Can. J. Math., Vol. XXIV, No. 3, 1972, pp. 416–425

FAMILLES DE VALUATIONS A CARACTERE COMPACT

CÉCILE M. WONG

1. Introduction. Soit Ω une famille de valuations d'un corps commutatif K. Dénotons par $R_v = \{x \in K | v(x) \geqq 0\}$, l'anneau de la valuation v, et $M_v = \{x \in K | v(x) > 0\}$, l'idéal maximal de l'anneau R_v. Soit $R = \bigcap_{v \in \Omega} R_v$ l'anneau défini par la famille Ω; nous supposons toujours Ω tel que K soit le corps des fractions de R, et tel que $R_v \neq R_w$ dès que $v \neq w$ (v et $w \in \Omega$).

Pour tout $x \in K$, posons $V_\Omega(x) = \{x \in \Omega | v(x) > 0\}$ et munissons Ω de la topologie la plus faible pour laquelle les $V_\Omega(x)$ sont des ouverts. On dit que la famille Ω est à caractère compact (respectivement, fini) si pour chaque élément non nul x de K, $V_\Omega(x)$ est quasi compact (respectivement, est un ensemble fini). S'il n'y a pas de confusion possible quant à la famille Ω, on écrit $V(x)$ plutôt que $V_\Omega(x)$.

Un anneau de Krull est un anneau qui peut être défini par une famille Ω à caractère fini de valuations discrètes de rang 1. Certaines propriétés des anneaux de Krull ont été généralisées par M. Griffin (cf [**1**; **2**; **3**]) aux anneaux R pouvant être définis par une famille Ω à caractère fini telle que tout élément de Ω soit une valuation essentielle pour R; une valuation v associée à un anneau R, c'est à dire telle que $R_v \supseteq R$, est dite essentielle pour R, si R_v est le localisé de R par rapport à l'idéal $P_v = M_v \cap R$.

D'autre part, Krull avait déjà obtenu certains résultats dans le cas de la fermeture R' de R dans une extension algébrique quelconque K' de K, lorsque R est l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers (cf [**4**]), puis lorsque R est un anneau de Krull quelconque (cf [**5**]). Dans ces cas, la famille Ω' qui définit R' est la famille de toutes les extensions à K' des éléments de la famille de définition Ω de R. La famille Ω' ainsi obtenue est à caractère fini lorsque $[K' : K] < \infty$, et à caractère compact quel que soit $[K' : K]$. Il faudrait également mentionner la présentation plus axiomatique et plus générale de l'article [**6**] de Krull; les valuations qui entrent en jeu sont toutes de rang 1.

En utilisant des recouvrements ouverts et la compacité, il est possible de généraliser à la fois certains résultats de Krull, et les résultats correspondants de M. Griffin. Un prochain article sera axé sur la généralisation des "théorèmes d'approximation" tels que présentés dans [**3**], tandis que le présent article introduit et illustre au besoin les notions nécessaires à l'étude des familles de valuations à caractère compact.

Reçu le 7 avril, 1971 et in revu forme, le 30 septembre, 1971. Cet article est une partie del a recherche effectuée a l'Université de Montréal sous la direction du Professeur S. Takahashi, avec l'aide financière de la compagnie Bell Canada.

Notations. **N**, **Z**, **Q** et **R** désigneront respectivement l'ensemble des entiers strictement positifs, le groupe des entiers, des nombres rationnels et des nombres réels. Si $A \subseteq \Omega$, $\mathscr{C}(A)$ désignera le complémentaire de A dans Ω.

2. Propriétés de l'espace Ω. Si v et w sont deux valuations d'un corps K, on dit que v est plus fine que w lorsque $R_v \subseteq R_w$, et on écrit $v \geqq w$. Une famille Ω de classes de valuations de K est dite fine si $v \nleq w$ et $w \nleq v$ quels que soient les élément distincts v et w de Ω.

PROPOSITION. 2.1. *Soient v et $w \in \Omega$. Pour qu'il existe un ouvert U tel que $v \in U$ et $w \notin U$, il faut et il suffit que $v \nleq w$.*

Preuve. S'il existe un ouvert U tel que $v \in U$ et $w \notin U$, il existe $x_1, \ldots,$ $x_n \in K$ tels que $v \in V(x_1) \cap \ldots \cap V(x_n) \subseteq U$. Soit i, $1 \leqq i \leqq n$, tel que $w \notin V(x_i)$; $w(x_i) \leqq 0$ et $v(x_i) > 0$. Par suite $M_v \nsubseteq M_w$, ou encore $R_v \nsupseteq R_w$, c'est à dire $v \nleq w$.

Inversement, si $v \nleq w$, on a $R_v \nsupseteq R_w$, c'est à dire $M_v \nsubseteq M_w$. Si $x \in M_v$ mais $x \notin M_w$, alors $v \in V(x)$ et $w \notin V(x)$.

COROLLAIRE. *Ω est un espace séparé si et seulement si Ω est une famille fine.*

Il nous faut maintenant introduire la notion de choix cohérent. Si $\dot{v} : K \setminus \{0\} \rightarrow \Gamma$ est une valuation de K, tout isomorphisme de groupes ordonnés $\phi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ permet de définir une valuation $\ddot{v} = \phi\dot{v}$ équivalente à $\dot{v}$, c'est à dire telle que $R_{\dot{v}} = R_{\ddot{v}}$. Inversement, si $\ddot{v}$ est équivalente à $\dot{v}$, il existe un isomorphisme de groupes ordonnés ϕ tel que $\ddot{v} = \phi\dot{v}$. Dans ce qui suit, nous parlerons de "valuation v" pour désigner soit une classe de valuation, soit, lorsque l'énoncé en question est indépendant de la valuation particulière choisie dans la classe, une valuation v; lorsque l'énoncé dépend de la valuation particulière choisie dans une classe v, nous désignerons cette valuation particulière par $\dot{v}$ ou $\ddot{v}$.

Soit Γ un groupe totalement ordonné contenant pour tout $v \in \Omega$, au moins un sous-groupe isomorphe à Γ_v. Un Ω_Γ-choix est un ensemble ω_Γ de valuations $\dot{v}$ de K à valeurs dans Γ (c'est à dire $v(K \setminus \{0\}) \subseteq \Gamma$) tel que:

(1) pour tout $\dot{v} \in \omega_\Gamma$, $v \in \Omega$;

(2) si $\dot{v}$ et $\dot{w} \in \omega_\Gamma$ et $\dot{v} \neq \dot{w}$, alors $v \neq w$;

(3) pour tout $v \in \Omega$, il existe $\dot{w} \in \omega_\Gamma$ tel que $v = w$;

Ω et ω_Γ sont ainsi en correspondance biunivoque et on munit ω_Γ de la topologie induite de celle de Ω par cette bijection canonique. $V_\Omega(x)$ qui est par définition un sous-ensemble de Ω peut alors représenter le sous-ensemble correspondant de ω_Γ.

Si $0 \neq x \in K$, définissons ${}_{\omega_\Gamma}f_x : \omega_\Gamma \rightarrow \Gamma$ par ${}_{\omega_\Gamma}f_x(\dot{v}) = \dot{v}(x)$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on écrit f_x au lieu de ${}_{\omega_\Gamma}f_x$. Dans le cas où Ω est à caractère fini, ${}_{\omega_\Gamma}f_x$ est nulle sauf en un nombre fini de points; dans le cas général, le très grand nombre de valeurs que ${}_{\omega_\Gamma}f_x$ peut prendre est un obstacle a la généralisation de théorèmes comme les théorèmes d'approximation. Le cas où f_x est localement constante quel que soit $0 \neq x \in K$ présente l'avantage du nombre fini de valeurs lorsque Ω est à caractère compact, sans compter que de tels Ω_Γ-choix se présentent de façon toute naturelle dans le cas où R' est la fermeture entière d'un anneau de Krull R dans une extension algébrique quelconque K' du corps des fractions K de R. En effet, soit R un anneau de Krull, Ω une famille de définition de R à caractère fini, et ω_Γ un Ω_Γ-choix quelconque, Γ étant supposé tel que si $\gamma \in \Gamma$, $(\gamma/n) \in \Gamma$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$. Si R' est la fermeture entière de R dans une extension algébrique quelconque K' du corps des fractions K de R, et si Ω' (respectivement, ω'_Γ) est l'ensemble de toutes les extensions à K des éléments de Ω (respectivement, ω_Γ), alors les fonctions ${}_{\omega'\Gamma}f_x$ sont localement constantes pour tout x non nul. Ayant cet exemple en tête, nous disons donc qu'un Ω_Γ-choix ω_Γ est cohérent si les fonctions ${}_{\omega\Gamma}f_x$ sont localement constantes pour tout x non nul.

PROPOSITION 2.2. *Si ω_Γ est un Ω_Γ-choix cohérent, la famille Ω est une famille fine.*

Preuve. Si $v < w$, d'après la proposition 2.1, tout ouvert contenant v contient w. Si f_x est localement constante pour tout $x(\neq 0)$, il faut donc que $v(x) = w(x)$ et par suite que $v = w$, une contradiction.

Une espace topologique est dit totalement discontinu lorsque tout point admet un système fondamental de voisinages à la fois ouverts et fermés.

PROPOSITION 2.3. *Si Ω est une famille à caractère compact et s'il existe un Ω_Γ-choix cohérent ω_Γ, Ω est un espace localement compact totalement discontinu.*

Preuve. Ω est séparé, et les ensembles de la forme $V(x_1) \cap \ldots \cap V(x_n)$ sont ouverts, compacts, donc fermés, et forment une base de la topologie.

3. Ω_Γ-Choix cohérents.

PROPOSITION 3.1. *Soit Ω une famille à caractère compact, et soit $\{\chi_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vides de Ω, deux a deux disjoints, telle que $\bigcup_{i\in I}\chi_i = \Omega$.*

(1) *Chaque χ_i est une famille à caractère compact.*

(2) *Il existe un Ω_Γ-choix cohérent ω_Γ si et seulement s'il existe pour chaque $i \in I$ un $(\chi_i)_{\Gamma_i}$-choix cohérent $(\kappa_i)_{\Gamma_i}$.*

Preuve. La partie (1) est évidente car la topologie de χ_i est la topologie de sous-espace, et χ_i est fermé dans Ω.

D'autre part, si ω_Γ est cohérent et si ϕ est la bijection de Ω sur ω_Γ, pour chaque i, $\phi(\chi_i)$ est un choix cohérent. Inversement, si pour chaque $i \in I$, il existe un $(\chi_i)_{\Gamma_i}$-choix cohérent $(\kappa_i)_{\Gamma_i}$, toute famille de monomorphismes de groupes totalement ordonnés $\{\psi_i : \Gamma_i \to \Gamma\}_{i\in I}$ permet de trouver un Ω_Γ-choix cohérent ω_Γ. Une telle famille existe toujours; par exemple, munissons I d'un ordre total. Soit Γ la somme directe ordonnée des groupes Γ_i et soient ψ_i: $\Gamma_i \to \Gamma$ les injections canoniques.

COROLLAIRE. *Si Ω est une famille fine à caractère fini, tout Ω_Γ-choix est cohérent.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1972-034-9 Published online by Cambridge University Press

Preuve. En effet, si $v \in \Omega$, $\{v\}$ est un ouvert fermé de Ω.

Remarque. Si Ω est une famille de valuations de rang 1, il existe un Ω_Γ-choix cohérent si et seulement s'il existe un $\Omega_{\mathbf{R}}$-choix cohérent. En effet, si ω_Γ est cohérent, on peut toujours supposer que Γ est un produit de Hahn de groupes ordonnés isomorphes à $\mathbf{R}$ (Γ est toujours isomorphe à un sous-groupe d'un tel groupe; cf. Ribenboim [**10**; Théorème 2, p. 22]). Si $\dot{v} \in \omega_\Gamma$, v étant de rang 1, la fonction $\ddot{v}$ qui à $x \in K$ $(x \neq 0)$ tel que $\dot{v}(x) \neq 0$, associe la première composante non nulle de $\dot{v}(x) \in \Gamma$, et $\ddot{v}(x) = 0$ lorsque $\dot{v}(x) = 0$, est une valuation de K équivalente à $\dot{v}$; $\ddot{v}(x) \in \mathbf{R}$, et $\omega'_\Gamma = \{\ddot{v}\}_{\dot{v}\in\omega_\Gamma}$ est un $\Omega_{\mathbf{R}}$-choix cohérent.

PROPOSITION 3.2. *Soit Ω une famille de valuations de rang 1 à caractère compact; supposons qu'il existe un $\Omega_{\mathbf{R}}$-choix cohérent $\omega_{\mathbf{R}}$. Soit $\{x_i\}_{i\in I}$ une famille d'éléments non nuls de K, où I est un ensemble bien ordonné. Pour chaque $i \in I$, soit $k_i > 0$ et soit $l_i < 0$. Si la famille $\{x_i\}_{i\in I}$ et l'ordination de I sont telles que:*

(1) $\bigcup_{i\in I}(V(x_i) \cup V(x_i^{-1}))$ *soit un fermé,*

(2) *pour tout $i \in I$, $\bigcup_{j<i}(V(x_j) \cup V(x_j^{-1}))$ soit un fermé,*

alors le $\Omega_{\mathbf{R}}$-choix $\omega'_{\mathbf{R}}$ déterminé par les relations suivantes est cohérent:

$$\ddot{v}(x_i) = k_i \text{ si } \quad x_i \in M_v \text{ et } v \notin \bigcup_{j<i} (V(x_j) \cup V(x_j^{-1}))$$

$$\ddot{v}(x_i) = l_i \text{ si } x_i^{-1} \in M_v \text{ et } v \notin \bigcup_{j<i} (V(x_j) \cup V(x_j^{-1}))$$

$$\ddot{v} = \dot{v} \text{ si } \qquad v \notin \bigcup_{i\in I} (V(x_i) \cup V(x_i^{-1})).$$

Preuve. I étant bien ordonné, pour tout

$$v \in \bigcup_{i\in I} (V(x_i) \cup V(x_i^{-1})$$

il existe $i \in I$ tel que $v \in V(x_i) \cup V(x_i^{-1})$ et

$$v \notin \bigcup_{j<i} (V(x_j) \cup V(x_j^{-1}).$$

Ω est alors l'union des ouverts deux à deux disjoints

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{i\in I} (V(x_i) \cup V(x_i^{-1}))\right)$$

et

$$\chi_i = (V(x_i) \cup V(x_i^{-1})) \cap \mathscr{C}\left(\bigcup_{j<i} (V(x_j) \cup V(x_j^{-1}))\right)(i \in I).$$

La proposition est alors conséquence de la Proposition 3.1 et du fait que si $\chi_{i\mathbf{R}}$ est un choix cohérent et $k > 0$, on obtient un autre choix cohérent $\chi'_{i\mathbf{R}}$ en prenant pour tout $\dot{v} \in \chi_i$, $\ddot{v}(x) = k\dot{v}(x)$.

Remarque. On peut dans l'énoncé précédent prendre $k_i > 0$, et remplacer les conditions (1) et (2) par:

(1′) $\bigcup_{i\in I} V(x_i)$ soit fermé,

(2′) Pour tout $i \in I$, $\bigcup_{j<i}(V(x_j))$ soit fermé, alors le $\Omega_{\mathbf{R}}$-choix $\omega'_{\mathbf{R}}$ déterminé par les relations suivantes est cohérent:

$$\ddot{v}(x_i) = k_i \text{ si } x_i \in M_v \text{ et } v \notin \bigcup_{j<i} V(x_j)$$
$$\ddot{v} = \dot{v} \qquad \text{si } v \notin \bigcup_{i\in I} V(x_i).$$

PROPOSITION 3.3. *Soit Ω une famille de valuations d'un corps K. Si $\Gamma \subseteq \mathbf{R}$ et s'il existe un Ω_Γ-choix ω_Γ tel que:*

(1) *pour tout $v \in \Omega$, il existe $0 \neq x_v \in K$ tel que f_{x_v} soit constante et non nulle sur un voisinage de v,*

(2) *pour tout $x \in K$ et tout $v \in \Omega$, il existe un voisinage U de v tel que f_x ne prenne qu'un nombre fini de valeurs sur U,*

alors ω_Γ est cohérent.

Preuve. Soit $v \in \Omega$, soit $x_v \neq 0$ tel que f_{x_v} soit constante et non nulle sur un voisinage ouvert U de v. Soit $b = \dot{v}(x_v)$. Soit y un élément quelconque non nul de K. On sait que f_y ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs sur un voisinage U' de v. Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ ces valeurs; $\dot{v}(y) = a_i$ pour un i, $1 \leqq i \leqq k$. Alors f_y prend la valeur a_i sur l'ouvert

$$U' \cap U \cap V(x_v^{s'}y^{-r'}) \cap V(x_v^{-s}y^r)$$

(respectivement, $U' \cap U \cap V(x_v^{s'}y^{-r'})$ ou $U' \cap U \cap V(x_v^{-s}y^r)$) lorsque $1 < i < k$ (respectivement, $i = 1$ ou $i = k$), où r, s, r' et s' sont des entiers tels que $ra_{i-1} \leqq sb < ra_i$ et $r'a_i < s'b \leqq r'a_{i+1}$. f_y est donc localement constante.

COROLLAIRE. *Soit Ω une famille de valuations discrètes de rang 1. S'il existe un $\Omega_{\mathbf{Z}}$-choix $\omega_{\mathbf{Z}}$ tel que f_x soit bornée pour tout $0 \neq x \in K$, et si Ω peut être recouvert par une famille d'ouverts disjoints telle que chacun des ouverts de cette famille soit contenu dans un ouvert de la forme $V(x)$, il existe alors un $\Omega_{\mathbf{Z}}$ choix cohérent $\omega'_{\mathbf{Z}}$.*

Preuve. Soit $\Omega = \bigcup_{i\in I} U_i$ tel que, $U_i \cap U_j = \phi$ pour $i \neq j$. Soit n_i un multiple commun de $\{\dot{v}(x_i)\}_{v\in U_i}$ (Il y a un nombre fini de valeurs puisque f_x prend ses valeurs dans $\mathbf{Z}$ et est bornée). Définissons $\ddot{v}(x_i) = n_i$ pour tout $v \in U_i$. Par construction, $\omega'_{\mathbf{Z}} = \{\ddot{v}\}_{v\in\Omega}$ est un $\Omega_{\mathbf{Z}}$-choix vérifiant les hypothèses de la proposition précédente, d'où la conclusion.

4. Exemples. Un anneau R pouvant être défini par une famille Ω de classes de valuations de son corps des fractions, vérifiant les conditions suivantes, est un anneau de type C-Krull (C pour compact):

(1) Ω est à caractère compact.

(2) Il existe un Ω_Γ-choix cohérent.

(3) Tous les éléments de Ω sont des valuations essentielles pour R.

Si R est défini par une famille à caractère fini Ω, il existe une sous-famille fine Ω' de Ω définissant R (cf. Griffin [**3**, Lemme 18, p. 12]). La topologie sur Ω' est alors discrète et tout Ω'_Γ-choix est cohérent. Par suite, tout anneau de type de Krull (c'est à dire tout anneau défini par une famille Ω à caractère fini de valuations essentielles pour R) est un anneau de type C-Krull.

Pour les deux exemples qui vont suivre, il s'agira de famille Ω de valuations du corps K des fonctions rationnelles à coëfficients dans un corps k et avec un ensemble de variables $\{X_i\}_{i\in I}$. Les valuations v seront données au moyen de leur restriction à k et de la valeur qu'elles prennent en chacune des variables X_i. Il sera sous-entendu dans chaque cas que les valuations sont données par:

$$(1)\ v\left(c\prod_{j=1}^{n} X_{i_j}{}^{r_j}\right) = v(c) + \sum_{j=1}^{n} r_j v(X_{i_j})$$

où $c \in k$;

$$(2)\ v\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \min_{1\leqq i\leqq n} v(y_i)$$

où chaque y_i est de la forme

$$c\prod_{j=1}^{l} X_{i_j}{}^{r_j}$$

et où l'on a $y_i \neq 0$ et $y_i y_j^{-1} \notin k$ pour $i \neq j$;

$$(3)\ v\left(\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right)^{-1}\right) = v\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - v\left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right).$$

Exemple 1. Il y a des familles à caractère compact Ω pour lesquelles il n'existe aucun Ω_Γ-choix cohérent. En effet, considérons l'ensemble des suites $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ où $a_i \in \{0, 1\}$ pour tout i. Pour tout entier n, f_n (ou f'_n, g'_n, . . .) désigne une fonction de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{0, 1\}$. Soit k un corps, et soit K le corps des fractions rationnelles à coefficients dans k et ensemble de variables:

$$\{X\} \cap \{\{X_{f_n}\}_{f_n,\ n\ \text{fixe}}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Définissons les valuations $\dot{v}_{\{a_i\}}$ par:

$$\dot{v}_{\{a_i\}}(c) = 0 \text{ pour } 0 \neq c \in k\ (\dot{v}_{\{a_i\}}(0) = +\infty);$$

$$\dot{v}_{\{a_i\}}(X_{f_n}) = \begin{cases} 1+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k/2^k \text{ si } f_n(k) = a_k \text{ pour tout } 1 \leqq k \leqq n \\ 0 \text{ si } f_n(k) \neq a_k \text{ pour un } k,\ 1 \leqq k \leqq n; \end{cases}$$

$$\dot{v}_{\{a_i\}}(X) = 1.$$

Soit $\Omega = \{v_{\{a_i\}}\}_{\{a_i\}}$, et $\omega_{\mathbf{R}} = \{\dot{v}_{\{a_i\}}\}_{\{a_i\}}$. Il est facile de voir que Ω est une famille à caractère compact et que $\omega_{\mathbf{R}}$ est un $\Omega_{\mathbf{R}}$-choix tel que f_X soit constante non nulle. D'après la proposition 3.2, s'il existait un Ω_Γ-choix cohérent, $\omega_{\mathbf{R}}$ en serait un, ce qui n'est pas le cas.

Exemple 2. Soit $A \neq \phi$ un espace topologique localement compact et totalement discontinu. Il existe un corps K et une famille Ω de classes de valuations de K essentielles pour l'anneau R défini par Ω; de plus, Ω est tel qu'il existe un Ω_Γ-choix cohérent, et est homéomorphe à A. En effet, soit k un corps. A tout ouvert compact U de A, associons la variable X_U. Considérons le corps K des fonctions rationnelles à coefficient dans k et ensemble de variables

$\{X_U | U \in \mathscr{U}\}$ où $\mathscr{U}$ est l'ensemble des ouverts compacts de A. Pour tout $a \in A$, définissons la valuation $\dot{v}_a$ par:

$$\dot{v}_a(X_U) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in U \\ 0 \text{ si } a \notin U. \end{cases}$$

Soient $\Omega = \{v_a\}_{a \in A}$ et $\omega_{\mathbf{Z}} = \{\dot{v}_a\}_{a \in A}$. Si a_1 et $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, A étant séparé et chaque point ayant un système fondamental de voisinages ouverts compacts, il existe un ouvert compact U_1 de A tel que $a_1 \in U_1$ et $a_2 \notin U_1$. On a alors $\dot{v}_{a_1}(X_{U_1}) = 1$ $\dot{v}_{a_2}(X_{U_1}) = 0$. Par suite v_{a_1} et v_{a_2} sont non-équivalentes, et même indépendantes. La fonction $\phi : A \to \Omega$ telle que $\phi(a) = v_a$ est une bijection. Si Ω est muni de la topologie engendrée par les ensembles de la forme $V(x)$, $x \in K$, il s'agit de voir que ϕ est un homéomorphisme, que $\omega_{\mathbf{Z}} = \{\dot{v}_a\}_{a \in A}$ est cohérent, et que les v_a sont essentielles pour R.

Si U est un ouvert compact de A, $\phi(U) = V(X_U)$ est ouvert; les ouverts compacts formant par hypothèse une base de la topologie de A, ϕ est une application ouverte.

Si $0 \neq x \in K$; x est de la forme

$$\left[\sum_{i,\text{finie}} c_i \left(\prod_{j,\text{fini}} X_{U_{ij}}{}^{r_{ij}}\right)\right]\left[\sum_{k,\text{finie}} c_k{}' \left(\prod_{l,\text{fini}} X_{U_{kl}}{}^{s_{kl}}\right)\right]^{-1}$$

où les r_{ij} et les $s_{kl} \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, et les c_i et les $c'_k \in k$. Pour tout $a \in A$, il existe un ouvert compact U_a de A tel que $a \in U_a$ et tel que f_x soit constante sur $\phi(U_a) = V(X_{U_a})$. En effet, si a n'est élément d'aucun des U_{ij} ou U_{kl}, il suffit de prendre un ouvert compact U_a contenant a et disjoint de tous les U_{ij} et les U_{kl}; et si a est élément d'un U_{ij} ou d'un U_{kl}, il suffit de prendre pour U_a l'intersection de tous les U_{ij} et U_{kl} dont a est élément. Par suite, ϕ est continue et $\omega_{\mathbf{Z}}$ est cohérent. Il est maintenant évident que Ω est à caractère compact.

Si $a \in A$, montrons que v_a est essentielle pour R. Soit $x \in K$ tel que $v_a(x) \geqq 0$. Soit r une borne inférieure de f_x et soit $U = \mathrm{V}(x^{-1})$. Supposons $U \neq \phi$ car autrement il n'y a rien à montrer. Si $z = X_U{}^r$, alors $z \notin P_{v_a}$ et $zx \in R$; comme $z \in R$, $x \in R_Q$, où $Q = P_{v_a}$.

Remarque. Soit Γ un groupe totalement ordonné quelconque, et soit pour tout $a \in A$ (A de la proposition précédente), Γ_a un sous-groupe de Γ tel que si $\alpha \in \Gamma_a$, il existe un voisinage U de a vérifiant $\alpha \in \Gamma_{a'}$ pour $a' \in U$. Il existe alors un corps K et une famille de classes de valuations Ω de K, essentielles pour l'anneau défini par Ω, telle qu'il existe un Ω_Γ-choix cohérent tel que $\phi(a)(K \backslash \{0\})$ soit exactement Γ_a pour tout $a \in A$, ϕ étant un homéomorphisme de A sur Ω. Il suffit de prendre comme ensemble de variables $\{X_{U,\alpha}\}$ où pour tout $a \in A$, α parcourt un ensemble de générateurs $\{\alpha > 0\}$ de Γ_a et U parcourt l'ensemble des ouverts compacts de A tels que $\alpha \in \Gamma_{a'}$ pour $a' \in U$. La preuve est analogue à celle de l'exemple précédent si on prend:

$$v_a(X_{U,\alpha}) = \begin{cases} \alpha \text{ si } a \in U. \\ 0 \text{ si } a \notin U. \end{cases}$$

5. Valuations essentielles d'un anneau de type C-Krull. Soit w une valuation d'un corps K ayant Γ comme groupe de valeurs, et soit $x \in K$ tel que $w(x) < 0$. Soit Δ le plus grand sous-groupe isolé de Γ ne contenant pas $w(x)$. La valuation de K moins fine que w ayant Γ/Δ comme groupe de valeurs, est appelée valuation singulière en x déterminée par w.

Si R est défini par une famille Ω, si $w \in \Omega$ et $w(x) < 0$, et si v est la valuation singulière en x déterminée par w, le centre P_v de v sur R est appelé idéal premier singulier pour x. $\Sigma(x)$ désigne l'ensemble des valuations singulières en x déterminées par les éléments de $V(x^{-1})$.

LEMME 1. *Soit Ω une famille à caractère compact définissant l'anneau R. Soit P un idéal premier de R. Soit $x \in K$ (corps des fractions de R). Si P ne contient aucun idéal premier singulier pour x, il existe $a \in R$, $a \notin P$ tel que $ax \in R$.*

Preuve. Soit $w \in V(x^{-1})$ et soit v la valuation singulière en x déterminée par w. Par hypothèse $P \not\supseteq P_v$. Soit donc $a_w \in P_v$ tel que $a_w \notin P$. Par suite $v(a_w) > 0$, et par définition de v, $v(x)$ engendre le plus petit sous-groupe isolé de Γ_v et $v(x) < 0$. Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $nw(a_w) > -w(x)$, c'est à dire $w \in V(a_w{}^n x)$. $\{V(a_w{}^n x)\}_{w \in V(x^{-1})}$ est un recouvrement ouvert du compact $V(x^{-1})$, et par suite

$$V(x^{-1}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V(a_{w_i}{}^{n_i} x).$$

Si $a = a_{w_1}{}^{n_1} \ldots a_{wk}{}^{nk}$, $a \in R \backslash P$ et $ax \in R$.

LEMME 2. *Si Ω est une famille fine à caractère compact définissant l'anneau R, si P est un idéal premier non nul de R, et si $\Omega(P) = \{v \in \Omega | P_v \supseteq P\}$, $\Omega(P)$ est compact (et donc fermé).*

Preuve. Soit $0 \neq x \in P$. $\Omega(P) \subset V(x)$, compact. Il suffit donc de montrer que $\Omega(P)$ est fermé, ce qui ne présente pas de difficulté.

LEMME 3. *Soit Ω une famille fine à caractère compact définissant l'anneau R. Soit P un idéal premier de R tel que l'ensemble $\mathscr{E}(P)$ des idéaux premiers de R contenus dans P soit totalement ordonné par rapport à l'inclusion. Il existe alors une valuation u moins fine qu'une valuation $w' \in \Omega$ telle que $P_u = P$.*

Preuve. Cas 1. Si la valuation triviale est la seule valuation v de K associée à R telle que $P_v \subseteq P$ et telle qu'il existe $w \in \Omega$ vérifiant $v \leqq w$, posons $u =$ la valuation triviale.

Cas 2. Si par contre, il existe une valuation non triviale v_0 de K associée à R telle que $P_{v_0} \subseteq P$ et telle qu'il existe $w' \in \Omega$ vérifiant $v_0 \leqq w$, soit $w \in \Omega(P_{v_0})$. Soit

$$R_{F_P(w)} = \bigcap_{\substack{R_{v'} \supseteq R_w \\ P_{v'} \subseteq P}} R_{v'}.$$

$F_w(w)$ est la plus fine des valuations moins fines que w dont le centre est contenu dans P. Il s'agit de montrer que

$$\bigcup_{w\in\Omega(P_{v_0})} P_{F_P(w)}$$

est le centre d'une valuation $u = F_P(w)$, $w \in \Omega(P_{v0}) \subseteq \Omega$.

Soit

$$\mathscr{F}(w) = \{v \in \Omega(P_{v0}) | P_{F_P(v)} \supseteq P_{F_P(w)}\}.$$

Si $P_{F_P(w_1)} \subseteq P_{F_P(w_2)}$, alors $\mathscr{F}(w_1) \supseteq \mathscr{F}(w_2) \neq \phi$. $\mathscr{F}(w)$ est fermé; en effet, si $v \in \Omega(P_{v0})\backslash\mathscr{F}(w)$, alors $P_{F_P(v)} \not\supseteq P_{F_P(w)}$. Soit $x \in P_{F_P(w)}$ tel que $x \notin P_{F_P(v)}$; désignons par Δ le sous-groupe isolé de Γ_v engendré par $v(x)$. Comme $x \notin P_{F_P(v)}$, il existe $y \in R$ tel que $v(y)$ engendre $\Delta' \supseteq \Delta$ dans Γ_v et tel que $y \notin P$; soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $nv(y) > v(x)$. $\mathscr{F}(w) \cap V(y^n x^{-1}) = \phi$ et $v \in V(y^n x^{-1})$; par suite $\mathscr{F}(w)$ est fermé. Les $\mathscr{F}(w)$ sont des fermés contenus dans le compact $\Omega(P_{v0})$, et pour toute famille finie

$$\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \Omega(P_{v0}),$$

puisque $\mathscr{E}(P)$ est totalement ordonné par rapport à l'inclusion,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{F}(w_i) = \mathscr{F}(w_j) \neq \phi$$

pour un j, $1 \leqq j \leqq n$. Par suite

$$\bigcap_{w\in\Omega(P_{v_0})} \mathscr{F}(w) \neq \phi.$$

Soit

$$w \in \bigcap_{v'\in\Omega(P_{v_0})} \mathscr{F}(w);$$

$P_{F_P(w')} \subseteq P_{F_P(w)}$ pour tout $w' \in \Omega(P_{v0})$ et par suite,

$$\bigcup_{w'\in\Omega(P_{v_0})} P_{F_P(w')} = P_{F_P(w)}.$$

Soit $u = F_P(w)$. On a $u \leqq w \in \Omega$.

Il s'agit de voir que dans les deux cas, $P_u = P$. Cette preuve est identique à la preuve fait dans le cas fini par M. Griffin [**2**, Lemme 11, p. 83]; pour le bénéfice du lecteur, elle est reproduite. Si $P_u \subsetneqq P$, soit $x \in P$ tel que $x \notin P_u$. Nous allons démontrer que si $v \in \Sigma(x^{-1})$, $P_v \not\subseteq P$. Supposant ce fait démontré, il existe d'après le lemme 1 un $a \in R$, $a \notin P$ tel que $ax^{-1} \in R$. Comme $x \in P$, $(ax^{-1})x \in P$, c'est à dire $a \in P$, une contradiction.

Montrons que si $v \in \Sigma(x^{-1})$, $P_v \not\subseteq P$. Dans le premier cas, $P_v \subseteq P$ implique $v \leqq w \in V(x) \subseteq \Omega$, une contradiction. Dans le second cas, $\mathscr{E}(P)$ étant totalement ordonné par rapport à l'inclusion, $P_v \subseteq P_{v0}$ ou $P_{v0} \subseteq P_v$. Si $P_v \subseteq P_{v0}$, puisque $v \in \Sigma(x^{-1})$, on a $v(x) > 0$ et par suite $x \in P_v \subseteq P_{v0} \subseteq P_u$, une contradiction. Si $P_{v0} \subseteq P_v$ et si $w \in \Omega$ est tel que $v \leqq w$, alors $P_v \subseteq P_{F_P(w)} \subseteq P_u$. Mais $v(x) > 0$ et par suite $x \in P_v \subseteq P_u$, une contradiction.

Proposition 5.1. *Soit R un anneau de type C-Krull et Ω une famille de définition de R à caractère compact admettant un choix cohérent. Si u est une valuation essentielle pour R, il existe $v \in \Omega$ tel que $v \geqq u$.*

Preuve. u étant essentielle pour R, $\mathscr{E}(P_u)$ est totalement ordonné par rapport à l'inclusion. D'après le lemme 3, il existe w tel que $w \leqq v$ pour un $v \in \Omega$ et $P_w = P_u$; mais alors $w = u$ et par suite $u \leqq v \in \Omega$.

Bibliographie

1. Malcolm Griffin, *Some results on v-multiplication rings*, Can. J. Math. *19* (1967), 710–722.

2. ——— *Families of finite character and essential valuations*, Trans. Amer. Math. Soc. *130* (1968), 75–86.

3. ——— *Rings of Krull type*, J. reine angew. Math. *229* (1968), 1–28.

4. Wolfgang Krull, *Idealtheorie in unendlichen algebraischer Zahlkörpern*. II, Math. Z. *31* (1930), 527–557.

5. ——— *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche* IV: *Unendliche algebraische Erweiterungen endlicher diskreter Hauptordnungen*, Math. Z. *43* (1937), 767–773.

6. ——— *Charakterentopologie, Isomorphismentopologie und Bewertungstopologie*, Memoria de Matematica des Instituto "Jorge Juan", 1955.

7. Cécile M. Wong, *Théorèmes d'approximation pour les familles de valuations à caractère compact* (article en préparation).

8. Paulo Ribenboim, *Modules sur un anneau de Dedekind*, Summa Bras. Math. *3* (1952), 21–37.

9. ———*Anneaux normaux réels à caractère fini*, Summa Bras. Math. *3* (1956), 213–254.

10. ——— *Théorie des valuations* (Les Presses de l'Université de Montréal, 1964).

Université de Montréal,
Montréal, P.Q.

https://doi.org/10.4153/CJM-1972-034-9 Published online by Cambridge University Press