Compositio Math. 141 (2005) 344–358
DOI: 10.1112/S0010437X04000909

# Le groupe de Chow d'une surface rationnelle sur un corps local

Chandan Singh Dalawat

बापू ने भाबू री याद में

Abstract

We compute the Chow group of 0-cycles on a rational surface defined over a finite extension $K$ of the field $\mathbb{Q}_p$ of $p$-adic numbers ($p$ a prime) when it is split by an *unramified* extension of $K$. We use intersection theory to define a specialisation map so we need to assume that the surface admits a regular proper integral model. A family of examples is worked out to illustrate the method.

## 1. Introduction

Soient $p$ un nombre premier et $K$ une extension finie du corps $\mathbb{Q}_p$. Désignons par $\bar{K}$ une clôture algébrique de $K$, par $\widetilde{K}$ l'extension maximale non ramifiée de $K$ dans $\bar{K}$, par $\mathfrak{o}$ (respectivement $\tilde{\mathfrak{o}}$) l'anneau des entiers de $K$ (respectivement $\widetilde{K}$) et par $k$ (respectivement $\tilde{k}$) le corps résiduel de $K$ (respectivement $\widetilde{K}$).

Soit $X$ un $\mathfrak{o}$-schéma régulier, projectif et plat de dimension relative 2 dont la fibre générique $X_K = X \times_{\mathfrak{o}} K$ est *potentiellement birationnelle* au plan projectif $\mathbb{P}_2$ : on demande que la $\bar{K}$-surface $X_{\bar{K}} = X_K \times_K \bar{K}$ soit birationnelle à $\mathbb{P}_{2,\bar{K}}$ ; d'habitude, on dit alors que la surface $X_K$ est rationnelle.

Notons $A_0(X_K)$ le groupe de Chow des 0-cycles sur $X_K$ [Ful84] et $A_0(X_K)_0$ le sous-groupe noyau de l'homomorphisme degré $\deg : A_0(X_K) \to \mathbb{Z}$. Ces groupes ont été étudiés par Bloch [Blo81], par Colliot-Thélène et Sansuc [CS81] et par Colliot-Thélène [Col83]. On sait ainsi que le groupe $A_0(X_K)_0$ est fini et qu'il s'annule lorsque $X$ est lisse sur $\mathfrak{o}$ [Col83].

Dans cette note, on se propose de décrire un procédé pour calculer le groupe $A_0(X_K)$ lorsque l'application naturelle $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ (où $X_{\widetilde{K}} = X_K \times_K \widetilde{K}$) est un isomorphisme. Suivant une idée émise par Bloch [Blo83] et reprise dans [Dal93], ce but est atteint au § 7.

Décrivons ce procédé dans le cas où toutes les composantes irréductibles rendues réduites de la fibre fermée $X_k = X \times_{\mathfrak{o}} k$ de $X$ sont lisses sur $k$. Soit $S$ l'ensemble (fini) des composantes irréductibles (rendues réduites) de $X_{\tilde{k}}$ ; prolongeons l'action du groupe $\mathrm{Gal}(\tilde{k}|k)$ sur $S$ au $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}^S$ par linéarité. Notons $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$ le groupe des homomorphismes $\mathrm{Gal}(\tilde{k}|k)$-équivariants.

Pour une courbe $C$ tracée sur une composante irréductible $Y$ de $X_k$ et pour une composante irréductible (rendue réduite) $Z \in S$ de $X_{\tilde{k}}$, considérons le nombre

$$\deg_{\widetilde{C}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(Z)|_{\widetilde{C}}) \in \mathbb{Z}, \quad \text{où } \widetilde{X} = X \times_{\mathfrak{o}} \tilde{\mathfrak{o}} \text{ et } \widetilde{C} = C \times_k \tilde{k}. \tag{1}$$

Ces nombres induisent une application $\operatorname{Pic} Y \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$, à savoir celle qui envoie la classe de $C$ dans $\operatorname{Pic} Y$ sur l'homomorphisme $\mathbb{Z}^S \to \mathbb{Z}$ qui associe à $e_Z$ le nombre (1), où $(e_Z)_{Z \in S}$ est la

Received 17 February 2003, accepted in final form 12 November 2003, published online 10 February 2005.
*2000 Mathematics Subject Classification* 11G25 (primary), 14C15, 14G20, 14J26 (secondary).
*Keywords:* Chow groups, rational surfaces, local fields.

base canonique de $\mathbb{Z}^S$. En faisant varier $Y$, on obtient une application

$$\bigoplus_Y \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z}) \quad (Y: \text{ composantes irréductibles de } X_k). \tag{2}$$

Il est clair que le conoyau de (2) est aisément calculable dans des cas concrets: voir les exemples placés à la fin.

Nous allons construire un isomorphisme de $A_0(X_K)$ avec le conoyau de (2). Ce résultat fournit donc un moyen pratique pour calculer $A_0(X_K)$.

Décrivons brièvement le contenu de cette note. Sous la seule hypothèse que $X$ est un $\mathfrak{o}$-schéma régulier, projectif et plat de dimension relative 2 et de fibre générique absolument connexe, nous allons construire (§§ 3 et 4) une application, dite de *spécialisation*, de $A_0(X_K)$ vers un groupe plus général que le conoyau de (2) ; cette construction utilise la théorie de l'intersection. Au § 5, en se servant d'une variante du lemme de Hensel, on démontre que l'application de spécialisation est surjective ; ceci nous permet d'exhiber un quotient calculable du groupe $A_0(X_K)_0$ (théorème 1). Au § 6, nous comparons cette application avec l'homomorphism caractéristique de Bloch [Blo81] et de Colliot-Thélène et Sansuc [CS81]. Cette comparaison permet de combiner (§ 7) l'injectivité de l'application caractéristique, démontrée par Colliot-Thélène [Col83], avec la surjectivité de la spécialisation pour conclure que celle-ci est un isomorphisme (théorèmes 2 et 3) lorsque la fibre générique est potentiellement birationnelle à $\mathbb{P}_2$ et déployée par une extension non ramifiée du corps de base. Comme corollaire, on déduit (théorème 4) l'annulation du groupe $A_0(X_K)_0$ s'il y a bonne réduction. Si toutes les composantes irréductibles (rendues réduites) de la fibre fermée sont lisses, la spécialisation établie un isomorphisme de $A_0(X_K)$ avec le conoyau de (2) (théorème 5).

## 2. Notations et hypothèses

Les notations suivantes auront cours dans tout l'article :

| | |
|---|---|
| $p$ | un nombre premier, |
| $K$ | une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, |
| $\bar{K}$ | une clôture algébrique de $K$, |
| $\widetilde{K}$ | l'extension maximale non ramifiée de $K$ dans $\bar{K}$, |
| $\mathfrak{o}$ | l'anneau des entiers de $K$, |
| $\tilde{\mathfrak{o}}$ | l'anneau des entiers de $\widetilde{K}$, |
| $k$ | le corps résiduel de $K$, |
| $\tilde{k}$ | le corps résiduel de $\widetilde{K}$, |
| $X$ | un $\mathfrak{o}$-schéma régulier, projectif et plat de dimension relative 2, |
| $X_K$ | $= X \times_{\mathfrak{o}} K$, |
| $X_k$ | $= X \times_{\mathfrak{o}} k$, |
| $X_{\widetilde{K}}$ | $= X_K \times_K \widetilde{K}$, |
| $X_{\bar{K}}$ | $= X_K \times_K \bar{K}$, |
| $X_{\tilde{k}}$ | $= X_k \times_k \tilde{k}$, |
| $\widetilde{X}$ | $= X \times_{\mathfrak{o}} \tilde{\mathfrak{o}}$, |
| $j$ | l'immersion ouverte $X_K \to X$, |
| $i$ | l'immersion fermée $X_k \to X$, |
| $\pi$ | une uniformisante de $K$, |
| $v$ | la valuation normalisée $K^\times \to \mathbb{Z}$, |
| $\tilde{v}$ | le prolongement de $v$ à $\widetilde{K}^\times$, |
| $I$ | le groupe profini $\operatorname{Gal}(\bar{K}\vert\widetilde{K})$, |
| $S$ | le $\operatorname{Gal}(\tilde{k}\vert k)$-ensemble des composantes irréductibles de $X_{\tilde{k}}$. |



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

On suppose que $X_{\bar{K}}$ est intègre. Ce n'est qu'au § 7 que nous supposons que $X_{\bar{K}}$ est *birationnel* à $\mathbb{P}_2$ et que l'application $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ est un *isomorphisme* ; s'y rapporter pour les hypothèses précises, qui sont un peu plus générales.

## 3. Localisation et filtrations

Pour tout schéma $V$, désignons par $K_0(V)$ le groupe de Grothendieck des $\mathcal{O}_V$-modules cohérents, par $(K_0(V)^{(t)})_{t\geqslant 0}$ sa filtration décroissante par la codimension du support, par $K^0(V)$ l'anneau de Grothendieck des $\mathcal{O}_V$-modules cohérents localement libres, muni de la $\gamma$-filtration $(K^0(V)^{(t)})_{t\geqslant 0}$, par $\theta_V : K^0(V) \to K_0(V)$ l'homomorphisme canonique de $K^0(V)$-modules [Man69]. On a $\theta_V(K^0(V)^{(t)}) \subset K_0(V)^{(t)}$ pour $t \geqslant 0$ (voir [BGI71, p. 523]).

Lemme 1. *Les deux applications* $\theta_X^{(1)} : K^0(X)^{(1)} \to K_0(X)^{(1)}$ *et* $\theta_X^{(2)} : K^0(X)^{(2)} \to K_0(X)^{(2)}$ *induites par* $\theta_X$ *sont des isomorphismes.*

*Démonstration.* Comme $X$ est régulier et projectif sur $\mathfrak{o}$, l'homomorphisme $\theta_X$ est bijectif [Man69].

Le groupe $K_0(X)^{(1)}$ est engendré par les faisceaux structuraux $\mathcal{O}_V$ des fermés $V \subset X$ de codimension $\geqslant 1$ ; un tel faisceau admet une résolution

$$\{0\} \to \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_{n-1} \to \cdots \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \{0\} \tag{3}$$

par des $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}_t$ localement libres : l'homologie de ce complexe s'annule en degré $\neq 0$ et s'identifie à $\mathcal{O}_V$ en degré $0$ ; l'image de l'élément

$$x = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t [\mathcal{E}_t]$$

de $K^0(X)$ par $\theta_X$ vaut $[\mathcal{O}_V] \in K_0(X)$. Comme le complexe (3) est exact au point générique de $X$, on a $\operatorname{rg}(x) = 0$. Mais $K^0(X)^{(1)}$ est par définition le noyau de l'homomorphisme $\operatorname{rg} : K^0(X) \to \mathbb{Z}$ ; on a donc $x \in K^0(X)^{(1)}$ et l'on a établi la surjectivité de $\theta_X^{(1)}$.

Pour ce qui concerne le cran 2 de la filtration, considérons la composée

$$\operatorname{Pic} X \to \frac{K^0(X)^{(1)}}{K^0(X)^{(2)}} \to \frac{K_0(X)^{(1)}}{K_0(X)^{(2)}} \tag{4}$$

dans laquelle la première flèche est l'isomorphisme [Man69] qui envoie la classe de $\mathcal{L}$ dans $\operatorname{Pic} X$ sur $[\mathcal{O}_X] - [\mathcal{L}^{-1}] \in K^0(X)^{(1)}/K^0(X)^{(2)}$, quel que soit le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{L}$ ; la seconde flèche est induite par ce qui précède. On sait que la composée (4) est un isomorphisme [Man69, p. 45] ; il en est donc de même de $\theta_X^{(2)} : K^0(X)^{(2)} \to K_0(X)^{(2)}$, ce qu'il fallait démontrer. □

L'immersion fermée $i : X_k \to X$ (respectivement l'immersion ouverte $j : X_K \to X$) induit l'homomorphisme d'image directe $i_* : K_0(X_k) \to K_0(X)$ (respectivement de restriction $j^* : K_0(X) \to K_0(X_K)$) qui augmente la filtration par un cran (respectivement qui respecte la filtration).

On note $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation normalisée de $K$ et $\pi$ une uniformisante de $K$ ; on a $v(\pi) = 1$.

Lemme 2. *Les immersions* $i$ *et* $j$ *induisent une suite exacte*

$$K_0(X_k)^{(1)} \xrightarrow{i_*} K_0(X)^{(2)} \xrightarrow{j^*} K_0(X_K)^{(2)} \to \{0\}. \tag{5}$$

*Démonstration.* Grâce à l'exactitude de la suite de localisation [BS58, proposition 7]

$$K_0(X_k) \to K_0(X) \to K_0(X_K) \to \{0\}, \tag{6}$$

il est clair que (5) est un complexe et que $j^*$ est surjectif ; il reste à faire voir que $i_*(K_0(X_k)^{(1)})$ contient $\operatorname{Ker}(j^*)$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(j^*)$ ; par l'exactitude de (3), il existe un $y \in K_0(X_k)$ tel que $i_*(y) = x$.



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

On peut écrire $y = y_0 + y_1$ où $y_0$ est l'image d'un cycle $\xi$ de codimension 0 dans $X_k$ et où $y_1 \in K_0(X_k)^{(1)}$ (voir [BGI71, p. 519]). Comme $i_*(y_0) = x - i_*(y_1)$ appartient à $K_0(X)^{(2)}$, l'image de $i_*(y_0)$ dans $\mathrm{Pic}(X)$ par l'isomorphisme réciproque de (4) est nulle : le cycle $\xi$ est un diviseur principal sur $X$.

Écrivons alors $\xi = \mathrm{div}_X(f)$, où $f \in K(X)^\times$ ; on a $\mathrm{div}_{X_K}(f) = 0$ et, comme $X_{\bar K}$ est projectif et intègre, $f \in K^\times$. Ainsi, $\xi = v(f)\,\mathrm{div}_X(\pi)$. En prenant les classes dans $K_0(X_k)$, on a $y_0 = v(f)[\mathcal{O}_{X_k}] + z_1$ pour $z_1 \in K_0(X_k)^{(1)}$ (voir [BGI71, p. 520]). Ainsi $x = v(f)[\mathcal{O}_{X_k}] + i_*(y_1 + z_1)$. Mais on a $[\mathcal{O}_{X_k}] = 0$ dans $K_0(X)$ à cause de l'exactitude de la suite

$$\{0\} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_k} \to \{0\}.$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}(j^*) \subset \mathrm{Im}(i_*)$ et établit par là l'exactitude de (5). □

## 4. L'homomorphisme de spécialisation

Soit $i_Y : Y \to X$ un diviseur effectif à support dans $X_k$. On désigne par $i_Y^\star$ la composée

$$K_0(X) \xrightarrow[\sim]{\theta_X^{-1}} K^0(X) \xrightarrow{i_Y^*} K^0(Y) \xrightarrow{\theta_Y} K_0(Y) \tag{7}$$

('homomorphisme de spécialisation'). La flèche composée $i_Y^\star$ (voir (7)) de spécialisation est à distinguer de la flèche médiane $i_Y^* : K^0(X) \to K^0(Y)$. Lorsque $Y = X_k$, on abrège $i_{X_k}^\star$ simplement en $i^\star$.

Lemme 3. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Dans le groupe $K_0(Y)$, on a*

$$i_Y^\star([\mathcal{F}]) = \sum_{t \geqslant 0} (-1)^t [\mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)]. \tag{8}$$

*Démonstration.* Soit (3) une résolution de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}_t$ localement libres ; on a

$$i_Y^\star([\mathcal{F}]) = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t [\mathcal{E}_t \otimes \mathcal{O}_Y],$$

ce qui implique (8) car les faisceaux $\mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y)$ sont les groupes d'homologie du complexe $(\mathcal{E}_t \otimes \mathcal{O}_Y)_t$. □

Lemme 4. *Notant $\mathcal{I}$ l'idéal inversible définissant $Y$ dans $X$ et $\mathcal{N} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ son faisceau conormal,*

$$i_Y^\star i_{Y*}(x) = ([\mathcal{O}_Y] - [\mathcal{N}]).x \quad (x \in K_0(Y)). \tag{9}$$

*Démonstration.* D'après (8) et par linéarité, il suffit de montrer que pour tout $\mathcal{O}_Y$-module cohérent $\mathcal{F}$, on a

$$\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) = \{0\} \text{ pour } t \geqslant 2. \tag{10}$$

À la suite exacte tautologique $\{0\} \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to \{0\}$ est associée la suite exacte bornée à droite

$$\cdots \to \mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) \to \mathcal{T}or_{t-1}^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \to \cdots. \tag{11}$$

Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{I}$ étant inversible, $\mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = \{0\}$ et $\mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = \{0\}$ pour $t \geqslant 1$, ce qui donne la seconde égalité (10). D'autre part, tensorisant la suite tautologique avec $\mathcal{I}$, on obtient l'isomorphisme $\mathcal{N} \to \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ qui, joint à l'isomorphisme $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Y) \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{I}$ dans (11), implique la première égalité (10). □

Lemme 5. *On a $i^\star \circ i_* = 0$. Il existe un homomorphisme et un seul $\sigma : K_0(X_K) \to K_0(X_k)$ tel que $i^\star = \sigma \circ j^*$.*



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

*Démonstration.* Appliquons (9) avec $Y = X_k$ ; comme le $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{I} = \pi\mathcal{O}_X$ est alors libre, il en va de même du $\mathcal{O}_Y$-module inversible $\mathcal{N} = \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ et par conséquent $[\mathcal{O}_Y] - [\mathcal{N}] = 0$. L'existence et l'unicité de $\sigma$ en résultent, compte tenu de l'exactitude de (6). □

Lemme 6. *La spécialisation $i_Y^\star = \theta_Y \circ i_Y^* \circ \theta_X^{-1}$ (voir (7)) respecte la filtration.*

*Démonstration.* Clairement $i_Y^*$ respecte le cran 1 de la filtration puisqu'il préserve les rangs ; il respecte le cran 2 à cause de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & K^0(X)^{(2)} \arrow[r] & K^0(X)^{(1)} \arrow[r, "\det_X"] \arrow[d, "i_Y^*"'] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_Y^*"'] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & K^0(Y)^{(2)} \arrow[r] & K^0(Y)^{(1)} \arrow[r, "\det_Y"] & \mathrm{Pic}(Y) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes puisque $Y$ est localement d'intersection complète dans $X$ régulier [Man69, p. 45]. Vu le lemme 1, ceci implique que $i_Y^\star$ respecte les crans 1 et 2 de la filtration.

Reste à faire voir que $i_Y^\star(K_0(X)^{(3)}) = 0$. Soient $P \in X$ un point de codimension 3 et $x \in K_0(X)^{(3)}$ sa classe. Si $P \notin Y$, on a $i_Y^\star(x) = 0$. Si $P \in Y$, soit $y \in K_0(Y)$ sa classe. D'après (9), on a $i_Y^\star(x) = ([\mathcal{O}_Y] - [\mathcal{N}]).y$ où $\mathcal{N}$ est le faisceau conormal de $Y$ dans $X$. Or $[\mathcal{O}_Y] - [\mathcal{N}]$ appartient à $K^0(Y)^{(1)}$ car son rang est nul et $y$ appartient à $K_0(Y)^{(2)}$ donc $i_Y^\star(x)$ appartient à $K_0(Y)^{(3)} = \{0\}$ (voir [BGI71, p. 523]), ce qu'il fallait démontrer. □

Soit $Y$ une composante irréductible de $X_k$. Notons $\check{Y}$ le schéma réduit associé à $Y$ et $m_Y$ la multiplicité de $\check{Y}$ dans $X_k$. Nous allons considérer $Y$ comme un *sous-schéma fermé* de $X_k$, défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}^{\otimes m_Y}$, où $\mathcal{I}$ est le faisceau d'idéaux définissant $\check{Y}$ dans $X_k$. Notons $r_Y$, $g_Y$, $f_Y$ les morphismes canoniques suivants :

$$r_Y : \check{Y} \to Y, \quad g_Y : \check{Y} \to X_k, \quad f_Y : Y \to X_k. \tag{12}$$

Lemme 7. *On a $i_Y^\star = (m_Y r_{Y*}) \circ i_{\check{Y}}^\star : K_0(X)^{(2)} \to K_0(Y)^{(2)}$.*

*Démonstration.* Écrivons la formule de projection pour $r_Y : \check{Y} \to Y$

$$r_{Y*}(r_Y^*(y).x) = y.r_{Y*}(x) \quad (x \in K_0(\check{Y}),\ y \in K^0(Y)) \tag{13}$$

(voir [BGI71, p. 287]). Prenons $x = [\mathcal{O}_{\check{Y}}]$ et $y = i_Y^* \circ \theta_X^{-1}(z)$ avec $z \in K_0(X)$. On a alors $r_Y^*(y).x = i_{\check{Y}}^\star(z)$ et $\theta_Y(y) = y.[\mathcal{O}_Y] = i_Y^\star(z)$. Multiplions (13) par $m_Y$ :

$$m_Y r_{Y*}(i_{\check{Y}}^\star(z)) = i_Y^\star(z) - y.([\mathcal{O}_Y] - m_Y r_{Y*}[\mathcal{O}_{\check{Y}}]).$$

Si $z \in K_0(X)^{(2)}$, on a $y \in K^0(Y)^{(2)}$ (lemme 1) et la définition de la multiplicité $m_Y$ implique que $[\mathcal{O}_Y] - m_Y r_{Y*}[\mathcal{O}_{\check{Y}}] \in K_0(Y)^{(1)}$ (voir [BGI71, p. 519]), donc $y.([\mathcal{O}_Y] - m_Y r_{Y*}[\mathcal{O}_{\check{Y}}]) \in K_0(Y)^{(3)} = \{0\}$ (voir [BGI71, p. 523]), d'où le lemme. □

Lemme 8. *L'application $i^\star : K_0(X)^{(2)} \to K_0(X_k)^{(2)}$ (lemme 6) coïncide avec la composée*

$$K_0(X)^{(2)} \xrightarrow{(i_Y^\star)_Y} \bigoplus_Y K_0(Y)^{(2)} \xrightarrow{\sum_Y f_{Y*}} K_0(X_k)^{(2)}$$

*et aussi avec la composée $(\sum_Y m_Y g_{Y*}) \circ (i_{\check{Y}}^\star)_Y$, où $Y$ parcourt les composantes irréductibles de $X_k$.*

*Démonstration.* Elle est identique à celle du lemme 7, à cela près qu'ici on se sert du fait que $[\mathcal{O}_{X_k}] - \sum_Y f_{Y_*}([\mathcal{O}_Y]) \in K_0(X_k)^{(1)}$ (cf. [BGI71, p. 519]). □

Pour tout diviseur effectif $Y$ de $X$ à support dans $X_k$, on note $\chi_Y : K_0(Y)^{(2)} \to \mathbb{Z}$ la caractéristique d'Euler–Poincaré. Lorsque $Y = X_k$, on abrège $\chi_{X_k}$ simplement en $\chi$.



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

Lemme 9. *Pour tout $x \in K_0(X)^{(2)}$ (respectivement tout $y \in K_0(X_k)^{(1)}$), on a*

$$\chi(i^\star(x)) = \sum_Y m_Y \chi_{\check{Y}}(i^\star_{\check{Y}}(x)) \quad \left(\text{respectivement } \sum_Y m_Y \chi_{\check{Y}}(i^\star_{\check{Y}} \circ i_*(y)) = 0\right)$$

*dans $\mathbb{Z}$, où $Y$ parcourt les composantes irréductibles de $X_k$.*

*Démonstration.* Vu que $\chi(\sum_Y m_Y g_{Y*}) = \sum_Y m_Y \chi_{\check{Y}}$, la première assertion résulte du lemme 8. La deuxième suit en prenant $x = i_*(y)$, vu le lemme 5. □

Puisque l'extension $\widetilde{K}|K$ est non ramifiée, le schéma $\widetilde{X}$ est régulier et *tout ce qui précède s'applique à $\widetilde{X}$ sur $\tilde{\mathfrak{o}}$*; ce fait sera utilisé par la suite sans y faire allusion.

Désignons par $(e_Z)_{Z\in S}$ la base canonique du $\mathbb{Z}$-module libre $\mathbb{Z}^S$, où $S$ est l'ensemble des composantes irréductibles rendues réduites de $X_{\tilde{k}}$. Soit $P$ l'élément $\sum_{Z\in S} m_Z e_Z$ (où $m_Z$ est la multiplicité de $Z$ dans $X_{\tilde{k}}$) de $\mathbb{Z}^S$ et soit $\xi : \mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ l'homomorphisme $h \longmapsto h(P)$.

Notant $x \mapsto \tilde{x}$ l'application $K_0(X)^{(2)} \to K_0(\widetilde{X})^{(2)}$, on dispose des homomorphismes

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : K_0(\widetilde{X})^{(2)} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z}), \quad & \tilde{\psi}(x)(e_Z) = \chi_Z(i^\star_Z(x)), \\ \psi : K_0(X)^{(2)} \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z}), \quad & \psi(x)(e_Z) = \chi_Z(i^\star_Z(\tilde{x})). \end{aligned} \tag{14}$$

Le quotient $B(X)$ de $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$ par $\psi(i_*(K_0(X_k)^{(1)}))$ joue un rôle important dans la suite.

Lemme 10. *Pour tout $x \in K_0(X_k)^{(1)}$, on a $\xi(\psi(i_*(x))) = 0$.*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le lemme 9 à $\widetilde{X}$. □

D'après le lemme 10, il y a un homomorphisme et un seul $\overline{\xi} : B(X) \to \mathbb{Z}$ qui induit $\xi$ sur $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$ ; nous allons désigner le noyau de $\overline{\xi}$ par $B(X)_0$.

On note $T$ le quotient de $\mathbb{Z}^S$ par le sous-groupe engendré par $P$ ; il est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\tilde{k}|k)$ ; $\mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{Z})$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$.

Lemme 11. *On a $\psi(i_*(K_0(X_k)^{(1)})) \subset \mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{Z})$ ; le quotient vaut $B(X)_0 = \mathrm{Ker}(\overline{\xi} : B(X) \to \mathbb{Z})$.*

*Démonstration.* Cela résulte (lemme 10) de ce que $\mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}(\xi : \mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z})$. □

## 5. La surjectivité de la spécialisation

Soit $Y$ une composante irréductible de $X_k$ et soit $K' \subset \widetilde{K}$ une extension finie de $K$ telle que toutes les composantes irréductibles de $Y_{\tilde{k}}$ soient définissables sur $k'$, le corps résiduel de $K'$. On note $\mathfrak{o}'$ l'anneau des entiers de $K'$ et l'on pose $X' = X \times_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}'$.

Soit $Z$ une composante irréductible (rendue réduite) de $Y_{k'}$ et soit $m$ sa multiplicité. Les deux lemmes suivants sont adaptés de [BLR90, pp. 240–242].

Lemme 12. *Il y a un ouvert dense $U \subset Z$ tel que pour toute extension finie $l$ de $k'$ et pour tout point $x \in U(l)$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Z_l,x}$ admet un système de paramètres $(f_1, f_2)$ vérifiant $\dim_l \mathcal{O}_{Z_l,x}/(f) = m$.*

*Démonstration.* Partons d'un ouvert dense $U \subset Z$ tel que le schéma réduit $\check{U}$ soit lisse sur $k'$, de sorte que le $\mathcal{O}_{\check{U}}$-module $\Omega_{\check{U}|k'}$ est localement libre. Remplaçant $U$ par un ouvert dense, on peut supposer que le $\mathcal{O}_{\check{U}}$-module $\Omega_{\check{U}|k'}$ est libre. Comme $\Omega_{\check{U}|k'}$ est un quotient de $\Omega_{U|k'}$, on peut trouver $f_1, f_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ tels que les images des différentielles $df_1, df_2$ dans $\Omega_{\check{U}|k'}$ forment une base de ce module. La restriction du morphisme

$$f = (f_1, f_2) : U \to V, \quad V = \mathbb{A}^2_{k'}$$

au schéma réduit $\check{U}$ étant étale, on peut supposer que $f$ est fini et plat, quitte à remplacer $U$ et $V$ par des ouverts denses. Montrons que $U$ convient. Soient $l$ une extension finie et $x \in U(l)$ un point $l$-rationnel ; on peut supposer que $f_l(x)$ est l'origine de $V_l = V \times_{k'} l$. Soit ${}^hV_l$ le hensélisé de $V_l$ à l'origine et soit ${}^hU_l$ la composante locale de $U_l \times_{V_l} {}^hV_l$ au-dessus de $x$. Le morphisme induit ${}^h\check{f}_l : {}^h\check{U}_l \to {}^hV_l$ étant un isomorphisme, le degré de ${}^hf_l$ vaut la longueur $m$ de l'anneau local du point générique de ${}^hU_l$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Nous utilisons la variante suivante du lemme classique de Hensel.

Lemme 13. *Il y a un ouvert dense $U \subset Z$ tel que pour toute extension finie $l \subset \tilde{k}$ de $k'$, tout point $l$-rationnel $x \in U_l(l)$ se relève : il existe un $\mathfrak{O}$-schéma $C$ plat et fini de rang $m$ et une $\mathfrak{O}$-immersion fermée $a : C \to X_{\mathfrak{O}}$ tels que $a_l(C_l) = x$, où $\mathfrak{O}$ est l'anneau des entiers de l'extension $L \subset \widetilde{K}$ de corps résiduel $l$.*

*Démonstration.* Soit $W$ un ouvert de $X'$ tel que $W_{k'}$ soit un ouvert dense de $Z$. Nous dirons d'un énoncé qu'il est vrai 'au rétrécissement de $W$ près' pour signifier qu'il est vrai en remplaçant $W$ par un ouvert $O \subset W$ tel que $O_{k'}$ soit dense dans $Z$. Au rétrécissement de $W$ près, pour toute extension finie $l \subset \tilde{k}$ de $k'$ et pour tout point $x \in U(l)$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Z_l,x}$ admet un système de paramètres $\bar{f}$ tel que $\dim_l \mathcal{O}_{Z_l,x}/(\bar{f}) = m$ (lemme 12). Au rétrécissement de $W$ près, $\bar{f}$ se relève en une suite $f$ d'éléments de $\Gamma(W_{\mathfrak{O}}, \mathcal{O}_{W_{\mathfrak{O}}})$ ; c'est une suite régulière de $\mathcal{O}_{W_{\mathfrak{O}},x}$ [GD64, $0_{\mathrm{IV}}$, 15.1.16]. Au rétrécissement de $W$ près, une composante locale $C$ de $V(f)$ contenant $x$ est finie et plate sur $\mathfrak{O}$ ; ce $C$ convient [GD64, $0_{\mathrm{IV}}$, 15.1.16]. $\square$

Lemme 14. *Il y a un ouvert dense $U \subset Z$ tel que tout point fermé $x \in U$ se relève : il existe un $\mathfrak{o}'$-schéma $C$ plat et fini de rang $m \deg(x)$ et une $\mathfrak{o}'$-immersion fermée $C \to X'$ tel que $C_{k'} = x$.*

*Démonstration.* Montrons qu'un ouvert $U \subset Z$ fourni par le lemme 13 convient. Soit $x \in U$ un point fermé. Identifions le corps résiduel $k'(x)$ à $l \subset \tilde{k}$ et choisissons un point $l$-rationnel $y$ de $U_l$ au-dessus de $x$. Il existe un $\mathfrak{O}$-schéma (où $\mathfrak{O}$ est l'anneau des entiers de l'extension $L \subset \widetilde{K}$ de corps résiduel $l$) plat et fini de rang $m$ et une $\mathfrak{O}$-immersion fermée $a : C \to X_{\mathfrak{O}}$ tels que $a_l(C_l) = y$ (lemme 13). Or $C$ est un $\mathfrak{o}'$-schéma fini et plat de rang $m \deg(x)$ et la composée $C \to X_{\mathfrak{O}} \to X'$ une $\mathfrak{o}'$-immersion $C \to X'$ telles que $C_{k'} = x$. $\square$

Proposition 1. *L'application $\psi : K_0(X)^{(2)} \to \mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$ (14) est surjective.*

*Démonstration.* Notons $(b_Y)_Y$ la base canonique de $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$, indexée par les composantes irréductibles de $X_k$ : pour $Z \in S$, on a $b_Y(e_Z) = 1$ si $Z$ est une composante irréductible de $Y_{\tilde{k}}$ et $b_Y(e_Z) = 0$ sinon. Soit $Y$ une composante irréductible de $X_k$ et soit $Z$ une composante irréductible de $Y_{k'}$ ($k'|k$ est une extension finie – corps résiduel de $K' \subset \widetilde{K}$ – où toutes les composantes irréductible de $Y_{\tilde{k}}$ sont définissables) ; soit $H \subset \mathrm{Gal}(k'|k)$ le stabilisateur de $Z$. Tout ouvert dense de $Z$ possède un 0-cycle $H$-stable de degré 1 (Lang–Weil) ; prenons-en un qui se relève en un 1-cycle $H$-stable $C$ de $X' = X \times_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}'$, où $\mathfrak{o}'$ est l'anneau des entiers de $K'$ (lemme 14). Pour un conjugué ${}^\tau Z$ ($\tau \in \mathrm{Gal}(k'|k)/H$) de $Z$, posons $C_\tau = {}^\tau C$. Alors

$$C_Y = \sum_\tau C_\tau, \quad \tau \in \mathrm{Gal}(k'|k)/H$$

est un 1-cycle de $X'$ stable par $\mathrm{Gal}(k'|k)$ et qui provient donc d'un 1-cycle de $X$ ; soit $y \in K_0(X)^{(2)}$ sa classe. Comme $\psi(y) = b_Y$, on a gagné. $\square$

Le groupe $K_0(X_K)^{(2)}$ s'identifie à $A_0(X_K)$ et le noyau de $\chi_{X_K}$ au noyau $A_0(X_K)_0$ de l'application degré $\deg : A_0(X_K) \to \mathbb{Z}$.

Proposition 2. *Avec ces notations, il existe un unique homomorphisme*

$$\gamma : A_0(X_K) \to B(X) = \frac{\mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})}{\psi(i_*(K_0(X_k)^{(1)}))} \tag{15}$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

*tel que, pour tout $y \in K_0(X)^{(2)}$, la classe de $\psi(y) \in \mathrm{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$ (voir (14)) dans $B(X)$ soit égale à $\gamma(j^*(y))$ ; cet homomorphisme est surjectif.*

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de $\gamma$ résultent aussitôt de la définition (14) de $\psi$ et de l'exactitude de la suite (5) ; la surjectivité de $\gamma$ résulte de la proposition 1. □

Lemme 15. *Pour tout $x \in A_0(X_K)$, on a $\deg(x) = \overline{\xi}(\gamma(x))$.*

*Démonstration.* Soit $y \in K(X)^{(2)}$ un relèvement de $x$. Nous avons

$$\begin{aligned}\overline{\xi}(\gamma(x)) &= \psi(y)(P)\\ &= \sum_{Z\in S} m_Z \chi_Z(i_Z^\star(\tilde{y}))\\ &= \chi_{X_k}(i^\star(y)) \quad \text{(lemme 9)}\\ &= \chi_{X_K}(x) \quad \text{([BGI71, p. 563])}.\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

Grâce au lemme 15 (cf. lemme 11), $\gamma$ définit un homomorphisme

$$\gamma_0 : A_0(X_K)_0 \to B(X)_0 = \frac{\mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{Z})}{\psi(i_*(K_0(X_k)^{(1)}))}. \tag{16}$$

Théorème 1. *Soit $X$ un $\mathfrak{o}$-schéma régulier, projectif et plat de dimension relative 2 dont la fibre générique $X_K$ est absolument connexe. L'application de spécialisation $\gamma_0$ (voir (16)) est alors surjective.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la proposition 2. □

Le rapporteur remarque qu'il serait intéressant de comparer le quotient $B(X)_0$ de $A_0(X_K)_0$ avec le quotient étudié par Colliot-Thélène et Saito [CS96, corollaire 2.6].

## 6. Comparaison avec l'application caractéristique

Nous allons noter $\mathcal{Z}^t(V)$ le groupe des cycles de codimension $t$ sur un schéma $V$. La valuation canonique de $\widetilde{K}$ est notée $\tilde{v}$.

Lemme 16. *Le noyau de la composée $\mathbb{Z}^S \to \mathcal{Z}^1(\widetilde{X}) \to \mathrm{Pic}\,\widetilde{X}$ est engendré par $P = \mathrm{div}_{\widetilde{X}}(\pi)$ ; son conoyau s'identifie à $\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}$ : on a la suite exacte*

$$\{0\} \to T \to \mathrm{Pic}\,\widetilde{X} \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}} \to \{0\}. \tag{17}$$

*Démonstration.* C'est une petite chasse au diagramme. On se sert du fait que les seules fonctions inversibles sur $\widetilde{X}$ (respectivement $X_{\widetilde{K}}$) sont $\tilde{\mathfrak{o}}^\times$ (respectivement $\widetilde{K}^\times$). □

À la suite exacte (17) de $\mathrm{Gal}(\tilde{k}|k)$-modules est associée la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Pic}\,\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_k(\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z}). \tag{18}$$

Lemme 17. *Pour tout $x \in K_0(X_k)^{(1)}$, l'on a $\delta(\psi(i_*(x))) = 0$ : il existe un unique homomorphisme $\overline{\delta} : B(X)_0 \to \mathrm{Ext}^1_k(\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z})$ qui induit $\delta$ (voir (18)) sur $\mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{Z})$.*

*Démonstration.* D'après l'exactitude de la suite (18), il suffit de montrer la commutativité du carré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}^1(X_k) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(X_k)^{(1)} \arrow[d, "\psi\circ i_*"] \\ \mathrm{Hom}_k(\mathrm{Pic}\,\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_k(T, \mathbb{Z}) \end{tikzcd} \tag{19}$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

dans lequel la verticale de gauche est l'homomorphisme qui à une courbe irréductible $C \in X_k^{(1)}$ tracée sur $X_k$ fait correspondre la composée

$$\operatorname{Pic} \widetilde{X} \to \operatorname{Pic} \widetilde{C} \xrightarrow{\deg_{\widetilde{C}}} \mathbb{Z}, \quad \text{où } \widetilde{C} = C \times_k \tilde{k}$$

et où $\deg_{\widetilde{C}}$ désigne le 'degré total'. Montrons plus généralement que pour une courbe irréductible $D \in X_{\tilde{k}}^{(1)}$ (de classe $[\mathcal{O}_D] \in K_0(\widetilde{X})$) et une composante irréductible $Z \in X_{\tilde{k}}^{(0)}$, on a

$$\chi_Z i_Z^\star([\mathcal{O}_D]) = \deg_D(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(Z)|_D). \tag{20}$$

Tensorisant la suite exacte $\{0\} \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-Z) \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \to \mathcal{O}_Z \to \{0\}$ de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$-modules cohérents avec $\mathcal{O}_D$, on obtient la suite exacte

$$\{0\} \to \mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_Z) \to \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-Z)|_D \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z \to \{0\} \tag{21}$$

dans laquelle les $\mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Z)$ s'annulent pour $t \geqslant 2$ parce que les $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$-modules $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ et $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-Z)$ sont localement libres. Il vient

$$\begin{aligned} \chi_Z i_Z^\star([\mathcal{O}_D]) &= \chi_Z(\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z) - \chi_Z(\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_Z)) \quad (\text{lemme } 3) \\ &= \chi_D(\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z) - \chi_D(\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_Z)) \\ &= \chi_D(\mathcal{O}_D) - \chi_D(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(-Z)|_D) \quad (\text{d'après } (21)) \\ &= \deg_D(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(Z)|_D) \quad (\text{cf. [BLR90, p. 238, théorème 1]}) \end{aligned}$$

ce qui établit (20) et par là la commutativité de (19). □

Soient $\operatorname{Spec} L \to X_{\widetilde{K}}$ un point fermé de $X_{\widetilde{K}}$ (d'image $Q \in X_{\widetilde{K}}$), $u : \operatorname{Spec} \mathfrak{O} \to \widetilde{X}$ (d'image $C$, l'adhérence schématique de $Q$ dans $\widetilde{X}$) son prolongement au spectre de l'anneau des entiers $\mathfrak{O}$ de $L$ ; le corps de fonctions sur $C$ s'identifie à $L$. Soient $Z$ une composante irréductible (rendue réduite) de $X_{\tilde{k}}$ et $f$ une équation locale du diviseur $Z$ de $\widetilde{X}$ sur un ouvert affine $\operatorname{Spec} A \subset \widetilde{X}$ contenant $C$.

Lemme 18. *On a* $\chi_Z i_Z^\star([\mathcal{O}_C]) = w(u^*(f))$ *où* $w : L^\times \to \mathbb{Z}$ *est la valuation normalisée de* $L$.

*Démonstration.* L'image $u^*(f)$ de $f \in A$ dans l'anneau quotient $B = \Gamma(C, \mathcal{O}_C)$ correspondant à $C$ n'est pas diviseur de zéro puisque ce dernier est intègre, vu qu'il possède le point générique $u(\operatorname{Spec} L)$, et puisque $u^*(f)$ est non nul, $C$ n'étant pas contenu dans $Z$. Il en résulte que $\mathcal{T}or_t^{\mathcal{O}_{\tilde{X}}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Z) = 0$ pour $t \geqslant 1$ (cf. [Man69, p. 9, théorème 2.3]), et le lemme 3 implique alors que

$$\chi_Z i_Z^\star([\mathcal{O}_C]) = \chi_Z([\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z]).$$

Le faisceau $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z$ ayant son support dans $C \cap Z$ et ce dernier étant de dimension $\leqslant 0$, on a $H^t(Z, \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z) = 0$ pour $t \geqslant 1$, de sorte que

$$\begin{aligned} \chi_Z(\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z) &= \operatorname{long} H^0(Z, \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{X}}} \mathcal{O}_Z) \\ &= \operatorname{long} B/u^*(f)B. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $w(u^*(f)) = \operatorname{long} \mathfrak{O}/u^*(f)\mathfrak{O}$ et il reste à faire voir que $B/u^*(f)B$ et $\mathfrak{O}/u^*(f)\mathfrak{O}$ ont la même longueur. Cela résulte aussitôt du diagramme commutatif de $B$-modules

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "u^*(f)"] & \mathfrak{O} \arrow[r] \arrow[d, "u^*(f)"] & R \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & B \arrow[r] & \mathfrak{O} \arrow[r] & R \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

($R$ étant le $B$-module quotient $\mathfrak{O}/B$) qui donne la suite exacte

$$\{0\} \to {}_{\bar{f}}R \to B/u^*(f)B \to \mathfrak{O}/u^*(f)\mathfrak{O} \to R/\bar{f}R \to \{0\}$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

($u^*(f)$ n'étant point diviseur de zéro) : on a $\operatorname{long}{}_{\bar f}R = \operatorname{long} R/\bar f R$ par l'exactitude de la suite

$$\{0\} \to {}_{\bar f}R \to R \xrightarrow{\bar f} R \to R/\bar f R \to \{0\}$$

donc $\operatorname{long} B/u^*(f)B = \operatorname{long} \mathfrak{O}/u^*(f)\mathfrak{O}$, démontrant le lemme. □

Notons $\widetilde{A}$ l'anneau local de $X_{\widetilde{K}}$ le long de $Q$, $\alpha : \widetilde{A}^\times \to \mathbb{Z}^S$ l'homomorphisme $g \mapsto \operatorname{pr} \circ \operatorname{div}_{\widetilde{X}}(g)$ où pr est la projection $\mathcal{Z}^1(\widetilde{X}) \to \mathbb{Z}^S$, $N : L^\times \to \widetilde{K}^\times$ l'homomorphisme 'norme' et $\text{év} : \widetilde{A}^\times \to \widetilde{K}^\times$ l'application d'évaluation en $Q$ (on a $\text{év}(g) = N(u^*(g))$ pour tout $g \in \widetilde{A}^\times$).

Lemme 19. *On a $\tilde v \circ \text{év} = \tilde\psi([\mathcal{O}_C]) \circ \alpha$ en tant qu'applications $\widetilde{A}^\times \to \mathbb{Z}$.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer le cas d'une équation locale $f \in \widetilde{A}^\times$ d'une composante irréductible $Z$ de $X_{\tilde k}$ ($\alpha(f) = e_Z$). Il vient alors

$$\begin{aligned}
\tilde v \circ \text{év}(f) &= \tilde v \circ N \circ u^*(f) \quad (\text{év} = N \circ u^*)\\
&= w(u^*(f)) \quad (w = \tilde v \circ N)\\
&= \chi_Z i_Z^\star([\mathcal{O}_C]) \quad (\text{lemme } 18)\\
&= \tilde\psi([\mathcal{O}_C])(e_Z) \quad (\text{d'après } (14))\\
&= \tilde\psi([\mathcal{O}_C]) \circ \alpha(f).
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

Soit $c$ un 0-cycle sur $X_{\widetilde{K}}$, $\widetilde{A}$ l'anneau semi-local de $X_{\widetilde{K}}$ le long de $c$ et $\text{év} : \widetilde{A}^\times \to \widetilde{K}^\times$ l'application d'évaluation en $c$ (en écrivant $c = \sum_Q n_Q Q$ où $Q$ parcourt les points fermés de $X_{\widetilde{K}}$ et où les $n_Q \in \mathbb{Z}$ sont presque tous nuls, on a $\text{év}(g) = \prod_Q \text{év}(Q)^{n_Q}$). Soit $C_Q$ l'adhérence schématique de $Q$ dans $\widetilde{X}$ et posons $y = \sum_Q n_Q[\mathcal{O}_{C_Q}]$ dans $K_0(\widetilde{X})^{(2)}$.

Lemme 20. *On a $\tilde\psi(y) \circ \alpha = \tilde v \circ \text{év}$ en tant qu'applications $\widetilde{A}^\times \to \mathbb{Z}$.*

*Démonstration.* Cela résulte du lemme 19 (qui en est le cas particulier où $c$ est réduit à un point fermé) par multiplicativité. □

Supposons de plus que $\deg c = 0$. Alors $\text{év}(\widetilde{K}^\times) = \{1\}$ et $\alpha(\pi) = P$, donc év induit $\text{év}_0 : \widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to \widetilde{K}^\times$ et $\alpha$ induit $\alpha_0 : \widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to T$, par passage aux quotients. De plus, l'élément $\tilde\psi(y)$ de $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$ appartient à $\operatorname{Hom}(T, \mathbb{Z})$ (cf. lemme 11).

Lemme 21. *On a $\tilde\psi(y) \circ \alpha_0 = \tilde v \circ \text{év}_0 : \widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to \mathbb{Z}$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du lemme 20. □

Soit $c$ un 0-cycle de degré 0 sur $X_K$, notons $y \in K_0(X)^{(2)}$ la classe de son adhérence schématique dans $X$ et appliquons ce qui précède à $\tilde c$, le 0-cycle sur $X_{\widetilde{K}}$ obtenu à partir de $c$ par changement de base.

Lemme 22. *On a $\psi(y) \circ \alpha_0 = \tilde v \circ \text{év}_0 : \widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to \mathbb{Z}$.*

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier du lemme 21. □

Soient $U \subset X_K$ l'ouvert complémentaire du support $\operatorname{Supp}(c)$ de $c$ et $\widetilde{U} = U \times_K \widetilde{K}$. Notons $\operatorname{cl}_{\widetilde{X}} : \mathcal{Z}^1(\widetilde{U}) \to \operatorname{Pic} \widetilde{X}$ l'application qui à un diviseur de $\widetilde{U}$, considéré comme un diviseur de $\widetilde{X}$, associe sa classe dans $\operatorname{Pic} \widetilde{X}$.



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

Lemme 23. *Avec les notations précédentes, on a le carré cocartésien.*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{A}^\times/\,\widetilde{K}^\times \arrow[r, "\mathrm{div}_{\widetilde{U}}"] \arrow[d, "-\alpha_0"'] & \mathcal{Z}^1(\widetilde{U}) \arrow[d, "\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}"] \\ T \arrow[r] & \mathrm{Pic}\,\widetilde{X} \end{tikzcd}$$

*Démonstration.* Montrons que ce carré est commutatif. Pour tout $g \in \widetilde{A}^\times$, la classe du diviseur principal $\mathrm{div}_{\widetilde{X}}(g) = \alpha(g) + \mathrm{div}_{\widetilde{U}}(g)$ dans $\mathrm{Pic}\,\widetilde{X}$ est nulle. Comme cette classe vaut $\alpha_0(g) + \mathrm{cl}_{\widetilde{X}}\,\mathrm{div}_{\widetilde{U}}(g)$, on a $-\alpha_0 = \mathrm{cl}_{\widetilde{X}}\,\mathrm{div}_{\widetilde{U}}$. Le carré est cocartésien par la définition de $\mathrm{Pic}\,\widetilde{X}$ comme quotient de la somme directe $\mathcal{Z}^1(\widetilde{X}) = \mathbb{Z}^S + \mathcal{Z}^1(\widetilde{U})$. □

On pose désormais $I = \mathrm{Gal}(\bar{K}|\widetilde{K})$. Prenant les invariants sous $I$ dans une suite exacte de $\mathrm{Gal}(\bar{K}|K)$-modules continus discrets

$$\{1\} \to \bar{K}^\times \to E \to \mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}} \to \{0\}, \tag{22}$$

et en remarquant, d'une part, que le groupe $H^1(I, \bar{K}^\times)$ s'annule (Satz 90), et, d'autre part, que l'application $\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}} \to (\mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}})^I$ est un isomorphisme [CS87, p. 386, (1.5.0)] puisque $\mathrm{Br}\,\widetilde{K} = \{0\}$, on tire la suite exacte de $\mathrm{Gal}(\tilde{k}|k)$-modules

$$\{1\} \to \widetilde{K}^\times \to E^I \to \mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}} \to \{0\}. \tag{23}$$

On a donc un homomorphisme qui envoie la classe de (22) en celle de (23):

$$(22) \mapsto (23) : \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}}, \bar{K}^\times) \to \mathrm{Ext}^1_k(\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}, \widetilde{K}^\times). \tag{24}$$

On a aussi un homomorphisme $\mathrm{Ext}^1_k(\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}, \widetilde{K}^\times) \to \mathrm{Ext}^1_k(\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z})$, induit par la valuation $\tilde{v} : \widetilde{K}^\times \to \mathbb{Z}$ prolongeant $v$. On note

$$\varepsilon : \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}}, \bar{K}^\times) \to \mathrm{Ext}^1_k(\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z}) \tag{25}$$

l'application composée de (24) suivie de celle induite par $\tilde{v}$.

Rappelons brièvement la définition de l'homomorphisme caractéristique de [CS81],

$$\varphi : A_0(X)_0 \to \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}}, \bar{K}^\times). \tag{26}$$

Soit $c$ un 0-cycle de degré 0 sur $X_K$, de classe $[c] \in A_0(X_K)_0$. Posons $U = X_K - \mathrm{Supp}(c)$ et $\overline{U} = U \times_K \bar{K}$. Notons $\overline{A}$ l'anneau semi-local de $X_{\bar{K}}$ le long de $\overline{c}$, où $\overline{c}$ est le 0-cycle déduit de $c$ par changement de base.

Par définition, $\varphi([c]) \in \mathrm{Ext}^1_K(\mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}}, \bar{K}^\times)$ est la classe de l'extension de $\mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}}$ par $\bar{K}^\times$ déduite de la suite exacte courte

$$\{1\} \to \overline{A}^\times/\,\bar{K}^\times \to \mathcal{Z}^1(\overline{U}) \to \mathrm{Pic}\,X_{\bar{K}} \to \{0\} \tag{27}$$

via l'homomorphisme $\mathrm{év}_0 : \overline{A}^\times/\,\bar{K}^\times \to \bar{K}^\times$ d'évaluation en $\overline{c}$.

Lemme 24. *L'élément $\varepsilon\varphi([c]) \in \mathrm{Ext}^1_k(\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z})$ est la classe de l'extension de $\mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}}$ par $\mathbb{Z}$ déduite de la suite exacte courte*

$$\{1\} \to \widetilde{A}^\times/\,\widetilde{K}^\times \to \mathcal{Z}^1(\widetilde{U}) \to \mathrm{Pic}\,X_{\widetilde{K}} \to \{0\} \tag{28}$$

*via $\tilde{v} \circ \mathrm{év}_0 : \widetilde{A}^\times/\,\widetilde{K}^\times \to \mathbb{Z}$ (l'évaluation en $\tilde{c}$ suivie de la valuation).*

*Démonstration.* La longue suite exacte associée à la suite exacte courte de $I$-modules

$$\{1\} \to \bar{K}^\times \to \overline{A}^\times \to \overline{A}^\times/\,\bar{K}^\times \to \{1\}$$



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press

fournit un isomorphisme $\widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to (\overline{A}^\times/\bar{K}^\times)^I$, puisque $H^1(I,\bar{K}^\times)=0$. Il est alors clair que l'évaluation $\mathrm{év}_0 : \widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to \widetilde{K}^\times$ en $\tilde{c}$ est la restriction aux $I$-invariants de l'évaluation $\mathrm{év}_0 : \overline{A}^\times/\bar{K}^\times \to \bar{K}^\times$ en $\overline{c}$. Or la suite (28) s'obtient en prenant les $I$-invariants dans la suite (27) car l'application canonique $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to (\operatorname{Pic} X_{\bar{K}})^I$ est un isomorphisme [CS87, p. 386, (1.5.0)] puisque $\operatorname{Br} \widetilde{K} = \{0\}$. □

Lemme 25. *L'élément $\overline{\delta}\gamma_0([c]) \in \operatorname{Ext}^1_k(\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z})$ est représenté par l'extension déduite de la suite exacte (28) via $\psi(y)\circ\alpha_0 : \widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to \mathbb{Z}$, où $y \in K_0(X)^{(2)}$ est un relèvement de $[c] \in A_0(X_K)_0$.*

*Démonstration.* L'élément $\overline{\delta}\gamma_0([c])$ est la classe de l'extension déduite de la suite (17) via $-\psi(y) : T \to \mathbb{Z}$ (voir [Bou80, p. 125] pour le signe). À son tour, (17) est déduite de la suite (28) via $-\alpha_0 : \widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to T$ (lemme 23). □

Proposition 3. *En tant qu'applications $A_0(X_K)_0 \to \operatorname{Ext}^1_k(\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z})$, on a $\varepsilon\circ\varphi = \overline{\delta}\circ\gamma_0$.*

*Démonstration.* Soit $c$ un 0-cycle de degré 0 sur $X_K$. Vu les lemmes 24 et 25, il suffit de montrer qu'il existe un relèvement $y \in K_0(X)^{(2)}$ de $[c] \in A_0(X_K)_0$ tel que $\psi(y)\circ\alpha_0 = \tilde{v}\circ \mathrm{év}_0$ en tant qu'applications $\widetilde{A}^\times/\widetilde{K}^\times \to \mathbb{Z}$. Or le lemme 22 affirme précisément que c'est le cas lorsqu'on prend pour $y$ la classe de l'adhérence schématique de $c$ dans $X$. □

## 7. Le théorème principal

Lemme 26. *Supposons que le groupe commutatif $\operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ est libre de type fini et que l'application naturelle $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ est un isomorphisme. Alors l'application $\varepsilon : \operatorname{Ext}^1_K(\operatorname{Pic} X_{\bar{K}}, \bar{K}^\times) \to \operatorname{Ext}^1_k(\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z})$ (25) est un isomorphisme.*

*Démonstration.* L'application $\varepsilon$ est composée de (24) et l'application

$$\operatorname{Ext}^1_k(\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}}, \widetilde{K}^\times) \to \operatorname{Ext}^1_k(\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}}, \mathbb{Z}) \tag{29}$$

induite par la valuation $\tilde{v} : \widetilde{K}^\times \to \mathbb{Z}$. L'inclusion $\widetilde{K} \to \bar{K}$ et l'identification $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ fournissent une application

$$\operatorname{Ext}^1_k(\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}}, \widetilde{K}^\times) \to \operatorname{Ext}^1_K(\operatorname{Pic} X_{\bar{K}}, \bar{K}^\times)$$

réciproque de (24). Reste à faire voir que (29) est un isomorphisme. L'uniformisante $\pi$ de $K$ fournit un scindage équivariant $\sigma : \mathbb{Z} \to \widetilde{K}^\times$ de la suite exacte

$$\{1\} \to \tilde{\mathfrak{o}}^\times \to \widetilde{K}^\times \xrightarrow{\tilde{v}} \mathbb{Z} \to \{0\}$$

de $\operatorname{Gal}(\tilde{k}|k)$-modules ; il induit par fonctorialité une section de la suite

$$\{0\} \to \operatorname{Ext}^1_k(M, \tilde{\mathfrak{o}}^\times) \to \operatorname{Ext}^1_k(M, \widetilde{K}^\times) \xrightarrow{(29)} \operatorname{Ext}^1_k(M, \mathbb{Z}) \to \{0\},$$

avec $M = \operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}}$, d'où l'exactitude de celle-ci. Le groupe $\operatorname{Ext}^1_k(M, \tilde{\mathfrak{o}}^\times)$ s'identifie à $H^1(\operatorname{Spec}\mathfrak{o}, D(M))$, avec $D(M) = \operatorname{Hom}_k(M, \tilde{\mathfrak{o}}^\times)$, puisque $M$ est libre de type fini [CS87] ; à son tour, $H^1(\operatorname{Spec}\mathfrak{o}, D(M))$ s'identifie à $H^1(k, D(M)_k)$ [GD70, p. 401], qui est nul puisque le corps résiduel $k$ est fini [Ser94, p. III.11], d'où le fait que (29) est un isomorphisme. □

Théorème 2. *Soit $X$ une $\mathfrak{o}$-surface régulière, projective et plate. On suppose que la fibre générique $X_K$ est potentiellement birationnelle à $\mathbb{P}_2$ et que l'application naturelle $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ est un isomorphisme. L'application de spécialisation $\gamma_0 : A_0(X_K)_0 \to B(X)_0$ (16) est alors un isomorphisme.*

*Démonstration.* En effet, considérons le diagramme commutatif (proposition 3)

$$\begin{tikzcd} A_0(X_K)_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma_0"'] & \mathrm{Ext}^1_K(\operatorname{Pic} X_{\bar K}, \bar K^\times) \arrow[d, "\varepsilon"] \\ B(X)_0 \arrow[r, "\bar\delta"] & \mathrm{Ext}^1_k(\operatorname{Pic} X_{\widetilde K}, \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

dans lequel $\varepsilon$ est un isomorphisme (lemme 26) et $\gamma_0$ est surjectif (théorème 1). Or, d'après le travail [Col83] de Colliot-Thélène, l'application caractéristique $\varphi$ est injective. Il résulte de la commutativité du carré que $\gamma_0$ est un isomorphisme. □

Remarquons que la démonstration donne le même théorème pour toute $\mathfrak{o}$-surface $X$ régulière, projective et plate telle que

(i) la fibre générique $X_K$ soit absolument connexe,
(ii) le groupe commutatitif $\operatorname{Pic} X_{\widetilde K}$ soit libre de type fini,
(iii) l'application naturelle $\operatorname{Pic} X_{\widetilde K} \to \operatorname{Pic} X_{\bar K}$ soit un isomorphisme,
(iv) l'application caractéristique $\varphi$ (26) soit injective.

On peut montrer que de tels exemples se trouvent parmi les surfaces de type général de Barlow [Bar85a, Bar85b].

Théorème 3. *Sous les même hypothèses, l'application de spécialisation* $\gamma : A_0(X_K) \to B(X)$ *(voir (15)) est un isomorphisme.*

*Démonstration.* En effet, considérons le diagramme commutatif suivant (lemme (15)).

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & A_0(X_K)_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"'] & A_0(X_K) \arrow[r, "\deg"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\ \{0\} \arrow[r] & B(X)_0 \arrow[r] & B(X) \arrow[r, "\bar\xi"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Comme $\gamma_0$ est un isomorphisme (théorème 2) et $\gamma$ est surjectif (proposition 2), il résulte que $\gamma$ est bijectif. □

Théorème 4. *Avec les mêmes hypothèses, si* $X_{\tilde k}$ *est irréductible, alors* $\deg : A_0(X_K) \to \mathbb{Z}$ *est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Comme $\operatorname{Card} S = 1$, l'application $\xi : \operatorname{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme et $\psi(i_*(K_0(X_k)^{(1)})) = \{0\}$ (lemme 5). Il en résulte que $\bar\xi : B(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme ; on utilise le lemme 15 et le théorème 3 pour conclure. □

Théorème 5. *Supposons en outre que les composantes irréductibles (rendues réduites) de* $X_k$ *sont lisses sur* $k$*. L'application* $\psi$ *(voir (14)) induit alors un isomorphisme de* $A_0(X_K)$ *avec le conoyau de l'homomorphisme*

$$\bigoplus_Y \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z}) \quad (Y : \text{ composantes irréductibles de } X_k) \tag{30}$$

*qui à une courbe* $C$ *sur un tel* $Y$ *et une composante irréductible (rendue réduite)* $Z$ *de* $X_{\tilde k}$ *associe le nombre* $\deg_{\widetilde C}(\mathcal{O}_{\widetilde X}(Z)|_{\widetilde C})$ *(voir (1)), où* $\widetilde C = C \times_k \tilde k$.

*Démonstration.* Comme les $Y$ sont lisses sur $k$, on a des isomorphismes

$$\operatorname{Pic} Y \to \frac{K^0(Y)^{(1)}}{K^0(Y)^{(2)}} \to \frac{K_0(Y)^{(1)}}{K_0(Y)^{(2)}}$$

(cf. [Man69, p. 45] et la démonstration du lemme 1). On en déduit que l'application $\oplus_Y \operatorname{Pic} Y \to K_0(X_k)^{(1)}/K_0(X_k)^{(2)}$ est surjective ; comme (30) se factorise à travers celle-ci (cf. (20)), son image est égale à $\psi(i_*(K_0(X_k)^{(1)}))$. Le conoyau de (30) est donc égal à $B(X)$ (15) ; le théorème 3 affirme que l'application $\gamma : A_0(X_K) \to B(X)$ induite par $\psi$ est un isomorphisme. $\square$

Pour calculer ces nombres, il est souvent commode de se rappeler que

$$\sum_Z m_Z \deg_{\widetilde{C}}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(Z)|_{\widetilde{C}}) = 0$$

(lemme 9).

## 8. Une famille d'exemples

Supposons que le nombre premier $p$ soit impair. Soient $d \in \mathfrak{o}^\times$ non carré et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K^\times$ des éléments dont les valuations satisfont $v(\alpha) = v(\beta) + 1$ et $v(\delta) = v(\gamma) + 2$. Dans l'espace $\mathbb{P}_{4,K}$ de coordonnées $r : s : t : u : w$, considérons la surface :

$$\alpha(dr^2 - s^2) = \beta(t-u)(t+w), \quad \gamma(dr^2 - t^2) = \delta(s+u)(s+w). \tag{31}$$

Soit $\pi$ une uniformisante de $K$ ; on peut supposer que $\alpha = \pi$, $\delta = \pi^2$ et que $\beta, \gamma \in \mathfrak{o}^\times$. Soit $X_0$ la $\mathfrak{o}$-surface projective définie dans $\mathbb{P}_{4,\mathfrak{o}}$ par le système (31). La fibre fermée $X_{0,k}$ possède deux composantes irréductibles, $A_0$ et $B_0$. Éclatant la réunion des lieux singuliers de $A_0$ et $B_0$, on obtient un $\mathfrak{o}$-schéma $X_1$ ; sa fibre fermée $X_{1,k}$ possède quatre composantes irréductibles : les transformées strictes $A_1$ et $B_1$ de $A_0$ et $B_0$, ainsi que deux composantes exceptionnelles $C_1$ et $D_1$. Les seules singularités du schéma $X_1$ sont, à part le point d'intersection $M_1$ de ces quatre composantes, deux points $S_1$ et $R_1$. Éclatant ces trois points, on obtient une $\mathfrak{o}$-surface $X$ qui est régulière, projective et plate. Sa fibre fermée $X_k$ possède sept composantes irréductibles : les quatre transformées strictes $A$, $B$, $C$, $D$ et les trois composantes exceptionnelles $R$, $S$, $M$. Elles sont toutes de multiplicité 1 sauf $M$, qui est de multiplicité 2 ; rendues réduites, elles sont lisses sur $k$. Seules $C$ et $D$ sont absolument irréductibles ; les cinq autres possèdent deux composantes irréductibles sur $\tilde{k}$.

La fibre générique $X_K$ est $K'$-birationnelle à $\mathbb{P}_{2,K'}$, où $K' = K(\sqrt{d})$ ; l'application $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to X_{\bar{K}}$ est un isomorphisme. Les groupes $\operatorname{Pic} Y$ des sept composantes irréductibles $Y$ de $X_k$ sont faciles à calculer. Appliquons le théorème 5 pour calculer $A_0(X_K)$ ; dans la base canonique de $\operatorname{Hom}_k(\mathbb{Z}^S, \mathbb{Z})$ (indexée par les composantes irréductibles $Y$ de $X_k$) et pour un certain choix de générateurs des $\operatorname{Pic} Y$, l'image de (30) est engendrée par les dix colonnes de la matrice

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ R \\ S \\ M \end{array} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & & & & & -2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ & & & & & 2 & & & & -2 \\ 2 & & & & -2 & & & & & \\ & 1 & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $A_0(X_K)_0$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (cf. [CM85, théorème 4.5]) ; voir [Dal03] pour plus de détails.

Il convient de remarquer que lorsque $d \in K^\times$ (voir (31)) n'appartient plus à $\mathfrak{o}^\times$, l'application de changement de base $\operatorname{Pic} X_{\widetilde{K}} \to \operatorname{Pic} X_{\bar{K}}$ n'est plus un isomorphisme pour la $K$-surface $X_K$ définie par (31). Cependant, son groupe de Chow est calculé dans [Dal00] par une autre méthode ; celle-ci n'exige plus l'existence d'une $\mathfrak{o}$-surface régulière, projective et plate de fibre générique (31).

Remerciements

Cette Note est tirée d'une thèse [Dal93] préparée sous la direction de Jean-Louis Colliot-Thélène ; je le remercie vivement pour ses conseils et pour ses encouragements, ainsi que de m'avoir mis entre les mains [Blo83]. Je tiens à remercier le Ministère Français des Affaires Étrangères pour une bourse doctorale et l'Institut des Hautes Études Scientifiques de Bures-sur-Yvette pour deux séjours pendant lesquels la présente rédaction a été réalisée.

Bibliographie

Bar85a R. Barlow, *A simply connected surface of general type with* $p_g = 0$, Invent. Math. **79** (1985), 293–301.

Bar85b R. Barlow, *Rational equivalence of zero-cycles for some more surfaces with* $p_g = 0$, Invent. Math. **79** (1985), 303–308.

BGI71 P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch*, in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1966–67*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 225 (Springer, Berlin, 1971).

Blo81 S. Bloch, *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), 41–59.

Blo83 S. Bloch, *Lettre à Colliot-Thélène*, 12 mai 1983.

BLR90 S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, *Néron models* (Springer, Berlin, 1990).

Bou80 N. Bourbaki, *Algèbre homologique* (Masson, Paris, 1980).

BS58 A. Borel et J.-P. Serre, *Le théorème de Riemann–Roch (d'après Grothendieck)*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.

CM85 K. R. Coombes et D. J. Muder, *Zero-cycles on del Pezzo surfaces over local fields*, J. Algebra **97** (1985), 438–460.

Col83 J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's theorem 90 for* $K_2$*, with applications to Chow groups of rational surfaces*, Invent. Math. **71** (1983), 1–20.

CS81 J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), 421–427.

CS87 J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J. **54** (1987), 375–492.

CS96 J.-L. Colliot-Thélène et S. Saito, *Zéro-cycles sur les variétés* $p$*-adiques et groupe de Brauer*, Int. Math. Res. Not. **4** (1996), 151–160.

Dal93 C. S. Dalawat, *Groupe des classes de 0-cycles sur les surfaces rationnelles définies sur un corps local*, Thèse, Université de Paris-Sud, Orsay (1993).

Dal00 C. S. Dalawat, *Le groupe de Chow d'une surface de Châtelet sur un corps local*, Indag. Math. (N.S.) **11** (2000), 173–185.

Dal03 C. S. Dalawat, *The Chow group of a del Pezzo surface over a local field*, Nagoya Math. J., to appear.

Ful84 W. Fulton, *Intersection theory* (Springer, Berlin, 1984).

GD64 A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **20** (1964), 5–259.

GD70 A. Grothendieck et M. Demazure, *Structure des schémas en groupes réductifs*, in *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 1962–64*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 153 (Springer, Berlin, 1970).

Man69 Yu. I. Manin, *Lectures on the* $K$*-functor in algebraic geometry*, Russian Math. Surveys **24** (1969), 1–89.

Ser94 J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, cinquième edition, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5 (Springer, Berlin, 1994).

Chandan Singh Dalawat dalawat@mri.ernet.in
Harish-Chandra Research Institute, Chhatnag Road, Jhunsi, Allahabad 211 019, India



https://doi.org/10.1112/S0010437X04000909 Published online by Cambridge University Press