b). On peut donc trouver α tel que $-\frac{1}{2} \leqq \alpha+\theta \leqq \frac{1}{2}$, et on a:

$$|A_{np}| \geqq \mathscr{R}(e^{i\alpha}A_{np}) = \int\ldots\int_{(P)}\frac{\cos(\alpha+\theta)dx_1\ldots dx_p}{(n+x_1+\ldots+x_p)^{\sigma+p}}$$
$$\geqq \frac{c}{(n+2^p)^{\sigma+p}}\int\ldots\int_{(P)}dx_1\ldots dx_p = \frac{c}{(n+2^p)^{\sigma+p}}2^{p(p-1)/2}.$$

Le b) découle alors de (13).

Revenons à l'estimation qs de $\mu(g, \sigma)$; nous avons:

$$(14) \qquad g(s) = \sum_1^\infty \epsilon_n \Delta_1 f(2n)$$

et, d'après le Lemme 2 a): $|g(s)| \leqq |s| \sum_1^\infty 1/(2n)^{\sigma+1}$, d'où: $\mu(g, 0^+) \leqq 1$. D'autre part $\mu(1) = 0$.

D'auprès la convexité de μ, il suffit de prouver $\mu(\frac{1}{2}) \geqq \frac{1}{2}$ qs pour avoir le Théoréme 2.1.

Soit N un entier $\geqq 1$, et posons:

$$\Omega_N = \{\omega / |g_\omega(\tfrac{1}{2} + it)| \leqq c|t|^{1/2}/181, \forall t, |t| \geqq N\}, c = \cos \tfrac{1}{2}.$$

Ω_N est fermé dans Ω, par (14); soit $\omega \in \Omega_N$, et V_M le voisinage de ω défini par:

$$V_M = \{\omega' = (\epsilon_n')/\epsilon_n' = \epsilon_n, \text{ si } n \leqq N\}.$$

Fixons t tel que $|t| > \operatorname{Max}(N, M)$; si $|t| \leqq n \leqq 2|t|$, le Lemme 2 b) donne:

$$|u_n(\tfrac{1}{2} + it)| \geqq c|s|/(2n + 2)^{3/2} \geqq c|t|/15|t|^{3/2} = c|t|^{-1/2}/15.$$

Au moins $|t|/3$ des nombres $u_n\ (\frac{1}{2} + it)$ ont un argument qui appartient à un des trois arcs $[0, 2\pi/3]$, $[2\pi/3, 4\pi/3]$, $[4\pi/3, 2\pi]$; par exemple, il existe un ensemble J d'entiers de $[|t|, 2|t|]$, de cardinal $\geqq |t|/3$, tel que $n \in J, \Rightarrow u_n(\frac{1}{2} + it) = e^{i\theta}|u_n(\frac{1}{2} + it)|$ avec $0 \leqq \theta \leqq 2\pi/3$. Si $\alpha = 2\pi/3$, $n \in J$

$$(15) \qquad \mathscr{R}(e^{i\alpha}u_n(\tfrac{1}{2} + it)) = \cos(\alpha + \theta)|u_n(\tfrac{1}{2} + it)| \leqq -c|t|^{-1/2}/30.$$

Sur une partie convenable J_ω de J, de cardinal $\geqq |t|/6$, $\epsilon_n(\omega)$ est constant, par exemple $\epsilon_n = +1$; soit ω' la suite obtenue en changeant le signe de ϵ_n exactement sur J_ω. On a:

$$g_{\omega'}(\tfrac{1}{2} + it) - g_\omega(\tfrac{1}{2} + it) = -2\sum_{n \in J_\omega} u_n(\tfrac{1}{2} + it).$$

D'où, par (15):

$$|g_{\omega'}(\tfrac{1}{2} + it) - g_\omega(\tfrac{1}{2} + it)| \geqq 2|\mathscr{R}(e^{i\alpha}\sum_{n \in J_\omega} u_n(\tfrac{1}{2} + it)|,$$

soit:

$$|g_{\omega'}(\tfrac{1}{2} + it) - g_\omega(\tfrac{1}{2} + it)| \geqq 2\frac{t}{6}\frac{c}{30}t^{-1/2} = \frac{c}{90}t^{1/2}$$

ou encore:

$$|g_{\omega'}(\tfrac{1}{2} + it)| \geqq \left(\frac{c}{90} - \frac{c}{181}\right)t^{1/2} > \frac{c}{181}t^{1/2}$$

d'où $\omega' \notin \Omega_N$, bien que ω' appartienne à V_M; donc $\Omega_N = \emptyset$, et on a donc qs:

$$\overline{\lim} \frac{|g_\omega(\frac{1}{2} + it)|}{|t|^{1/2}} \geqq \frac{c}{181},$$

c'est-à-dire $\mu(g, \frac{1}{2}) \geqq \frac{1}{2}$qs.

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

2. Les assertions ps concernant les différentes abcisses découlent du Théorème 1 et de (10′); l'estimation ps de $\mu(\sigma)$ utilisera le lemme suivant:

LEMME 3. (Ingham, [**4**]) *Soit* $f(t) = \sum_{N \leqq n \leqq N'} a_n e^{-i\lambda_n t}$, $\lambda_n \in R$. *On suppose que* $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqq \gamma > 0$ $(N < n \leqq N')$. *Soit* $T = (\pi + \epsilon)/\gamma > \pi/\gamma$. *Alors:*

$$\sum_{N \leqq n \leqq N'} |a_n|^2 \leqq \frac{a(\epsilon)}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt$$

où $a(\epsilon)$ *est une fonction de* ϵ *telle que* $\epsilon a(\epsilon) \rightarrow a > 0$, *quand* $\epsilon \rightarrow 0$.

Soit alors N un entier $\geqq 1$ et posons $p_N(t) = \sum_1^\infty \epsilon_n u_n(it)$. La distance de deux fréquences consécutives dans p_N est $\log m - \log (m-1) \geqq 1/m \geqq 1/(2N+1) \geqq 1/3N$, donc on peut appliquer le Lemme 3 avec $\gamma = 1/3N$, $T = 2\pi/\gamma = 6\pi N$. On en déduit:

$$2N \leqq \frac{a(\pi)}{2T} \int_{-T}^{T} |p_N(t)|^2 dt \leqq a(\pi) m_N^2$$

où $m_N = \sup_{|t| \leqq 6\pi N} |p_N(t)|$. Donc:

$$m_N \geqq a\sqrt{N} \tag{16}$$

où a est une constante.

Considérons (principe de symétrie)

$$g(it) = \sum_1^N \epsilon_n u_n(it) + \sum_{N+1}^\infty \epsilon_n u_n(it)$$

$$h(it) = \sum_1^N \epsilon_n u_n(it) - \sum_{N+1}^\infty \epsilon_n u_n(it)$$

et les événements suivants:

$$A_N\colon \sup_{|t| \leqq 6\pi N} |g(it)| \geqq a\sqrt{N} \text{ et } B_N\colon \sup_{|t| \leqq 6\pi N} |h(it)| \geqq a\sqrt{N}.$$

$P(A_N) = P(B_N)$, vu la symétrie des ϵ_n; et $A_N \cup B_N = \Omega$, compte tenu de $g + h = 2p_N$ et de (16); donc, $P(A_N) \geqq \frac{1}{2}$; on en déduit: $P(\mu(0) \geqq \frac{1}{2}) \geqq \frac{1}{2}$ et par la loi du zéro-un: $P(\mu(0) \geqq \frac{1}{2}) = 1$. Reste à montrer:

$$\text{a) } \mu(\tfrac{1}{2}) = 0 \text{ ps;} \quad \text{b) } \mu(-\tfrac{1}{2}^+) \leqq 1 \text{ ps.}$$

a) est immédiat, en écrivant:

$$g(s) = \sum_1^\infty \frac{\epsilon_n}{(2n+1)^s} + \sum_1^\infty \frac{-\epsilon_n}{(2n)^s} = f_1(s) + f_2(s).$$

f_1 et f_2 se majorent exactement comme f dans le Théorème 1, en utilisant le Lemme 1; et donc ps:

$$g(\sigma + it) = 0((\log |t|)^{1-\sigma}) \text{ si } \tfrac{1}{2} < \sigma < 1 \Rightarrow \mu(\sigma) = 0 \text{ si } \sigma > \tfrac{1}{2}.$$

b) s'obtient ainsi: si $-\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2}$, nous avons, avec $n_j = 2^j$, $s = \sigma + it$

$$\sum_{n_j<n\leqq n_{j+1}} \epsilon_n u_n(s) = -s\int_0^1 \sum_{n_j<n\leqq n_{j+1}} \frac{\epsilon_n}{(2n+\beta)^{s+1}}\,d\beta.$$

D'aprés le Lemme 1, compte tenu de $m_j = 2n_j$, nous avons, avec $\alpha = 1$, $B = 1$, $b = 0$:

$$P\left(\left\|\sum_{n_j<n\leqq n_{j+1}} \frac{\epsilon_n u_n(s)}{s}\right\|_{[0,T]} > \frac{C_\sigma}{n_j^{\sigma+1/2}}\sqrt{\log Tn_j}\right) \leqq \frac{1}{Tn_j}.$$

On achève, comme dans le Théorème 1, avec le même choix de T_k et on conclut que, si $-\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2}$, on a ps:

$$g(\sigma + it) = 0(|t|(\log|t|)^{-\sigma} \text{ quand } |t| \to \infty;$$

d'ou $\mu(g, \sigma) \leqq 1$. En faisant $\sigma = \sigma_j = -1/2 + 1/j$, $j \to \infty$, on en déduit les estimations ps:

$$\mu(-\tfrac{1}{2} + 0) \leqq 1;\ \mu(0) \geqq \tfrac{1}{2};\ \mu(\tfrac{1}{2}) = 0.$$

D'aprés les propriétés de convexité et de monotonie de μ, ceci achève la preuve du Théorème 2.

On va maintenant prouver deux théorèmes qui montrent qu'en prenant des différences successives de plus en plus élevées à partir des séries $\sum_1^\infty \epsilon_n/n^s$, on peut "pousser" σ_h jusqu'à $-\infty$, et obtenir des séries $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$ pour lesquelles le $\mu(\sigma)$ est bien contrôlé.

THÉORÈME 3. *Il existe une série de Dirichlet $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$ avec les propriétés suivants: $\sigma_s = 0$, $\sigma_h = -\infty$,*

$$\mu(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma > 1 \\ 1 - \sigma \text{ si } \sigma \leqq 1. \end{cases}$$

Le Théorème 3 découle des deux lemmes suivants (via la convexité de μ).

LEMME 4. *Considérons une série de la forme*

$$(17)\qquad \sum_{j=0}^\infty \left(\sum_{n_j<n\leqq n_{j+1}} \epsilon_n \Delta_j \varphi(u_{jn})\right) = \sum_{j=0}^\infty S_j = F(s)$$

ou $\epsilon_n = \pm 1$, ou $\Delta_j\varphi$ désigne les différences j-ièmes associées à la fonction $\varphi(x) = x^{-s}$, les n_j étant une suite strictement croissante d'entiers (avec $n_0 = 0$) et les u_{jn} étant des entiers choisis de façon que (17) s'écrive formellement:

$$(17')\qquad \sum_1^\infty \pm n^{-s}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

Alors, pour tout choix des ϵ_n *et des* n_j, *on a pour* (17′)

$$\begin{cases} \sigma_s = 0,\ \sigma_h = -\infty \\ \mu(\sigma) = 0 \ si\ \sigma > 1 \\ \mu(\sigma) \leqq 1 - \sigma \ si\ \sigma \leqq 1. \end{cases}$$

Preuve. (17) = (17′) pour $\sigma > 1$, par convergence absolue; et (17) définira le prolongement analytique de (17′); montrons que (17) est une fonction entière. Soit

$$S_j = \sum\nolimits_{n_j<n\leqq n_{j+1}} \epsilon_n \Delta_j \varphi(u_{jn}).$$

Par le Lemme 2,

$$|S_j| \leqq \sum_{n_j<n\leqq n_{j+1}} \frac{|s(s+1)\ldots(s+j-1)|}{(u_{jn})^{\sigma+j}} 2^{j^2/2}$$
$$\leqq |s(s+1)\ldots(s+j-1)|\, 2^{j^2/2} \sum_{l=1}^{n_{j+1}-n_j} \frac{1}{(l2^j)^{\sigma+j}}$$

puisque

$$(17'') \quad u_{jn} = 1 + n_1 + 2(n_2 - n_1) + \ldots + 2^{j-1}(n_j - n_{j-1})$$
$$\geqq 1 + 1 + 2 + \ldots + 2^{j-1} = 2^j$$

et qu'ensuite les u_{jn} varient de 2^j quand n varie de 1. D'où

$$|S_j| \leqq |s(s+1)\ldots(s+j-1)| 2^{-j^2/2} 2^{-j\sigma} \pi^2/6$$

dés que $j + \sigma \geqq 2$. Donc $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$ est une fonction entière et $\sigma_h = -\infty$. Soit maintenant p un entier $\geqq 0$ et supposons $\sigma > -p$; écrivons (17) sous la forme:

$$\sum\nolimits_{j\leqq p} S_j + \sum\nolimits_{j\geqq p+1} S_j = X_1 + X_2$$

et intéressons nous seulement à X_2, X_1 n'influant pas sur $\mu(\sigma)$; mais, si $j \geqq p + 1$, on a:

$$S_j = \sum_{n_j<n\leqq n_{j+1}} \epsilon_n \left(\sum_{m=1}^{2^{j-p-1}} \alpha_m \Delta_{p+1} \varphi(u_{jn} + (m-1)2^{p+1}) \right),$$

avec $\alpha_m = \pm 1$ et d'après le Lemme 2:

$$|S_j| \leqq \sum \frac{|s(s+1)\ldots(s+p)| 2^{p(p+1)}/2}{(u_{jn} + (m-1)2^{p+1})^{\sigma+p+1}}$$

où la somme porte sur les $n \in\,]n_j, n_{j+1}]$ et les $m \in [1, 2^{j-p-1}]$. Comme les $u_{jn} + (m-1)2^{p+1}$ sont 2 à 2 distincts quand m, n, j varient, on a:

$$|X_2| \leqq |s(s+1)\ldots(s+p)|\, 2^{p(p+1)/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma+p+1}}.$$

D'où $\mu(\sigma) \leqq p + 1$ si $\sigma > -p$; comme $\mu(\sigma) = 0$ si $\sigma > 1$, la convexité de μ entraîne $\mu(\sigma) \leqq 1 - \sigma$ si $\sigma \leqq 1$. Reste à montrer que $\sigma_s = 0$. (17′) s'écrit $\sum_1^\infty \alpha_n/n^s$ avec $\alpha_n = \pm 1$. Considérons, pour $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$, une somme partielle $s_N = \sum_1^N \alpha_n/n^s$.

Soit j_0 le plus petit indice tel que N figure dans S_{j_0} et j_0 étant ainsi fixé, soit ν_0 le plus petit indice $> n_{j_0}$ tel que N figure dans les indices de $\epsilon_{\nu_0}\Delta_{j_0}\varphi(u_{j_0}n)$; on va démontrer que $S_0 + \ldots + S_{j_0} - s_N \to 0$ quand $N \to +\infty$, ce qui montera bien que $\sigma_s = 0$. Or:

$$S_0 + \ldots + S_{j_0} - s_N = \sum_{\nu_0 < n \leqq n_{j_0+1}} \epsilon_n \Delta_{j_0}\varphi(u_{j_0 n}) + R(s)$$
$$= R_0(s) + R(s).$$

On voit aisément, en utilisant le Lemme 2 et les minorations de $u_{j_0 n}$, que $R_0(s) \to 0$ quand $N \to \infty$; $R(s)$ représente, au signe prés, les termes qui restent dans $\Delta_{j_0}\varphi(u_{j_0\nu_0})$ quand on a épuisé les indices jusqu'à N; soit M le nombre de termes restants: $M = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \ldots + 2^{p_k}$, avec $p_1 > \ldots > p_k \geqq 0$, et $p_1 \leqq j_0$ puisque $M \leqq 2^{j_0}$. Groupons les M termes de $R(s)$, "à partir de la droite", en 2^{p_1} termes, puis 2^{p_2} termes, etc. . . . , nous obtenons au signe prés des différences d'ordre $p_1, p_2, \ldots$ de φ, soit: $T(s) = \pm\Delta_{p_1} \pm \ldots \pm \Delta_{p_k}$ avec, si m_i est le premier indice apparaissant dans p_i, et en utilisant le Lemme 2:

$$|\Delta_{p_i}| = |\Delta_{p_i} f(m_i)| \leqq \frac{|s(s+1)\ldots(s+p_i-1)|}{m_i^{\sigma+p_i}} 2^{p_i^2/2}.$$

D'aprés (17″) $m_i \geqq u_{j_0 n_{j_0}+1} \geqq 2^{j_0}$, d'où, puisque $p_i \leqq j_0$:

$$|\Delta_{p_i}| \leqq 2^{-j_0\sigma}|s(s+1)\ldots(s+p_i-1)|2^{-p_i^2/2}.$$

Comme les p_i sont distincts:

$$|R(s)| \leqq 2^{-j_0\sigma}\sum_{n=1}^\infty |s(s+1)\ldots(s+n-1)|2^{-n^2/2} = c(s)2^{-j_0\sigma}.$$

Comme $\sigma > 0$, $R(s) \to 0$ quand N, et donc j_0, $\to +\infty$; ce qui achève la preuve du Lemme 4.

LEMME 5. *Dans* (17), *choisissons les* n_j *de façon que:*

$$(18) \quad \begin{cases} n_{j+1} \geqq qn_j,\ q > 1 \\ \dfrac{\log(n_j - n_{j-1})}{j^2} \to +\infty. \end{cases}$$

Alors pour (17′), *on a* qs *en* ϵ_n: $\mu(0) \geqq 1$.

On va montrer que, $\forall \epsilon \in]0, 1[$, $\mu(0) \geqq 1 - \epsilon$ qs; le lemme s'ensuivra. Soit, pour un tel ϵ,

$$\Omega_N = \{\omega / |F_\omega(it)| \leqq \gamma |t|^{1-\epsilon}\ \forall |t| \geqq N\},$$

N entier $\geqq 1$, γ constante à fixer, $F_\omega(s)$ désignant la somme de (17). Ω_N

est évidemment fermé; montrons qu'il est d'intérieur vide. Soit

$$m_j = u_{jn_j+1} = 1 + (n_1 - n_0) + 2(n_2 - n_1) + \ldots + 2^{j-1}(n_j - n_{j-1})$$

le premier indice des blocs Δ_j; soit $t = t_j = m_j/2^j$, et fixons j de façon que $t \geqq N$.

Soit $S_j = \sum_{n_j < n \leqq n_{j+1}} \epsilon_n \Delta_j \varphi(u_{jn})$. On peut appliquer le Lemme 2 b) aux Δ_j qui figurent dans S_j, puisque $t2^j/u_{jn} \leqq t\,2^j/m_j = 1$. On obtient, puisque $\sigma = 0$

(19) $\quad |\Delta_j \varphi(u_{jn})| \geqq ct^j/(u_{jn} + 2^j)^j.$

Le nombres de blocs Δ_j est $n_{j+1} - n_j \geqq (q-1)\, m_j/2^{j-1} \geqq \lambda t$, avec $\lambda = \inf(2(q-1), 1)$. Considérons seulement les $[\lambda t]$ premiers blocs Δ_j, pour lesquels on a: $u_j n = m_j + l2^j$, $l \leqq t$. (19) donne alors:

$$|\Delta_j \varphi(u_{jn})| \geqq ct^j/(2m_j)^j \geqq ct^j 2^{-j}/(t2^j)^j \geqq c2^{-2j^2}.$$

Mais $c2^{-2j^2} \geqq t^{1-\epsilon} = t_j^{1-\epsilon}$ si j est grand,

$$t_j = m_j/2^j \geqq \tfrac{1}{2}(n_j - n_{j-1}) \geqq c^{-1/\epsilon} e^{j^{2(\log 4)/\epsilon}}$$

pour j grand, d'après (18).

En résumé, si $l \leqq [\lambda t]$, le l-ième bloc Δ_j vérifie $|\Delta_j| \geqq t^{-\epsilon}$, et le nombre de ces blocs est équivalent à λt, disons $\geqq \lambda t/2$ pour t grand. Si on prend $\gamma/12$, on obtient $\Omega_N{}^0 = \emptyset$ en reprenant l'argument de la partie quasi-sûre du Théorème 2. Ceci démontre le Lemme 5; le Théorème 3 découle des Lemmes 4 et 5.

THÉORÈME 4. *Il existe une série de Dirichlet* $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$ *avec les propriétés suivantes:*

$$\sigma_s = 0, \sigma_h = +\infty \text{ et } \mu(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \sigma \text{ si } \sigma \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Le Théorème 4 découle du Lemme 4 et du lemme suivant.

LEMME 6. *Soit* n_j *(avec* $n_0 = 0$*) une suite strictement croissante d'entiers telle que:*

a) $n_{j+1}/n_j \geqq q > 1$ *pour* $j \geqq 1$, *où* q *est une constante.*

b) $\forall\, \epsilon > 0$, $\sum_{j=1}^\infty 2^j \sqrt{\log n_{j+1}/n_j{}^\epsilon} < \infty$.

Alors, la série (17) *du Lemme* 4 *et son prolongement analytique* (17) *vérifient* ps:

$$\sigma_s = 0, \sigma_h = -\infty, \mu(\sigma) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \sigma \text{ si } \sigma \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Des exemples de suites n_j vérifiant a) et b) sont $n_j = j^j$ ou $n_j = 2^{j^2}$ pour $j \geqq 1$. $\sigma_s = 0$, $\sigma_h = -\infty$ découle du Lemme 4; on montrera d'autre part que:

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

1) $\mu(0) \geqq \frac{1}{2}$ps

2) pour tout entier $p \geqq 0$, on a ps: $\mu(\sigma) \leqq p$ si $\sigma > -p + \frac{1}{2}$.

1) Soit $P_k = \sum_{j \leqq k} S_j(it)$, soit N_k le degré de P_k; comme dans la preuve du Théorème 2, on applique le principe de symétrie à

$$P_k + \sum_{j>k} S_j \text{ et } P_k - \sum_{j>k} S_j$$

ce qui, joint au Lemme 3, donne $P(\sup_{|t| \leqq 6\pi N_k} |F(it)| \geqq a\sqrt{N_k}) \geqq \frac{1}{2}$. D'où $\mu(0) \geqq \frac{1}{2}$ ps.

2) Soit p entier $\geqq 0$, et $\sigma > -p + \frac{1}{2}$ fixé. Ecrivons

$$F(s) = \sum_{j<p} S_j + \sum_{j \geqq p} S_j = X_1 + X_2.$$

La somme finie X_1 n'a aucune influence sur $\mu(\sigma)$, on peut se borner à estimer X_2. Nous avons

$$X_2 = \sum_{j=p}^{\infty} \sum_{n_j < n \leqq n_{j+1}} \epsilon_n \left(\sum_{m=1}^{2^{j-p}} \alpha_m \Delta_p \varphi(u_{jn} + (m-1)2^p) \right)$$

où les $\alpha_m = \pm 1$ ne dépendent que de j et p, et sont indépendants de n. Donc:

$$j \geqq p \Rightarrow S_j = \sum_{m=1}^{2^{j-p}} \alpha_m \sum_{n_j < n \leqq n_{j+1}} \epsilon_n \Delta_p \varphi(u_{jn} + (m-1)2^p)$$

$$|S_j| \leqq \sum_{m=1}^{2^{j-p}} \left| \sum_{n_j < n \leqq n_{j+1}} \epsilon_n \Delta_p \varphi(u_{jn} + (m-1)2^p) \right|,$$

soit

$$|S_j| \leqq \sum_{m=1}^{2^{j-p}} |A_m|.$$

Soit λ_j le premier des u_{jn}: $\lambda_j = u_{jn_j+1} = 1 + n_1 + 2(n_2 - n_1) + \ldots + 2^{j-1}(n_j - n_{j-1})$. Les u_{jn} varient, à partir de λ_j, de 2^j en 2^j, donc:

$$A_m = \sum_{n_j < n \leqq n_{j+1}} \epsilon_n \Delta_p \varphi(\lambda_j + (n - n_j - 1)2^j + (m-1)2^p),$$

soit encore

$$A_m = \sum_{n=0}^{n_{j+1}-n_j-1} \epsilon_{n+n_j+1} \Delta_p \varphi(2^j n + \lambda_j + (m-1)2^p).$$

Si $\rho_n = \epsilon_{n+n_j+1}$, $0 \leqq n \leqq n_{j+1} - n_j - 1$, on a par le Lemme 2

$$(20) \quad A_m = (-1)^p s(s+1)\ldots(s+p-1) \int \ldots \int_{(P)} B_m(x_1, \ldots, x_p) \times dx_1 \ldots dx_p$$

qvec

$$B_m = \sum_{n=0}^{n_{j+1}-n_j-1} \frac{\rho_n}{(2^j n + \lambda_j + (m-1)2^p + x_1 + \ldots + x_p)^{s+p}}.$$

On applique le Lemme 1 à B_m de la façon suivante:

$$\begin{cases} n_j \text{ est remplacé par } 0 \\ m_j \text{ est remplacé par } n_{j+1} - n_j - 1 \\ B = \lambda_j + (m-1)2^p + x_1 + \ldots + x_p \text{ donc } \lambda_j \leqq B \leqq \lambda_j \\ \qquad + 2^j - 2^p + 2^p = \lambda_j + 2^j \leqq 2\lambda_j \text{ et on prend } b = \lambda_j, \\ \qquad\qquad B = 2\lambda_j. \text{ Enfin, } \alpha = 2^j \leqq \lambda_j \\ T \text{ reste inchangé.} \end{cases}$$

On obtient alors, avec les notations du Lemme 1,

$$P\left(||B_m|| > \frac{C(\sigma, p) \log \lambda_j}{[\lambda_j]^{\sigma+p-1/2}} \sqrt{\log Tn_{j+1}(\lambda_j)^2 \nu} \right) \leqq \frac{1}{\nu}.$$

D'après (20):

$$(21) \quad P\left(\left\| \frac{A_m}{s(s+1)\ldots(s+p-1)} \right\|_{[0,T]} \geqq \frac{C(\sigma, p) \log \lambda_j}{[\lambda_j]^{\sigma+p-1/2}} \times \sqrt{\log (Tn_{j+1}[\lambda_j]^2 \nu)} \right) \leqq \frac{1}{\nu}.$$

Posons $\sigma + p - \frac{1}{2} = 2\epsilon > 0$, $\nu = Tn_j$ et remarquons que

$$\lambda_j \leqq 2^{j-1}(n_j - n_{j-1} + n_{j-1} - n_{j-2} + \ldots) \leqq 2^{j-1} n_j \leqq [n_j]^2$$

pour j assez grand, d'après b). D'autre part,

$$\lambda_j \geqq 2^{j-1}(n_j - n_{j-1}) \geqq 2^{j-1}(1 - 1/q)n_j \geqq n_j$$

pour j assez grand. (21) prend alors la forme, pour j assez grand (on aura alors $\log \lambda_j \leqq (n_j)^\epsilon$ par b))

$$(22) \quad P\left(\left\| \frac{A_m}{s(s+1)\ldots(s+p-1)} \right\|_{[0,T]} > \frac{C(\sigma, p)}{(n_j)^\epsilon} \sqrt{\log Tn_{j+1}} \right) \leqq \frac{1}{Tn_j}.$$

D'après $|S_j| \leqq \sum_{m=1}^{2j-p} |A_m|$, (22) entraîne, pour $j \geqq j_1$:

$$(23) \quad P\left(\left\| \frac{S_j}{s(s+1)\ldots(s+p-1)} \right\|_{[0,T]} > \frac{C(\sigma, p) 2^j \sqrt{\log Tn_{j+1}}}{[n_j]^\epsilon} \right) \leqq \frac{2^j}{Tn_j}.$$

Soit alors T_k une suite de valeurs de T telle que $\sum 1/T_k < \infty$; comme $\sum 2^j/n_j < \infty$ par l'hypothèse b), d'après le lemme de Borel-Cantelli, il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, $P(\Omega_0) = 1$ tel que $\omega \in \Omega_0 \Rightarrow \exists j_0(\omega) = j_0 \geqq j_1$, $k_0(\omega) = k_0$ tels que: $j \geqq j_0$, $k \geqq k_0 \Rightarrow \omega \in (A_{jk})^c$ où A_{jk} désigne l'évènement:

$$\left\| \frac{S_j}{s(s+1)\ldots(s+p-1)} \right\|_{[0,T_k]} > \frac{C(\sigma, p)}{[n_j]^\epsilon} 2^j \sqrt{\log T_k n_{j+1}}.$$

Fixons $\omega \in A$, soit $t > T_{k_0}(\omega)$ et k l'unique indice tel que $T_{k-1} \leqq t < T_k$. $k \geqq k_0$ et on peut supposer $j_0 \geqq p + 1$. Avec les notations de la page 552, écrivons

$$X_2 = \sum_{j=p}^{j_0-1} S_j + \sum_{j_0}^{\infty} S_j = X_3 + X_4.$$

X_3 n'a aucune influence sur $\mu(\sigma)$; pour X_4 on a la majoration suivante au point $s = \sigma + it$

$$\left| \frac{X_4}{s(s+1)\ldots(s+p-1)} \right| \leqq \sqrt{\log T_k} \left(\sum_{j0}^{\infty} \frac{C(\sigma, p)2^j}{(n_j)^\epsilon} \right) + \sum_{j0}^{\infty} \frac{C(\sigma, p)2^j\sqrt{\log n_{j+1}}}{(n_j)^\epsilon}.$$

Avec, par exemple, $T_k = k^2$, on a $T_k \sim t$ et vu les hypothèses du lemme

$$|X_4/s(s+1)\ldots(s+p-1)| \leqq A(\sigma, p)\sqrt{\log t} + B(\sigma, p).$$

On en déduit $\mu(X_4, \sigma) \leqq p$ et donc $\mu(F_\omega, \sigma) \leqq p$, si $\omega \in A$. Ceci démontre 2).

On achève en utilisant la convexité de μ et en faisant varier p.

2. Soit $P = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers rangés par ordre croissant et soit (ϵ_n) une suite de variables de Rademacher indépendantes; on considère les deux "produits d'Euler" suivants:

$$(1) \qquad \prod_1^\infty \frac{1}{1 - \epsilon_n p_n^{-s}} = F(s)$$

$$(2) \qquad \prod_1^\infty \frac{1 - \epsilon_n p_{2n-1}^{-s}}{1 - \epsilon_n p_{2n}^{-s}} = G(s).$$

Soit d'autre part:

$$(3) \qquad \textstyle\sum_1^\infty \epsilon(m)/m^s = f(s)$$

$$(4) \qquad \textstyle\sum_1^\infty \gamma(m)/m^s = g(s)$$

où $\epsilon(m)$ et $\gamma(m)$ sont respectivement les coefficients obtenus en développant F et G en série de Dirichlet absolument convergente pour $Rs > 1$; on a notamment:

$$\epsilon(m) = (\epsilon_{\alpha_1})^{k_1}\ldots(\epsilon_{\alpha_l})^{k_l} \text{ si } m = (p_{\alpha_1})^{k_1}\ldots(p_{\alpha_l})^{k_l} \text{ et } m \mapsto \epsilon(m)$$

est une fonction strictement multiplicative sur $\mathbf{N}$; d'autre part, on vérifie aisément que $\gamma(m)$ ne prend que les valeurs $\pm 1, 0$; on aura besoin de la remarque suivante: si q et q' sont deux entiers distincts sans facteurs carrés, $\epsilon(q)$ et $\epsilon(q')$ sont indépendants. En effet, $q = rs$, $q' = rt$ avec $(r, s) = (r, t) = (s, t) = 1$. Les trois variables $\epsilon(r)$, $\epsilon(s)$, $\epsilon(t)$ sont des Rademacher et on a donc: $\epsilon(s)$ et $\epsilon(t)$ indépendantes $\Leftrightarrow \epsilon(r)\ \epsilon(s)$ et $\epsilon(r)\ \epsilon(t)$ indépendantes $\Leftrightarrow \epsilon(q)$ et $\epsilon(q')$ indépendantes.

THÉORÈME 1. *Le produit infini* (1) *et la série* (3) *sont* ps *convergents pour* $Rs > \frac{1}{2}$ *et on a* ps:

$$F(s) = f(s) \textit{ si } Rs > \tfrac{1}{2}.$$

L'énoncé donne un exemple d'une série de Dirichlet à coefficients ± 1, d'abscisse de convergence $\frac{1}{2}$ (comme on le verra plus loin), qui possède un produit d'Euler (et est donc sans zéros) pour $Rs > \frac{1}{2}$; cela dit, si $s = \sigma + it$ avec $\sigma > \frac{1}{2}$, nous avons:

$$\prod_1^N (1 - \epsilon_n p_n{}^{-s}) = \prod_1^N (1 + u_n) \exp\left(-\sum_1^N \epsilon_n (p_n)^{-s}\right)$$

avec

$$1 + u_n = (1 - \epsilon_n p_n{}^{-s}) \exp \epsilon_n p_n{}^{-s}$$

et donc $|u_n| \leqq (p_n)^{-2\sigma}$ ([**12**]). Donc, $\prod_1^N (1 + u_n)$ converge uniformément sur tout compact de $Rs > \frac{1}{2}$ ainsi que, ps, $\sum_1^N \epsilon_n(p_n)^{-s}$ (cf. [**10**]), et donc $F(s)$ est ps analytique pour $Rs > \frac{1}{2}$. D'autre part, si $Q = \{q_1, \dots, q_r, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers sans facteurs carrés rangés par ordre croissant, la série $\sum_{r=1}^\infty \epsilon(q_r)[q_r]^{-s}$ converge ps pour $Rs > \frac{1}{2}$ d'après la remarque faite plus haut et d'après le théorème de Menchoff [**8**], puisque si $s = \sigma + it$ avec $\sigma > \frac{1}{2}$:

$$\sum_{r=1}^\infty \frac{\log^2 q_r}{(q_r)^{2\sigma}} \leqq \sum_{n=1}^\infty \frac{\log^2 n}{n^{2\sigma}} < \infty .$$

Mais alors la série $\sum_1^\infty \epsilon(m)/m^s$ converge ps pour $Rs > \frac{1}{2}$, car c'est le produit de Dirichlet de la série absolument convergente $\sum_{r=1}^\infty 1/r^{2s}$ et de la série semi-convergente $\sum_{r=1}^\infty \epsilon(q_r)\ [q_r]^{-s}$. Donc, $f(s)$ est ps analytique pour $Rs > \frac{1}{2}$: comme $F(s) = f(s)$ pour $Rs > 1$, on a bien l'égalité pour $Rs > \frac{1}{2}$.

THÉORÈME 2. 1) *La droite* $Rs = 1$ *est* qs *une coupure pour* F.

2) *La droite* $Rs = \frac{1}{2}$ *est* ps *une coupure pour* F *et on a* ps

$$\mu(F, \sigma) = 0 \text{ si } \sigma > \tfrac{1}{2}.$$

Si $Rs > 1$, nous avons:

$$F(s) = A(s) \exp B(s) \tag{5}$$

avec

$$A(s) = \prod_1^\infty (1 - \epsilon_n p_n{}^{-s})^{-1} \exp(-\epsilon_n p_n{}^{-s}) \tag{6}$$

analytique sans zéros pour $Rs > \frac{1}{2}$ et

$$B(s) = \sum_1^\infty \epsilon_n (p_n)^{-s}$$

La droite $\sigma = 1$ est qs une coupure pour B, d'après le Théorème 1'; on en déduit la même chose pour F par (5) et (6). Du point de vue ps, écrivons si $s = \sigma + it$, avec $\sigma > \frac{1}{2}$:

$$1/F(s) = A_1(s) B_1(s) C_1(s) \tag{7}$$

avec

$$A_1(s) = \prod_1^\infty (1 - \epsilon_n p_n{}^{-s}) \exp(\epsilon_n p_n{}^{-s} + \tfrac{1}{2} p_n{}^{-2s}) = \prod_1^\infty (1 + v_n(s)), \tag{8}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

avec $|v_n(s)| \leqq p_n^{-3\sigma}$ (cf. [**12**]) et donc $A_1(s)$ analytique sans zéro pour $\sigma > 0$;

(9) $$C_1(s) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_1^\infty p_n^{-2s}\right)$$

qui est régulière en tous les points $\frac{1}{2} + it_0$, $t_0 \neq 0$, puisque ζ ne s'annule pas sur $Rs = 1$ (cf. [**13**])

(10) $$B_1(s) = \exp\left(-\textstyle\sum_1^\infty \epsilon_n/p_n^s\right) = \exp(-B(s)).$$

La droite $\sigma = \frac{1}{2}$ est ps une coupure B, d'après [**6**]; on en déduit la même chose pour F d'après (7), (8), (9), (10).

Si $\sigma > \frac{1}{2}$, (5) donne la majoration:

$$|F(s)| \leqq C_\sigma \exp \mathscr{R} \textstyle\sum_1^\infty \epsilon_n/p_n^s \leqq C_\sigma \exp\left|\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n p_n^s\right|.$$

Et si $B(s) = \sum_1^\infty \epsilon_n/p_n^s$, les méthodes du Théorème 1 donnent aisément le résultat ps suivant: $B(\sigma + it) = O(\sqrt{\log|t|})$ si $\sigma > \frac{1}{2}$; donc $|B(\sigma + it)| \leqq \epsilon \log|t|$ pour $|t|$ assez grand, d'où $F(\sigma + it) = 0(|t|^\epsilon)$ $\forall\, \epsilon > 0$, si $\sigma > \frac{1}{2}$, d'où le Théorème 2.

Le théorème qui suit va décrire une série de Dirichlet à coefficients $\pm 1, 0$, avec $\sigma_s = 0$, $\sigma_h \leqq 0$ qui possède dans la bande $0 < \sigma < 1$ une croissance beaucoup plus forte que celles rencontrées dans la première partie; pour cela, on introduit une nouvelle "indicatrice de croissance": si h est une fonction analytique dans un demi-plan vertical, on pose

$$\lambda(h, \sigma) = \lambda(\sigma) = \inf\{\xi \geqq 0 | h(\sigma + it) = O(e^{|t|^\xi}) \text{ quand } |t| \to \infty\}.$$

On a aussi

$$\lambda(h, \sigma) = \inf\{\xi \geqq 0 | h(\sigma + it) = O(e^{B|t|^\xi}) \text{ quand } |t| \to +\infty, \text{ pour une certaine constante } B\}$$

puisque $B|t|^\xi$ croît moins vite que $|t|^{\xi'}$ quand $\xi' > \xi$. Remarquons alors que le produit infini (2) converge uniformément sur tout compact de $Rs > 0$; en effet, (2) s'écrit: $\prod_1^\infty (1 + u_n(s))$, avec:

$$u_n(s) = \frac{\epsilon_n(p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s})}{1 - \epsilon_n p_{2n}^{-s}},$$

d'où pour $Rs > 0$:

$$|u_n(s)| \leqq C_\sigma |p_{2n}^{-s} - p_{2n-1}^{-s}| \leqq C_\sigma |s| \int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} u^{-\sigma-1} du,$$

d'où:

(11) $$\sum_1^\infty |u_n(s)| \leqq C_\sigma |s| \int_1^\infty u^{-\sigma-1} du = C_\sigma \frac{|s|}{\sigma} < \infty.$$

On en déduit que (2) définit une fonction G analytique par $Rs > 0$ et aussi que:

$$(12) \qquad |G(\sigma + it)| \leqq \prod_1^\infty (1 + |u_n|) \leqq \exp \sum_1^\infty |u_n| \leqq \exp C_\sigma |t|$$

d'après (11).

La série de Dirichlet annoncée sera celle donnée par (4), auparavant, il faut établir deux lemmes dont le second donne la propriété fondamentale de $\lambda(G, \sigma)$.

LEMME 1. *Soit* $0 < \sigma_1 < \sigma_2$. *Si l'on a, pour un* $\xi \in [0, 1]$, *les inégalités:* $|G(\sigma_1 + it)| \leqq Ae^{B|t|^\xi}$ *et* $|G(\sigma_2 + it)| \leqq Ae^{B|t|^\xi}$ *alors*

$$|G(\sigma + it)| \leqq A_\alpha e^{B_\alpha |t|^\alpha} \text{ pour } \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2, \text{ si } \xi < \alpha < 1$$

$$|G(\sigma + it)| \leqq A_1 e^{B_1|t|} \text{ pour } \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2, \text{ si } \xi = \alpha = 1.$$

(*où* A, B, A_α, B_α *sont des constantes indépendantes de* t *et* σ).

Distinguons deux cas.

1. $\xi < 1$. Si $\xi < \alpha < 1$, soit

$$G_\alpha(s) = G(s) \exp - s^\alpha$$

$|G_\alpha(s)| = |G(s)|\, exp\, (-|s|^\alpha \cos \alpha \arg s)$ donc si $\delta = \cos (\alpha\pi/2) > 0$

$$|G_\alpha(\sigma_1 + it)| \leqq A \exp B|t|^\xi - \delta|t|^\alpha \leqq A_\alpha$$

et de même

$$|G_\alpha(\sigma_2 + it)| \leqq A_\alpha.$$

Comme G_α est une fonction de type exponentiel fini d'après (12), une application classique du principe de Phragmén-Lindelöf [**9**] montre que:

$$|G_\alpha(\sigma + it)| \leqq A_\alpha \text{ pour } \sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2,\ t \in R.$$

D'où: $|G(\sigma + it)| \leqq A_\alpha \exp B_\alpha|t|^\alpha$ avec $B_\alpha = 1$.

2. $\xi = 1$. L'inégalité $|G(\sigma + it)| \leqq A_1e^{B_1|t|}$ pour $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ a lieu automatiquement d'après (12).

LEMME 2. $\lambda(G, \sigma)$ *est convexe, positive, décroissante sur* $]0, \infty[$.

Si, pour $|z| < 1$, $\log (1 - z)$ désigne la série $-\sum_{k=1}^\infty z^k/k$, considérons la fonction:

$$K(s) = \sum_{n=1}^\infty [\log (1 - \epsilon_n p_{2n-1}^{-s}) - \log (1 - \epsilon_n p_{2n}^{-s})] = \sum_1^\infty a_n(s)$$

qui est analytique pour $Rs > 1$ puisque si $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$:

$$|a_n(s)| \leqq \frac{1}{p_{2n-1}^\sigma - 1} + \frac{1}{p_{2n}^\sigma - 1}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

On a de plus la majoration:

$$|K(\sigma + it)| \leqq \sum_1^\infty 1/(p_n^\sigma - 1) = C_\sigma.$$

G est analytique sans zéros dans $Rs > 0$, donc s'y écrit e^H, avec H analytique pour $Rs > 0$. D'autre part, $e^K = G$ si $Rs > 1$, donc il existe un entier l tel que $H(s) = K(s) + 2il\pi$ si $Rs > 1$. On peut supposer $l = 0$ quitte à corriger H; on a alors:

(13) $\quad |H(\sigma + it)| \leqq C_\sigma$ si $\sigma > 1$.

H est analytique pour $Rs > 0$, définie par une série de Dirichlet ordinaire si $Rs > 1$, donc sa fonction de Lindelöf $\mu(H, \sigma)$ est convexe, positive, décroissante sur $]0, \infty[$; le Lemme 2 résultera donc de l'égalité:

$$\lambda(G, \sigma_1) = \mu(H, \sigma_1) \text{ si } \sigma_1 > 0$$

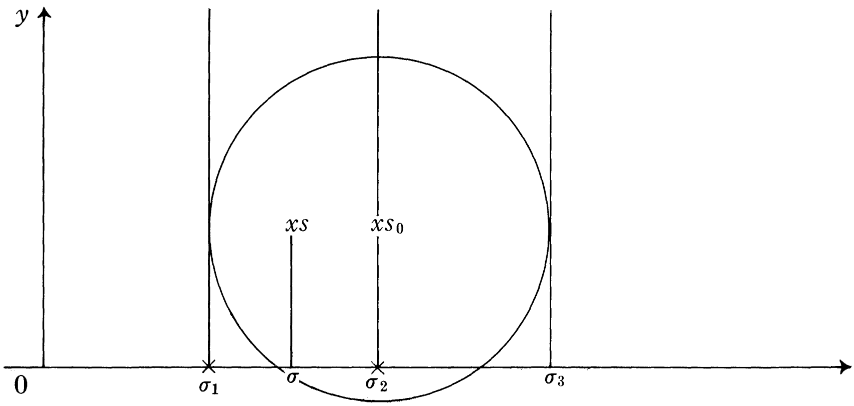
que nous allons prouver.

Soit d'abord ξ tel que $|H(\sigma_1 + it)| = O(|t|^\xi)$; $\xi \geqq 0$, puisque $\mu(H, \sigma_1) \geqq 0$ mais alors, $\mathscr{R}H(\sigma_1 + it) = O(|t|^\xi)$, et comme $|G(\sigma_1 + it)| = \exp \mathscr{R}H(\sigma_1 + it)$,

$$|G(\sigma_1 + it)| \leqq Ae^{B|t|^\xi}.$$

Puisque $\xi \geqq 0$, $\lambda(G, \sigma_1) \leqq \xi$ et donc: $\lambda(G, \sigma_1) \leqq \mu(H, \sigma_1)$. Soit maintenant $\xi \geqq 0$ tel que $|G(\sigma_1 + it)| \leqq Ae^{B|t|^\xi}$; on peut supposer $\xi \leqq 1$ par (12); soit d'autre part $\sigma_2 > \max(1, \sigma_1)$ et $\sigma_3 = 2\sigma_2 - \sigma_1 > 1$. D'après (13), on peut supposer A tel que:

$$\log|G(\sigma_2 + it| = H(\sigma_3 + it) \leqq \log A + B|t|^\xi.$$



Distinguons deux cas.

1. $\xi < 1$. Soit α tel que $\xi < \alpha < 1$. Par le Lemme 1, appliqué avec σ_3 à la place de σ_2, et puisque $\mathscr{R}H = \log|G|$, on a:

(14) $\quad \mathscr{R}H(\sigma + it) \leqq \log A_\alpha + B_\alpha|t|^\alpha = A_\alpha' + B_\alpha'|t|^\alpha$ si $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_3$.

Fixons $\sigma \in]\sigma_1, \sigma_2[$; soit $s = \sigma + it$, $s_0 = \sigma_2 + it$, $r = \sigma_2 - \sigma$, $R = \sigma_2 - \sigma_1$, D le disque de centre s_0, de rayon R (cf. figure). Si $z = a + ib \in D$, on a d'après (14):

$$\mathscr{R}H(z) \leqq A_\alpha' + B_\alpha'|b|^\alpha \leqq A_\alpha' + B_\alpha'(|t|^\alpha + R^\alpha)$$
$$= A_\alpha'' + B_\alpha''|t|^\alpha = M.$$

D'après un lemme classique de Borel [**1**]), on a donc:

$$(15) \quad |H(s) - H(s_0)| \leqq \frac{2r}{R - r}(M - \mathscr{R}H(s_0))$$
$$= \frac{2(\sigma_2 - \sigma)}{\sigma - \sigma_1}(M - \mathscr{R}H(s_0)).$$

Mais $|H(s_0)| = |H(\sigma_2 + it)| \leqq C_{\sigma_2}$ par (13), donc de (15) on tire une inégalité du type $|H(\sigma + it)| \leqq A_\alpha''' + B_\alpha'''|t|^\alpha$.

Donc, $\mu(H, \sigma) \leqq \alpha$; comme cela a lieu pour tout $\alpha > \xi$, $\mu(H, \sigma) \leqq \xi$, comme μ est continue au point σ_1, en faisant tendre σ vers σ_1, on obtient:

$$\mu(H, \sigma_1) \leqq \xi.$$

2. $\xi = 1$. D'après (12), (14) sera automatiquement vérifiée avec $\alpha = 1$, et il ne reste plus qu'à reprendre le raisonnement précédent.

On en déduit $\mu(H, \sigma_1) \leqq \lambda(G, \sigma_1)$, et donc le Lemme 2.

THÉORÈME 3. *Il existe une série de Dirichlet* $\sum_1^\infty \gamma(m)/m^s = g(s)$, *avec* $\gamma(m) = \pm 1, 0$, $\sigma_s = 1$, $\sigma_h \leqq 0$, *telle que si* $G(s)$ *désigne le prolongement analytique de la série pour* $Rs > 0$, *on ait:*

$$\lambda(G, 0) = \begin{cases} 0 \ si \ \sigma > 1 \\ 1 - \sigma \ si \ 0 < \sigma \leqq 1. \end{cases}$$

La série sera donnée par (4), et la fonction G par (2); il reste à estimer $\lambda(G, \sigma)$ pour un bon choix des ϵ_n; l'égalité $\lambda(G, \sigma) = 0$ pour $\sigma > 1$ est évidente par:

$$|G(\sigma + it)| \leqq \prod_{n=1}^\infty \frac{1 + p_{2n-1}^{-\sigma}}{1 - p_{2n}^{-\sigma}};$$

d'autre part, $\lambda(G, \sigma) \leqq 1$ si $\sigma > 0$, par (12); soit $\sigma_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$fixé; on montrera qu'on peut choisir les ϵ_n de façon que $\lambda(G, \sigma_0) \geqq 1 - \sigma_0$; le Lemme 2 et les remarques précédentes donneront alors le Théorème 3. Dans ce qui suit, $s = \sigma_0 + it$, $t \geqq 0$; nous avons: $G(s) = \prod_1^\infty (1 + u_n(s))$, avec:

$$u_n = v_n + w_n(p_{2n})^{-s} \quad \text{où}$$

$$v_n = \frac{\epsilon_n[(p_{2n})^{-s} - (p_{2n-1})^{-s}]}{|1 - \epsilon_n(p_{2n})^{-s}|^2} \quad \text{et}$$

$$-w_n = \frac{(p_{2n})^{-s} - (p_{2n-1})^{-s}}{|1 - \epsilon_n(p_{2n})^{-s}|^2}$$

$|w_n| \leqq (p_{2n})^{-\sigma_0}[(p_{2n})^{-\sigma_0} + (p_{2n-1})^{-\sigma_0}]C_{\sigma_0} \Rightarrow \sum|w_n| \leqq C_{\sigma_0}$. De même,

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press

$\sum |u_n|^2 \leqq C_{\sigma 0}$. On a:

$$|G(s)| = |\pi(1 + u_n)e^{-u_n}| \exp \sum_1^\infty Ru_n = |\pi(1 + u_n')| \exp \sum_1^\infty Ru_n$$

avec $|u_n'| \leqq |u_n|^2$, et $Ru_n \geqq Rv_n - |w_n|$, d'où minoration du type:

$$|G(s)| \geqq C_{\sigma_0} \exp \sum_1^\infty Rv_n$$

$$Rv_n = \frac{\epsilon_n}{|1 - \epsilon_n(p_{2n})^{-s}|^2} R[(p_{2n})^{-s} - (p_{2n-1})^{-s}].$$

Mais

$$(p_{2n-1})^{-s} - (p_{2n})^{-s} = s\int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-s-1}dx = s\int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma_0-1}e^{-it\log x}dx,$$

d'où

$$R[(p_{2n-1})^{-s} - (p_{2n})^{-s}] = \alpha_n + t\beta_n \text{ avec:}$$

$$\alpha_n = \sigma_0 \int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma_0-1} \cos (t \log x)dx \quad \text{et}$$

$$\beta_n = \int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma_0-1} \sin (t \log x)dx \quad \text{et}$$

$$\sum |\alpha_n| \leqq \sigma_0 \int_1^\infty x^{-\sigma_0-1}dx = C_{\sigma_0}.$$

On a donc une minoration du type:

$$(16) \qquad |G(s)| \geqq C_{\sigma_0} \exp (C_{\sigma_0} \textstyle\sum_1^\infty - \epsilon_n\beta_n), \text{ avec } C_{\sigma_0} > 0.$$

A un changement de signe près, tout revient à minorer la fonction:

$$\Phi(s) = \sum_1^\infty \epsilon_n\beta_n(s) \qquad s = \sigma_0 + it,\ t \geqq 0,$$

ce qui va se faire par des méthodes quasi-sûres; auparavant, nous avons besoin du lemme suivant dont nous reproduisons la démonstration avec l'accord de son auteur.

LEMME 3. (Saffari) *Soit J l'intervalle* $[\pi/4, 3\pi/4]$ *sur le cercle, et posons, si* $\epsilon > 0$;

$$N_\epsilon(t) = N\{t \leqq p \leqq t^{1+\epsilon}/p^{it} \in J\} = \textit{nombre d'éléments de } E_t.$$

Alors,

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty} N_\epsilon(t)/\pi(t^{1+\epsilon}) \geqq 1/5$$

ou $\pi(t) = \sum_{p \leqq t} 1$, *$p$ désignant un nombre premier.*

Soit J_1' un intervalle intérieur à J, de longueur $\lambda\pi/2$, avec $4/5 < \lambda < 1$ de manière que cinq translatés $J_k' = J_1'e^{-iu_k}$, $1 \leqq k \leqq 5$, $u_k \geqq 0$, recouvrant le cercle T. Posons $\rho = \overline{\lim}\, N_\epsilon(t)/\pi(t^{1+\epsilon})$.

Soit C une constante > 1 fixée; pour t assez grand, $t \leqq t^{1+\epsilon}/C$ et regardons seulement les nombres premiers p tels que

(17) $\quad t \leqq t^{1+\epsilon}/C < p \leqq t^{1+\epsilon}$.

Alors

$$\log p = (1+\epsilon)\log t - \theta \log C \text{ avec } 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

Si donc on pose $a_k(t) = a_k = u_k/(1+\epsilon)\log t$, on aura:

$$p^{ia_k} = \exp\left(iu_k - \frac{iu_k\theta \log C}{(1+\epsilon)\log t}\right) = \exp iu_k \exp o(1).$$

Soit p vérifiant (17). Pour un $k \in \{1, \ldots, 5\}$, $p^{it} \in J_1' e^{-iu_k}$. Donc $p^{i(t+a_k)} \in J_1' e^{o(1)} \subset J$ pour t assez grand. Donc:

$$p \in \{t \leqq p \leqq t^{1+\epsilon}/p^{i(t+a_k)} \in J\};$$

mais le nombre d'éléments de ce dernier ensemble est $N_\epsilon(t+a_k) + 0(t^\epsilon)$, puisque $(t+a_k)^{1+\epsilon} - t^{1+\epsilon} = 0(t^\epsilon)$. D'où:

$$\pi(t^{1+\epsilon}) - \pi\left(\frac{t^{1+\epsilon}}{C}\right) \leqq \sum_{k=1}^{5} N_\epsilon(t+a_k) + 0(t^\epsilon).$$

Divisons par $\pi(t^{1+\epsilon})$ et passons à la $\overline{\lim}$ en remarquant que, d'après le théorème des nombres premiers:

$$\pi\left(\frac{t^{1+\epsilon}}{C}\right) \sim \frac{1}{C}\pi(t^{1+\epsilon}) \quad et \quad \pi[(t+a_k)^{1+\epsilon}] \sim \pi(t^{1+\epsilon}).$$

Il vient: $1 - 1/C \leqq 5\rho$; d'où le Lemme 3 en faisant tendre C vers $+\infty$.

Soit alors $t_j \uparrow \infty$ telle que $N_\epsilon(t_j) \geqq 1/10\pi(t_j)^{1+\epsilon}$, et soit $p \in Et_j$. $p^{it_j} \in J \Leftrightarrow \exists$ un entier $k \geqq 0$ tell que $\pi/4 + 2k.\,\pi \leqq t_j \log p \leqq 3\pi/4 + 2k.\,\pi$, on a:

$$a_k = \exp\,(\pi/4t_j + 2k.\pi/t_j) \leqq p \leqq \exp\,(3\pi/4t_j + 2k.\pi/t_j) = b_k.$$

Soit $I_k = [a_k, b_k]$; les p de E_{t_j} sont ceux qui appartiennent à un intervalle I_k pour un indice k tel que $\pi/4t_j + 2k.\pi/t_j \leqq (1+\epsilon)\log t_j$; le nombre des intervalles I_k est $O(t_j \log t_j)$, et ils sont disjoints puisque $b_k < a_{k+1}$. Posons:

$$E_{t_j} = \{p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_l}\};$$

on dira que α_i est inadapté si:

α_i impair, $p_{\alpha_i} \in I_k$, $p_{\alpha_{i+1}} \notin I_k$, ou si
α_i pair, $p_{\alpha_i} \in I_k$, $p_{\alpha_{i-1}} \notin I_k$.

Le nombre d'éléments inadaptés de E_{t_j} est au plus deux fois le nombre d'intervalles I_k, c'est donc un $O(t_j \log t_j)$; les autres éléments de E_{t_j} se répartissent en couples (p_{2n-1}, p_{2n}) pour lesquels $p_{2n-1} \in I_k$, $p_{2n} \in I_k$

(si $p_{\alpha_i} \in I_k$, $p_{\alpha_{i+1}} \in I_k$, on a nécessairement $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$), dits couples adaptés; le nombre de ces couples adaptés est donc $\geqq \frac{1}{2}N_\epsilon(t_j) + O(t_j \log t_j) \geqq t_j$ pour t_j assez grand, d'après le Lemme 3. Mais si (p_{2n-1}, p_{2n}) est un couple adapté, $x \in [p_{2n-1}, p_{2n}] \Rightarrow t_j \log x \in J$, d'où

$$\int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma_0-1} \sin (t_j \log x) dx \geqq \tfrac{1}{2} \int_{p_{2n-1}}^{p_{2n}} x^{-\sigma_0-1} dx \geqq \tfrac{1}{2} \frac{p_{2n} - p_{2n-1}}{(p_{2n})^{\sigma_0+1}}$$
$$\geqq [t_j]^{-(1+\epsilon)(1+\sigma_0)} \Rightarrow \beta_n \geqq t_j^{-\sigma_0-\epsilon(1+\sigma_0)}.$$

Si $\omega = (\epsilon_n)$, soit $\Phi_\omega(s) = \sum_1^\infty \epsilon_n \beta_n(s)$ et posons

$$E_N = \{\omega / |\Phi_\omega(\sigma_0 + it)| \leqq \tfrac{1}{4} t^{1-\sigma_0-\epsilon(1+\epsilon_0)} \ \forall\, t, |t| \geqq N\}.$$

E_N est fermé dans Ω, car $\sum |\beta_n| < \infty$; soit $\omega \in E_N$, et V_M le voisinage de ω constitué des $\omega' = (\epsilon_n')$ tels que $\epsilon_n' = \epsilon_n$ si $n \leqq M$; choisissons dans les t_j un terme d'indice suffisamment grand pour que $p_{2n-1} \gtreqq t_j \Rightarrow n > M$ et $t_j \geqq N$; le nombre d'indices n pour lesquels (p_{2n-1}, p_{2n}) est un couple adapté de E_{t_j} est $\geqq t_j$; soit E l'ensemble de ces indices n: $|E| \geqq t_j$. Sur une partie convenable E_ω de E, avec $|E_\omega| \geqq \frac{1}{2} t_j$:

ϵ_n est constant, soit $\epsilon_n = +1$. Soit ω' la suite obtenue en changeant le signe des ϵ_n exactement sur E_ω:$\omega' \in V_M$ et:

$$|\Phi_{\omega'}(\sigma_0 + it_j) - \Phi_\omega(\sigma_0 + it_j)| \geqq 2\tfrac{1}{2} t_j\, t_j^{-\sigma_0-\epsilon(1+\sigma_0)} = t_j^{1-\sigma_0-\epsilon(1+\sigma_0)}$$
$$\Rightarrow |\Phi_{\omega'}(\sigma_0 + it_j)| \geqq \tfrac{3}{4} t_j^{1-\sigma_0-\epsilon(1+\sigma_0)},$$

donc $\omega' \notin E_N$; comme les V_M forment une base de voisinages de ω, $E_N{}^0 = \Phi$. "L'évènement" A:

$$\left(\lim_{|t|\to\infty} \frac{|\Phi_\omega(\sigma_0 + it)|}{t^{1-\sigma_0-\epsilon}} \geqq \tfrac{1}{4} \forall \epsilon > 0 \right)$$

est donc qs; soit $\omega \in A$, et $\epsilon > 0$. On peut trouver une suite $t_l' \uparrow \infty$ telle que (puisque Φ_ω est réelle):

$$\Phi_\omega(\sigma_0 + it_l')(t_l')^{-(1-\sigma_0-\epsilon)} \geqq 1/8 \text{ ou}$$
$$\Phi_{-\omega}(\sigma_0 + it_l')(t_l')^{-(1-\sigma_0-\epsilon)} \geqq 1/8$$

$(-\omega = (-\epsilon_n))$. L'une des deux alternatives doit se produire infinité de fois; on a donc:

$$\overline{\lim}_{|t|\to\infty} \Phi_\omega(\sigma_0 + it)|t|^{-(1-\sigma_0-\epsilon)} = 1/8 \text{ ou}$$
$$\overline{\lim}_{|t|\to\infty} \Phi_{-\omega}(\sigma_0 + it)|t|^{-(1-\sigma_0-\epsilon)} \geqq 1/8.$$

De même, si $\epsilon_j \downarrow 0$ on a par exemple:

$$\overline{\lim}_{|t|\to\infty} \Phi_\omega(\sigma_0 + it)|t|^{-(1-\sigma_0-\epsilon_j)} \geqq 1/8$$

pour une infinité de ϵ_j, d'où

$$\overline{\lim}_{|t|\to\infty} \Phi_\omega(\sigma_0 + it)|t|^{-(1-\sigma_0-\epsilon)} \geqq 1/8 \ \forall\, \epsilon > 0.$$

D'après (16), $\lambda(G_{-\omega}, \sigma_0) \geqq 1 - \sigma_0$, ce qui achève de démontrer le Théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Blanchard, *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers*, (Dunod, Paris, 1969), p. 58.

2. H. Bohr, *Collected mathematical works*, Erling Folner et Borge Gessen, Copenhagen (1952).

3. G. H. Hardy and M. Riesz, *The general theory of Dirichlet series*, Cambridge Univ. Press (1952), 6–8 et 15–18.

4. A. E. Ingham, Math. Z. *41* (1936), 367–369.

5. J.-P. Kahane *Sur les séries de Dirichlet* $\sum_1^\infty \pm n^{-s}$, C. R. Acad. Sc. Paris *276* (1973), 739–742.

6. J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, (Hermann, Paris, 1963), p. 83.

7. J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Heath (1968), 36 et 55–57.

8. M. Loeve, *Probability theory* (Van Nostrand, New York, 1962), 457–458.

9. A. Ogg, *Modular forms and Dirichlet series* (Benjamin, New York, 1969), 46–47.

10. A. Renyi, *Calcul des probabilités* (Dunod, Paris, 1966), 362–364 et 389.

11. W. Rudin *Fourier analysis on groups* (Interscience Publ., New York, 1962) p. 224.

12. ——— *Real complex analysis* (McGraw Hill, New York, 1970) p. 293.

13. E. C. Titchmarsch, *The theory of the Riemann zêta function* (Clarendon Press, Oxford, 1951), 39–42 et 284.

Université de Paris-Sud,
Orsay, France

https://doi.org/10.4153/CJM-1980-041-7 Published online by Cambridge University Press