Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 5, 1984, pp. 830-882

ESPACE DES ÉTATS NORMAUX D'UN FACTEUR DE TYPE III_λ $0 < \lambda < 1$ ET D'UN FACTEUR DE TYPE III_0

JOCELYNE BION-NADAL

Introduction. Soit M un facteur de type III_λ $0 \leqq \lambda < 1$, agissant sur un espace hilbertien à base dénombrable. Le propos de ce travail est l'étude des états normaux d'un tel facteur à équivalence unitaire près. L'espace quotient n'est pas séparé; l'espace séparé associé est obtenu comme quotient de l'espace des états normaux $\mathcal{S}(M)$ par la relation d'équivalence R dont les classes sont les fermetures des orbites précédentes.

Pour étudier cet espace, on définit un calcul fonctionnel sur $M^+{}_*$ (espace des formes linéaires positives normales sur M) à valeurs dans M. Ce calcul fonctionnel est déterminé par la donnée d'une C^* algèbre d'applications de $M^+{}_*$ dans M "continues" en un certain sens, notée $C^*(M)$.

On utilise une décomposition discrète de M comme produit croisé (cf. [**1**]) : $M = N \rtimes_\theta \mathbf{Z}$ où N est de type II_∞ et θ est un automorphisme de N. On note ρ l'unique élément de $C = N \cap N'$ tel que $\tau(\theta(x)) = \tau(\rho x)$ pour tout $x \in N^+$ (τ : trace sur N). Lorsque M est de type III_λ $0 < \lambda < 1$, N est un facteur et $\rho = \lambda$. Lorsque M est de type III_0,

$$C = L^\infty(\Omega, \mu)\ \rho = \int_\Omega^\oplus \rho(\alpha) d\mu(\alpha) \leqq \lambda_0 < 1.$$

On étudie d'abord $C^*(N)$, N étant de type II_∞.

Lorsque N est un facteur, $C^*(N)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}_+^*)$. ($C^*$ algèbre des applications continues bornées de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}$ munie de la norme sup.)

Lorsque N n'est plus un facteur, on établit un isomorphisme entre $C^*(N)$ et la C^* algèbre $C_\Omega^*(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$ des classes de fonctions boréliennes bornées f sur $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$ telles que pour tout α, f_α soit continue.

Ceci étant établi, on construit des isomorphismes canoniques entre :

$-C^*(M)$ et $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+^*/\lambda^{\mathbf{Z}})$ lorsque M est de type III_λ $0 < \lambda < 1$.

$-C^*(M)$ et la C^* algèbre des classes de fonctions boréliennes bornées sur l'espace du flot des poids qui sont continues le long des orbites du flot, c'est-à-dire la sous C^* algèbre $C_\Omega^*(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}_+^*))_{\tilde\theta}$ de $C_\Omega^*(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$ constituée des classes de fonctions f invariantes par $\tilde\theta$ où

Reçu le 10 mars 1983.

$$\tilde{\theta}(f)(\alpha, x) = f(\theta_0(\alpha), \rho(\alpha)^{-1}x),$$

lorsque M est de type III_0.

On associe alors à tout $\varphi \in M^+{}_*$ une forme linéaire sur $C^*(M)$; ce qui permet d'établir une bijection

– entre $\mathscr{S}(M)/R$ et l'ensemble des mesures de Borel positives sur $\mathbf{R}^*_+/\lambda^{\mathbf{Z}}$ de mesure totale 1 si M est de type III_λ, $0 < \lambda < 1$;

– et si M est de type III_0 entre $\mathscr{S}(M)/R$ et l'ensemble $\mathfrak{M}_0$ des mesures de probabilité sur l'espace du flot des poids qui rendent négligeable tout ensemble stable par l'action du flot des poids qui est négligeable pour la classe de mesure canonique sur l'espace du flot. Autrement dit $\mathfrak{M}_0$ est l'ensemble des mesures de Borel positives ν sur F_0 vérifiant $\nu(F_0) = 1$

$$F_0 = \{ (\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}^*_+/\rho(\alpha) \leqq x < 1\}$$

telles que pour tout borélien A de F_0:

$$\mu(\pi(A)) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

où π désigne la projection canonique de F_0 sur Ω.

Finalement, lorsque M est un facteur de type III_λ $0 < \lambda < 1$, on obtient une majoration du diamètre de l'espace quotient $\mathscr{S}(M)/R$ par $2(1 - \sqrt{\lambda})$.

Ceci traite le cas des facteurs de type III_λ $0 \leqq \lambda < 1$. Lorsque M est un facteur de type III_1 on sait que le groupe unitaire agit topologiquement transitivement sur M [**4**]; c'est-à-dire que le diamètre de $\mathscr{S}(M)/R$ est nul; mais on ne sait pas encore déterminer $C^*(M)$.

Je tiens à remercier Alain Connes qui a dirigé ce travail.

Préliminaires. Les algèbres de Von Neumann étudiées dans cet article sont des algèbres de Von Neumann agissant sur un espace hilbertien à *ase* dénombrable.

Le mot "poids" signifie dans toute la suite poids normal semi-fini. On considère sur l'ensemble des poids la relation de préordre $\prec$ introduite dans [**5**] (définition I.1.2) et on note $\sim$ la relation d'équivalence associée.

Soit M une algèbre de Von Neumann de type II_∞ ou un facteur de type III_λ $0 \leqq \lambda < 1$. On définit un calcul fonctionnel "continu" sur $M^+{}_*$ (ensemble des formes linéaires positives normales sur M). C'est pourquoi on considère les applications $X:M^+{}_* \to M$ qui vérifient les propriétés suivantes :

P.1. Si $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ alors $\|X(\varphi_n)\varphi_n - X(\varphi)\varphi\| \to 0$.

P.2. Pour toute isométrie partielle u de M telle que $uu^* \in M_\varphi$ (centralisateur de φ)

$$X(\varphi_u) = u^*X(\varphi)u \quad (\text{où } \varphi_u(x) = \varphi(uxu^*)$$
$$= u^*\varphi u(x) \text{ pour tout } x \in M).$$

P.3. Si φ_1, $\varphi_2 \in M^+{}_*$ ont des supports orthogonaux:

$$X(\varphi_1 + \varphi_2) = X(\varphi_1) + X(\varphi_2).$$

On va montrer que l'ensemble de ces applications X peut-être doté d'une structure naturelle de C^* algèbre commutative.

1. Lemme. *Pour tout* $\varphi \in M^+{}_*$, $X(\varphi)$ *appartient au commutant* M'_φ *du centralisateur de* φ *donc au centre* C_φ *du centralisateur de* φ.

Démonstration. L'appartenance de $X(\varphi)$ à M'_φ résulte immédiatement de la propriété P.2. Puis l'hypothèse faite sur M entraine l'égalité $C_\varphi = M'_\varphi \cap M$ (d'après **[5]**).

2. Lemme. *Soit X vérifiant les propriétés* P.1, P.2 *et* P.3. *Alors*

$$\operatorname*{Sup}_{\varphi \in M^+{}_*} \|X(\varphi)\| < \infty.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $\varphi \in M^+{}_*$ tel que $\|X(\varphi)\| > n$. Il existe alors un projecteur $e \in M_\varphi$ tel que

$$\|X(\varphi_e)\varphi_e\| > n\|\varphi_e\| \quad (1).$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite d'isométries partielles de M telles que

$$u_n{}^*u_n = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,$$

que les supports des $u_n{}^*$ soient deux à deux orthogonaux et que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^*} u_n u_n{}^* = 1.$$

En utilisant les propriétés P.2, P.3 et un sous-ensemble fini de la suite $(u_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ on trouve un élément φ_n de $M^+{}_*$ vérifiant (1), tel que

$$\frac{1}{2n^2} < \|\varphi_n\| < \frac{1}{n}.$$

La série

$$\sum_{n \in \mathbf{N}^*} (\varphi_n)_{u_n{}^*}$$

converge alors normalement vers un élément ψ de $M^+{}_*$. Les propriétés P entrainent alors que

$$\left\| \sum_{0<n<k} (X(\varphi_n)\varphi_n)_{u_n^*} - X(\psi)\psi \right\| \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

On en déduit que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} \|X(\varphi_n)\varphi_n\|$ converge; ce qui est impossible car

$$\|X(\varphi_n)\varphi_n\| > \frac{1}{2n}.$$

On peut donc définir

$$\|X\| = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in M^+_*} \|X(\varphi)\|.$$

Par ailleurs on peut définir sur l'ensemble des applications X vérifiant les propriétés P une addition une multiplication et une involution ponctuelles par :

$$(X_1 + X_2)(\varphi) = X_1(\varphi) + X_2(\varphi)$$

$$X^*(\varphi) = (X(\varphi))^*$$

$$(X_1X_2)(\varphi) = X_1(\varphi)X_2(\varphi).$$

De ce qui précède on déduit aisément le résultat suivant:

PROPOSITION. *Soit M une algèbre de Von Neumann de type* II_∞ *ou un facteur de type* $\mathrm{III}_\lambda \quad 0 \leqq \lambda < 1$. *L'ensemble des applications X vérifiant les conditions* P *muni des opérations ponctuelles et de la norme*

$$\|X\| = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in M^+_*} \|X(\varphi)\|$$

est une C^* algèbre commutative.

On la note $C^*(M)$.

I. Etude de $C^*(N)$ lorsque N est un facteur de type II_∞. On choisit une trace normale fidèle semi-finie τ sur N. Alors pour toute forme linéaire positive normale φ sur N, il existe un opérateur positif h affilié à N de trace finie tel que $\varphi = \tau(h\ \cdot)$ (i.e., $\forall x \in N$, $\varphi(x) = \tau(hx)$). On pose alors, pour tout $X \in C^*(N)$:$X(\varphi) = X(h)$.

On note $\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+)$ la C^* algèbre des applications continues bornées de $\mathbf{R}^*_+$ dans $\mathbf{C}$ munie de la norme sup.

On se propose de montrer que $C^*(N)$ est canoniquement isomorphe à $\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+)$.

1. *Association à tout $x \in C^*(N)$ d'une application $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+)$:*

1.1. LEMME. *Soit $X \in C^*(N)$.*

a) *Soit p un projecteur, $p \in N$ tel que $\tau(p) < \infty$ $p \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*_+$. Il existe $\beta \in \mathbf{C}$ tel que $X(\alpha p) = \beta p$.*

b) *Soit q un autre projecteur non nul de N tel que $\tau(q) < \infty$; alors $X(\alpha q) = \beta q$.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. a) D'après la condition P.2, tout unitaire u de N qui commute à $h = \alpha p$ commute à $X(h)$, d'où $\{h\}' \cap N \subset \{X(h)\}'$.

En particulier, pour tout $x \in N$, pxp commute à $X(h) = pX(h)p$. D'où

$$X(h) \in N_p \cap N'_p = \mathbf{C}p.$$

Il existe donc $\beta \in \mathbf{C}$ tel que $X(h) = \beta p$.

b) N est un facteur, donc p et q sont comparables.

Par exemple $p \prec q$.

– Si q est infini, qNq est proprement infini. Il existe deux projecteurs q_1 et q_2 orthogonaux tels que

$$q = q_1 + q_2, \ q \sim q_1 \text{ et } q \sim q_2.$$

D'où deux projecteurs orthogonaux q_2 et p_1 tels que $p_1 \sim p$ $(q_2 \sim q)$. D'après a), il existe γ tel que $X(\alpha q) = \gamma q$ et η tel que

$$X(\alpha p_1 + \alpha q_2) = \eta(p_1 + q_2).$$

D'où $\beta = \eta = \gamma$.

– Si q est fini, $1 - q$ est infini et $p \prec 1 - q$.

On termine la démonstration comme dans le cas précédent.

1.2. *Définition.* Soit $X \in C^*(N)$. On peut définir une application $f:\mathbf{R}+ \to \mathbf{C}$ telle que pour tout opérateur positif

$$h = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i \quad (\alpha_i \geqq 0 p_i : \text{projecteur de trace finie},$$
$$p_i p_j = 0 \text{ pour tout } i \neq j)$$

on ait

$$X(\tau(h\ \cdot)) = \sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i) p_i,$$

et telle que $f(0) = 0$.

Ceci est possible grâce au lemme précédent et à la condition P.3.

1.3. LEMME. *Soit $X \in C^*(N)$. Soit f associée à X comme dans la Définition* 1.2 :

a) *la restriction de f à $\mathbf{R}^*_+$ est continue.*

b) *f est bornée et $\|f\|_\infty \leqq \|X\|$.*

Démonstration. a) Soit $x \in \mathbf{R}^*_+$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs qui converge vers x. Soit p un projecteur non nul de N tel que $\tau(p) < \infty$.

La condition P.1 appliquée à $\varphi = \tau(xp\ \cdot)$ et $\varphi_n = \tau(x_n p\ \cdot)$ montre que

$$x_n f(x_n) - xf(x) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty;$$

or $x \neq 0$ d'où le résultat.

b) On a déjà vu que $\|X\| < \infty$. Or pour tout $\varphi = \tau(h\ \cdot)$ où

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i,$$

$X(\varphi) = f(h)$ d'où

$$\|X(\varphi)\| = \|f(h)\| \leqq \|X\|.$$

Et

$$\operatorname*{Sup}_{\{h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\}} \|f(h)\| = \|f\|_\infty;$$

d'où le résultat.

2. *Isomorphisme entre* $C^*(N)$ *et* $\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*)$.

2.1. PROPOSITION. *La* C^* *algèbre* $C^*(N)$ *est isomorphe à la* C^* *algèbre* $\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*)$. *L'image de* $X \in C^*(N)$ *par cet isomorphisme est* $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*)$ *telle que* $X(\tau(h\ \cdot)) = f(h)$ *(pour tout h positif affilié à N de trace finie).*

(On note encore f le prolongement de f à $\mathbf{R}+$ obtenu en posant $f(0) = 0$.)

La démonstration de cette proposition s'appuie sur le lemme suivant :

2.2. LEMME. *Soit* $f:\mathbf{R}+ \to \mathbf{C}$ *continue bornée telle que* $f(0) = 0$. *Soient h,* $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *des opérateurs positifs affiliés à N tels que :* $\tau(h) < \infty$ $\tau(h_n) < \infty$ *pour tout n, et* $\tau|h - h_n| \to 0$ *quand* $n \to \infty$. *Alors*

$$\tau|f(h)h - f(h_n)h_n| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Notation. Lorsque f vérifie les hypothèses du lemme, on définit $X_f \in C^*(M)$ par $X_f(\tau(h\ \cdot)) = f(h)$ (pour tout h positif affilié à N, de trace finie).

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\operatorname{Im} \lambda| > 0$. Si f est un polynôme en $1/(x - \lambda)$ et $1/(x - \bar{\lambda})$, le résultat se vérifie facilement. Ces polynômes sont denses dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$; et

$$\tau|f(h)h - g(h)h| \leqq \|f - g\|_\infty\ \tau(h) \text{ pour tout } h;$$

donc le résultat reste vrai pour toute $f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$. Dans le cas général, on considère une suite $(\theta_p)_{p \in \mathbf{N}^*}$ de fonctions continues à support compact contenu dans $\left[\frac{1}{p+1}, p + 1\right]$ telles que $0 \leqq \theta_p(x) \leqq 1$ pour tout $x \in$

$\mathbf{R}+$ et telles que $\theta_p(x) = 1$ sur $\left[\frac{1}{p}, p\right]$. Alors $f_p = f\theta_p \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ et $x\theta_p(x)$ converge en croissant vers x sur $\mathbf{R}+$. Or

$$\|X_{f_p}(\psi)\psi - X_f(\psi)\psi\| \leqq \tau|k\theta_p(k) - k| \times \|f\|_\infty$$

pour tout $\psi = \tau(k\ \cdot)$.

Soient $\varphi = \tau(h\ \cdot)$ et $\varphi_n = \tau(h_n\ \cdot)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Il existe alors P_0 tel que

$$\|X_{f_p}(\varphi)\varphi - X_f(\varphi)\varphi\| < \epsilon \text{ pour tout } p \geqq P_0.$$

Puis il existe n_0 tel que pour $p \geqq P_0$ et $n \geqq n_0$,

$$\|X_{f_p}(\varphi_n)\varphi_n - X_f(\varphi_n)\varphi_n\| < 2\epsilon.$$

D'où le résultat.

2.3. *Démonstration de la proposition.* Soit $X \in C^*(N)$. Soit $f:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ associée à X comme dans la Définition 1.2. $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*)$ d'après 1.3.

Soit h positif affilié à N tel que $\tau(h) < \infty$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on considère la subdivision σ_p formée des $k/2^p$, $0 \leqq k \leqq p2^p$. On pose

$$h_p = \sum_{k=0}^{p2^p-1} \frac{k}{2^p}\left(q_{\frac{k+1}{2^p}} - q_{\frac{k}{2^p}}\right)$$

où $q_\lambda = X_{]-\infty,\lambda]}(h)$. Alors $\tau|h - h_p| \to 0$ et $X(h_p) = f(h_p)$ (voir la Définition 1.2).

Le Lemme 2.2 et la propriété P.1 entraînent alors que $X(h)h = f(h)h$. Si $s(h) = 1$ (i.e., $\tau(h\ \cdot)$ est fidèle), on en déduit que $X(h) = f(h)$. Sinon, on introduit un opérateur positif k tel que $\tau(k) < \infty$ et tel que $s(k) = 1 - s(h)$. D'où le résultat en utilisant P.2 et P.3.

L'application $X \in C^*(N) \to f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*)$ ainsi construite est, de façon évidente, un homomorphisme de C^* algèbres tel que $\|X\| = \|f\|_\infty$. Cet homomorphisme est surjectif; car si $f \in \mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*)$, on définit $X_f(\tau(h\ \cdot)) = f(h)$ pour tout h positif affilié à N de trace finie.

On a déjà vu que $X_f \in C^*(M)$ (Lemme 2.2).

II. Etude de $C^*(N)$ lorsque N est une algèbre de Von Neumann de type II_∞; mais n'est pas un facteur. Soit N une algèbre de Von Neumann de type II_∞ sur un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ à base dénombrable. Il existe un espace métrisable compact Ω, une mesure μ positive sur Ω de support Ω; un espace de Hilbert $\mathfrak{H}_0$ à base dénombrable; un champ μ mesurable $\alpha \mapsto N_\alpha$ de facteurs de type II_∞ sur $\mathfrak{H}_0$ et un isomorphisme de $\mathfrak{H}$ sur

$L^2(\Omega, \mu) \otimes \mathfrak{H}_0$ qui transforme N en $\int_\Omega^\oplus N_\alpha d\mu(\alpha)$. N étant de type II_∞, on peut choisir une trace normale semi-finie τ sur N^+. Il existe alors un champ μ mesurable $\alpha \mapsto \tau_\alpha$ de traces normales fidèles semi-finies sur N_α^+ tel que

$$\tau = \int_\Omega^\oplus \tau_\alpha d\mu(\alpha).$$

On suppose désormais fixé le champ $\alpha \mapsto \tau_\alpha$.

Alors, pour toute forme linéaire positive normale φ sur N, il existe un opérateur positif h affilié à N tel que $\varphi = \tau(h \cdot)$ (i.e., pour tout $x \in N$, $\varphi(x) = \tau(hx)$).

$$h = \int_\Omega^\oplus h_\alpha d\mu(\alpha) :$$

On pose alors $X(\tau(h \cdot)) = X(h)$.

$$\|\varphi\| = \tau(h) = \int_\Omega \tau_\alpha(h_\alpha) d\mu(\alpha) < \infty.$$

On se propose de montrer que dans ce cas $C^*(N)$ est isomorphe à la C^* algèbre des classes d'applications $f:\Omega \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ boréliennes bornées telles que pour tout $\alpha \in \Omega, f_\alpha$ soit continue sur $\mathbf{R}_+^*$. (f et g appartiennent à la même classe si elles ne diffèrent que sur un ensemble "saturé négligeable" i.e., sur un sous-ensemble $A \times \mathbf{R}_+^*$ de $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$ tel que $\mu(A) = 0$.)

Notation. Dans toute la suite $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)^F$, respectivement $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^F$, signifiera que $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)$, respectivement $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1$, est muni de la topologie forte

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1 = \{x \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)/\|x\| \leqq 1\}.$$

1. *Association à tout $X \in C^*(N)$ d'une application f définie sur $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$.*

1.1. PROPOSITION. *Soit $X \in C^*(N)$. Il existe une application $f:\Omega \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ telle que*

1) *Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, l'application :*

$$\Omega \to \mathbf{C}$$
$$\alpha \mapsto f(\alpha, x)$$

soit borélienne.

2) *Pour tout projecteur p de N de trace finie, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$:*

$$X(xp) = \int_\Omega^\oplus f(\alpha, x) p_\alpha d\mu(\alpha) \quad (\text{où } p = \int_\Omega^\oplus p_\alpha d\mu(\alpha)).$$

1.2. LEMME. *Soit p un projecteur de N de trace finie ($p = \int_\Omega^\oplus p_\alpha d\mu(\alpha)$). Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Il existe une application borélienne*

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned} y:\Omega &\to \mathbf{C} \\ \alpha &\mapsto y_\alpha \end{aligned}$$

telle que

$$X(xp) = \int_\Omega^\oplus y_\alpha p_\alpha d\mu(\alpha).$$

Démonstration. De la condition P.2 vérifiée par X, on déduit comme au Lemme I.1.1 que

$$X(xp) \in (pNp)' \cap (pNp) = C_p$$

(où C est le centre de N).

$C = L^\infty(\Omega, \mu)$. Il existe alors une application borélienne

$$\begin{aligned} y:\Omega &\to \mathbf{C} \\ \alpha &\mapsto y_\alpha \end{aligned}$$

telle que

$$X(xp) = \int_\Omega^\oplus y_\alpha p_\alpha d_\mu(\alpha).$$

1.3. LEMME. *Soient p et q deux projecteurs de N de trace finie. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Soient*

$$\begin{aligned} y = \Omega &\to \mathbf{C} \\ \alpha &\mapsto y_\alpha \end{aligned} \quad \textit{et} \quad \begin{aligned} y':\Omega &\to \mathbf{C} \\ \alpha &\mapsto y'_\alpha \end{aligned}$$

deux applications boréliennes telles que

$$X(xp) = \int_\Omega^\oplus y_\alpha p_\alpha d\mu(\alpha) \quad \textit{et} \quad X(xq) = \int_\Omega^\oplus y'_\alpha q_\alpha d\mu(\alpha).$$

Alors

$$\mu(\{\alpha \in \Omega/p_\alpha \neq 0;\ q_\alpha \neq 0 \textit{ et } y_\alpha \neq y'_\alpha\}) = 0.$$

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \Omega$, N_α est un facteur; donc les projecteurs p_α et q_α sont comparables. Soient

$$E_1 = \{\alpha \in \Omega/p_\alpha \prec q_\alpha\} \text{ et } E_2 = \{\alpha \in \Omega/q_\alpha \prec p_\alpha\}.$$

E_1 et E_2 sont mesurables et $E_1 \cup E_2 = \Omega$. L'application

$$\Phi:(\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1, \text{topologie forte}) \xrightarrow[x \mapsto x^*x]{} (\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1, \text{topologie faible})$$

est continue.

Soit $(\xi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite dense dans $\mathfrak{H}_0$ telle que pour tout i, $\xi_i \neq 0$. On peut supposer que pour tous $i, j \in \mathbf{N}$, les applications :

$$\begin{aligned} \Omega &\to \mathbf{C} \\ \alpha &\mapsto (p_\alpha \xi_i | \xi_i) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \Omega &\to \mathbf{C} \\ \alpha &\mapsto (q_\alpha \xi_i | \xi_i) \end{aligned}$$

sont boréliennes.

Alors $\{(\alpha, x) \in \Omega \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1 / x^*x = p_\alpha$ et $xx^* \leqq q_\alpha\}$ est borélien dans $\Omega \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^F$. Par ailleurs, l'ensemble $\mathcal{T}$ des isométries partielles de $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)$ est un sous-ensemble borélien de $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^F$ car $u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1$ est une isométrie partielle si et seulement si

$$||u^*u\xi_i|| = ||u\xi_i|| \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{N}$$

i.e.,

$$\operatorname*{Sup}_{j \in \mathbf{N}} \frac{|(u\xi_i|u\xi_j)|}{||\xi_j||} = \operatorname*{Sup}_{k \in \mathbf{N}} \frac{|u(\xi_i|\xi_k)|}{||\xi_k||} \quad \text{pour tout } i.$$

Finalement

$$B = \{(\alpha, x) \in \Omega \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1 / x \in N_\alpha \cap \mathcal{T};\ x^*x = p_\alpha \text{ et } xx^* \leqq q_\alpha\}$$

est un sous-ensemble borélien de $\Omega \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^F$. Or $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^F$ est un espace métrisable complet. On déduit de l'appendice V de [**6**], l'existence d'une application mesurable

$$\begin{aligned} E_1 &\to N_\alpha \\ \alpha &\mapsto \overset{1}{u}_\alpha \end{aligned}$$

telle que pour tout $\alpha \in E_1$, $(\alpha, \overset{1}{u}_\alpha) \in B$.

On prolonge $\overset{1}{u}_\alpha$ par 0 sur E_2. On pose

$$u = \int_\Omega^\oplus \overset{1}{u}_\alpha d\mu(\alpha).$$

$upu^* \leqq q$. Soit $p' = q - upu^*$, p' est un projecteur orthogonal à upu^*.

$$X(xq) = uX(xp)u^* + X(xp') \quad \text{d'après P.2 et P.3.}$$

En appliquant le Lemme 1.2 à $X(xp')$, on vérifie aisément que

$$\mu(\{\alpha \in E_1 / P_\alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad y_\alpha \neq y'_\alpha\}) = 0.$$

Le cas de E_2 se traite de la même façon.

1.4. *Démonstration de la Proposition* 1.1. On choisit un champ mesurable de projecteurs de $N_\alpha : \alpha \mapsto p_\alpha$ tel que pour tout $\alpha \in \Omega$,

$$p_\alpha \neq 0 \text{ et } \tau_\alpha(p_\alpha) \leqq 1.$$

Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. D'après le Lemme 1.2., il existe une application borélienne f^x de Ω dans $\mathbf{C}$ telle que

$$X(xp) = \int_\Omega^\oplus f^x(\alpha) p_\alpha d\mu(\alpha).$$

Ceci définit une application

$$f:\Omega \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$$
$$(\alpha, x) \mapsto f^x(\alpha)$$

qui satisfait à la condition 1) de la Proposition 1.1. Du Lemme 1.3, on déduit immédiatement que f vérifie également la condition 2) de cette proposition.

2. *Propriétés de l'application f.*

2.1. PROPOSITION. *Pour tout $X \in C^*(N)$, on peut choisir une application $f:\Omega \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ satisfaisant aux conditions* 1) *et* 2) *de la Proposition* 1.1 *qui de plus soit borélienne bornée; et telle que, pour tout $\alpha \in \Omega$, l'application*

$$f_\alpha:\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$$
$$x \mapsto f(\alpha, x)$$

soit continue.

La première difficulté consiste à montrer l'existence d'une application borélienne satisfaisant aux conditions 1 et 2 de la Proposition 2.1.

On choisit tout d'abord une application f quelconque vérifiant les conditions 1 et 2 de la Proposition 1.1.

Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on note

$$Y_x:\Omega \to \mathbf{C},$$
$$\alpha \mapsto f(\alpha, x)$$

Y_x est borélienne $Y = (Y_x)_{x \in \mathbf{R}_+^*}$ définit alors une fonction aléatoire.

2.2. LEMME. *La fonction aléatoire $Y = (Y_x)_{x \in \mathbf{R}_+^*}$ est continue en probabilité sur $\mathbf{R}_+^*$.*

Démonstration. Pour prouver ceci, il suffit de vérifier que, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$, pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $y_n \in \mathbf{R}_+^*$, qui converge vers x_0, pour tout $\epsilon > 0$, $\mu(A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$; où

$$A_n = \{\alpha \in \Omega / |f(\alpha, y_n)y_n - f(\alpha, x_0)x_0| > \epsilon\}.$$

Soit $\alpha \mapsto p_\alpha$ un champ mesurable de projecteurs de N_α tels que

$$\tau_\alpha(p_\alpha) = 1 \quad \text{pour tout } \alpha \in \Omega.$$

Soient

$$h = \int_\Omega^\oplus x_0 p_\alpha d\mu(\alpha), \quad h_n = \int_\Omega^\oplus y_n p_\alpha d\mu(\alpha), \quad p = \int_\Omega^\oplus p_\alpha d\mu(\alpha).$$

$\tau|h_n - h| = |y_n - x_0|\tau(p) \to 0$ quand $n \to \infty$. La propriété P.1. entraîne que:

$$\tau|X(h_n)h_n - X(h)\,h| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Or

$$\tau|X(h_n)h_n - X(h)h| \geqq \epsilon\mu(A_n).$$

2.3. Corollaire. *Soit* $X \in C^*(N)$. *Il existe une application* $f^0:\Omega \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ *borélienne, vérifiant les propriétés* 1) *et* 2) *de la Proposition* 1.1, *telle que*: *pour tout* $x \in \mathbf{R}_+^*$, *pour tout* $\alpha \in \Omega$, *il existe une suite* $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $r_n \in \mathbf{Q}_+^*$ *qui converge vers* x *telle que la suite* $f^0(\alpha, r_n)$ *converge vers* $f^0(\alpha, x)$.

Démonstration. Du Théorème III 4.4 de [7], on déduit l'existence d'une fonction aléatoire $Y^0 = (Y_x^0)_{x\in\mathbf{R}_+^*}$ séparable, borélienne et équivalente à Y. D'après la Proposition III.4.2 de [7], Y^0 admet $\mathbf{Q}_+^*$ comme partie séparante i.e., : il existe un sous-ensemble borélien N de Ω de mesure nulle tel que, pour tout $\alpha \in \Omega - N$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, il existe une suite (r_n), $r_n \in \mathbf{Q}_+^*$ telle que $r_n \to x$ et que $Y_{r_n}^0(\alpha) \to Y_x^0(\alpha)$.

On pose alors

$$f^0(\alpha, x) = Y_x^0(\alpha) \times \frac{1}{x}\chi_{CN}(\alpha) \text{ pour tout } (\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^*.$$

2.4. Lemme. *Soit* $X \in C^*(N)$; *soit* f^0 *associée à* X *comme en* 2.3; *pour presque tout* $\alpha \in \Omega$,

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbf{R}_+^*} |f^0(\alpha, x)| \leqq \|X\|.$$

Démonstration. On sait déjà que $\|X\| < \infty$ (d'après le préliminaire). Pour tout $r \in \mathbf{Q}_+^*$ on pose

$$B_r = \{\alpha \in \Omega / |f^0(\alpha, r)| > \|X\|\}.$$

Soit

$$p = \int_\Omega^\oplus p_\alpha d\mu(\alpha)$$

un projecteur de N tel que pour tout $\alpha \in \Omega$, p_α soit un projecteur de N_α vérifiant

$$\tau_\alpha(p_\alpha) = \chi_{B_r}(\alpha).$$

Alors

$$\begin{aligned}\|X(rp)\| &= \left\|\int_\Omega^\oplus f^0(\alpha, r)p_\alpha d\mu(\alpha)\right\| \\ &= \operatorname*{Sup\,ess}_{\alpha\in B_r} |f^0(\alpha, r)|.\end{aligned}$$

Or $\|X(rp)\| \leqq \|X\|$. D'où $\mu(B_r) = 0$.

Soit

$$A = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}_+^*} \{\alpha \in \Omega / |f^0(\alpha, r)| > \|X\|\}.$$

$\mu(A) = 0$; et pour tout $\alpha \in \Omega - A$,

$$|f^0(\alpha, x)| \leqq \|X\| \text{ pour tout } x \in \mathbf{R}_+^*$$

grâce au Corollaire 2.3.

2.5. LEMME. *Pour presque tout $\alpha \in \Omega$, f_α^0 est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.4, on peut supposer que f^0 est bornée sur $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$ par $\|X\|$. On pose, pour tout $\alpha \in \Omega$,

$$g_\alpha^0(x) = f_\alpha^0(x)x \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+^*.$$

Soit

$$\mathscr{D} = \{(\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* \text{ tels que } x \text{ soit un point de discontinuité de } f_\alpha^0\}.$$

Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$ soit

$$\mathscr{B}_p = \left\{ (\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* / \forall n \in \mathbf{N} \exists r, s \in \mathbf{Q}_+^* \text{ tels que } |x - r| < \frac{1}{n}; |x - s| < \frac{1}{n} \text{ et } |g_\alpha^0(r) - g_\alpha^0(s)| > \frac{1}{p} \right\}.$$

On vérifie que

$$\mathscr{D} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}^*} \mathscr{B}_p.$$

L'inclusion $\mathscr{B}_p \subset \mathscr{D}$ est triviale.

Réciproquement : Soit x un point de discontinuité de f_α^0 donc g_α^0; f_α^0 étant bornée, il existe $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et l, éléments de $\mathbf{R}_+^*$ tels que : $l \neq g_\alpha^0(x)$, x_n converge vers x et $g_\alpha^0(x_n)$ converge vers l. Du Corollaire 2.3, on déduit alors l'existence d'une suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $z_n \in \mathbf{Q}_+^*$ qui converge vers x et telle que la suite $g_\alpha^0(z_n)$ converge vers l. On en déduit aussi l'existence d'une suite $(z'_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $z'_n \in \mathbf{Q}_+^*$ qui converge vers x et telle que la suite $(g_\alpha^0(z'_n))$ converge vers $g_\alpha^0(x)$.

Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$p > \frac{2}{|l - g_\alpha^0(x)|};$$

$(\alpha, x) \in \mathscr{B}_p$ d'où $\mathscr{D} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}^*} \mathscr{B}_p$.

Soit π la projection de $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$ sur Ω; soit $E_p = \pi(\mathscr{B}_p)$. D'après ce qui précède,

$$\{\alpha \in \Omega / f^0_\alpha \text{ ne soit pas continue sur } \mathbf{R}^*_+\} = \bigcup_{p \in \mathbf{N}^*} E_p.$$

$\mathscr{B}_p$ est borélien tandis que $\mathbf{R}^*_+$ est polonais. De l'appendice V de [**6**], on déduit l'existence d'une application borélienne

$$\begin{aligned} \varphi : E_p &\to \mathbf{R}^*_+ \\ \alpha &\mapsto \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

telle que, pour tout $\alpha \in E_p$, $(\alpha, \varphi(\alpha)) \in \mathscr{B}_p$.

Soit

$$\mathscr{B}_{n,p} = \Big\{ (\alpha, r, s) \in E_p \times \mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}^*_+ / r, s \in \mathbf{Q};$$
$$|r - \varphi(\alpha)| < \frac{1}{n}, |s - \varphi(\alpha)| < \frac{1}{n} \text{ et } |g^0_\alpha(r) - g^0_\alpha(s)| > \frac{1}{p} \Big\}.$$

$\mathscr{B}_{n,p}$ est borélien.

Il existe alors des applications φ_n, ψ_n boréliennes, définies sur E_p à valeurs dans $\mathbf{R}^*_+$, telles que

$$(\alpha, \varphi_n(\alpha), \psi_n(\alpha)) \in \mathscr{B}_{n,p} \quad \text{pour tout } \alpha \in E_p.$$

Soit $\alpha \to p_\alpha$ un champ mesurable de projecteurs de N_α tels que

$$\tau_\alpha(p_\alpha) = \chi_{E_p}(\alpha) \quad \text{pour tout } \alpha \in \Omega.$$

Soient

$$h = \int_\Omega^\oplus \varphi(\alpha) p_\alpha d\mu(\alpha);$$

$$h_n = \int_\Omega^\oplus \varphi_n(\alpha) p_\alpha d\mu(\alpha);$$

$$k_n = \int_\Omega^\oplus \psi_n(\alpha) p_\alpha d\mu(\alpha).$$

Alors $\tau|h - h_n| \to 0$; $\tau|h - k_n| \to 0$ quand $n \to \infty$. Or les fonctions φ_n et ψ_n sont à valeurs dans un ensemble dénombrable ($\mathbf{Q}$), donc

$$X(h_n)h_n = \int_\Omega^\oplus (g^0_\alpha(\varphi_n(\alpha)) p_\alpha d\mu(\alpha) \quad \text{et}$$

$$X(k_n)k_n = \int_\Omega^\oplus (g^0_\alpha(\psi_n(\alpha)) p_\alpha d\mu(\alpha).$$

D'où

$$\tau|X(h_n)h_n - X(k_n)k_n| > \frac{1}{n} \mu(E_p).$$

De la condition P.1 vérifiée par X, on déduit alors que $\mu(E_p) = 0$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

2.6. *Démonstration de la Proposition* 2.1. D'après les Lemmes 2.4 et 2.5, il existe un sous-ensemble borélien A de Ω de mesure nulle tel que $f' = f^0\chi_{CA\times\mathbf{R}^*}$ satisfasse toutes les conditions de la Proposition 2.1.

2.7. *Définition et notation.*

1. Soit f borélienne bornée sur $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$. On note encore f le prolongement de f à $\Omega \times \mathbf{R}_+$ obtenu en posant $f_\alpha(0) = f(\alpha, 0) = 0$ pour tout $\alpha \in \Omega$.

2. Sur l'algèbre des fonctions boréliennes bornées $f:\Omega \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$, telles que pour tout α, f_α soit continue sur $\mathbf{R}_+^*$, on définit la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par : $f \mathscr{R} g$ si et seulement si $f_\alpha = g_\alpha$ pour presque tout $\alpha \in \Omega$; c'est-à-dire si et seulement si f et g ne diffèrent que sur un sous-ensemble A "saturé négligeable" de $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$ (i.e., $\mu(\pi(A)) = 0$ où π désigne la projection de $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$ sur Ω).

Pour simplifier les notations on notera encore f la classe de f.

L'algèbre des classes d'équivalence de fonctions munie de $\| \|_\infty$ et de l'involution $f^* = \bar{f}$ est évidemment une C^* algèbre. On la notera $C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$.

3. Isomorphisme entre $C^*(N)$ et $C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$.

3.1. *Définition.* Soit $f \in C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$. On peut définir $X_f:N_*^+ \to N$ en posant

$$X_f(\tau(h\,\cdot)) = \int_\Omega^\oplus f_\alpha(h_\alpha)d\mu(\alpha),$$

pour tout opérateur h positif affilié à N de trace finie.

3.2. Proposition. *La C^* algèbre $C^*(N)$ est isomorphe à la C^* algèbre $C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$. L'image de $X \in C^*(N)$ par cet isomorphisme est l'unique élément f de $C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$ tel que $X = X_f$.*

3.3. Lemme. *Soit $f \in C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$. Alors $X_f \in C^*(N)$.*

Démonstration. Il est évident que X_f vérifie les propriétés P.2 et P.3. Il reste à prouver la "continuité" de X_f : Soit

$$M = \operatorname*{Sup}_{(\alpha,x)} |f(\alpha, x)|.$$

Soient h, h_n des opérateurs positifs affiliés à N de trace finie tels que

(i) $\tau|h - h_n| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $\epsilon > 0$;

$$\tau(h) = \int_\Omega \tau_\alpha(h_\alpha)d\mu(\alpha) < \infty.$$

Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout sous ensemble mesurable E de Ω de mesure inférieure à η,

$$\int_E \tau_\alpha(h_\alpha)d\mu(\alpha) < \frac{\epsilon}{2}.$$

De (i) on déduit qu'il existe N_0 tel que pour tout $n \geqq N_0$:

$$\mu(E) < \eta \Rightarrow \int_E \tau_\alpha(h_{n,\alpha})d\mu(\alpha) < \epsilon.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$A_n = \{\alpha \in \Omega/ \left(k \text{ positif affilié à } N_\alpha \text{ et}\right.$$

$$\left.\tau_\alpha|k - h_\alpha| < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \tau_\alpha|f_\alpha(k)k - f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha| \leqq \epsilon\}.$$

A_n est mesurable, car : $L^1(N_\alpha)$ est séparable; soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble dénombrable dense de $L^1(N_\alpha)$. De I Lemme 2.2, on déduit que:

$$CA_n = \bigcup_{k \in \mathcal{D}} \{\alpha \in \Omega/\tau_\alpha|k - h_\alpha| < \frac{1}{n} \text{ et}$$

$$\tau_\alpha|f_\alpha(k)k - f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha| > \epsilon\}.$$

A_n est mesurable pour tout n, $A_n \subset A_{n+1}$ et

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} A_n.$$

(d'après I.2.2). Par ailleurs $\tau|h - h_p| \to 0$. Il existe alors $N_1 \geqq N_0$, $P_0 \in \mathbf{N}^*$ et $A \subset \Omega$ avec $\mu(A) < \eta$ tels que pour tout $\alpha \in \Omega - A$, pour tout $p \geqq P_0$,

$$\tau_\alpha|h_{p,\alpha} - h_\alpha| < \frac{1}{N_1} \quad \text{et}$$

$$\tau_\alpha|f_\alpha(h_{p,\alpha})h_{p,\alpha} - f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha| < \epsilon.$$

Alors

$$\int_\Omega \tau_\alpha|f_\alpha(h_{p,\alpha})h_{p,\alpha} - f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha|d\mu(\alpha) < \epsilon(\mu(\Omega) + 2M).$$

3.4. *Démonstration de la Proposition* 3.2. Du Lemme 3.3 on déduit l'existence d'un homomorphisme de C^* algèbres

$$\begin{aligned}\Phi: C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+)) &\to C^*(N)\\ f &\mapsto X_f\end{aligned}$$

Φ est surjectif : Soit $X \in C^*(N)$. Soit f associée à X comme dans la Proposition 2.1. Pour tout projecteur p de N tel que $\tau(p) < \infty$; pour tout $x \in \mathbf{R}^*_+$:

$$X(\tau(xp\ \cdot)) = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(x)p_\alpha d\mu(\alpha) = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(xp_\alpha)d\mu(\alpha)$$

$$\left(\text{avec } p = \int_{\Omega}^{\oplus} p_\alpha d\mu(\alpha)\right).$$

Soit h positif affilié à N de trace finie. Pour $p \in \mathbf{N}^*$, on définit h_p comme dans la démonstration de la Proposition I.2.1. Et de même

$$X(h_p) = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(h_{p,\alpha})d\mu(\alpha).$$

Le Lemme 3.3 et la continuité de X entraînent que

$$X(h)h = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha d\mu(\alpha).$$

De même qu'en I.2.3, on en déduit que

$$X(h) = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(h_\alpha)d\mu(\alpha).$$

Ainsi $X = X_f$.

Φ est injectif : Si $X_f = X_g$; pour tout $x \in \mathbf{R}+$, $f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ pour presque tout $\alpha \in \Omega$. Soit

$$E = \bigcup_{r \in \mathbf{Q}^*_+} \{\alpha \in \Omega / f_\alpha(r) \neq g_\alpha(r)\}.$$

E est borélien de mesure nulle; et pour tout $\alpha \in CE$, pour tout $x \in \mathbf{R}+$, $f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$ (par continuité de f_α et g_α).

III. Cas des facteurs de type $\mathrm{III}_\lambda \quad 0 < \lambda < 1$. Soit M un facteur de type $\mathrm{III}_\lambda \quad 0 < \lambda < 1$.

On établit dans ce paragraphe un isomorphisme de C^* algèbres entre $C^*(M)$ et $\mathscr{C}(S_1)$ (ensemble des fonctions continues sur le cercle unité muni de la norme sup); puis une bijection entre les classes d'équivalence topologique d'états sur M et les mesures de Borel positives sur le cercle de masse totale 1.

Ensuite, on donne une caractérisation de $S_p\ \Delta_\varphi$ en fonction des supports des mesures $\mu_{\alpha\varphi} \quad (\alpha \in \mathbf{R}^*_+)$.

Finalement on montre que le diamètre de l'espace quotient $\rho(M)/\mathscr{U}(M)$ est majoré par $2(1 - \sqrt{\lambda})$ lorsque M est un facteur de type $\mathrm{III}_\lambda \quad 0 < \lambda < 1$.

D'après [**1**] paragraphe IV, il existe une trace généralisée φ^0 sur M. Alors $N = M_{\varphi^0}$ est un facteur de type II_∞; $\varphi^0|_{N^+} = \tau$ est une trace normale fidèle semi-finite sur N^+; et il existe un automorphisme θ de N et un unitaire U de M,

$$U \in M(\sigma^{\varphi^0}, \{\lambda^{-1}\})$$

tels que $\theta(x) = UxU^*$ et que $M = N \rtimes_\theta \mathbf{Z}$.

On note E l'unique espérance conditionnelle de M sur N.

1. *Etude de* $C^*(M)$. h étant positif affilié à N, on note $\omega_h \circ E$ le poids sur M défini par

$$\omega_h \circ E(x) = \varphi^0(hx) = \tau(hE(x)).$$

D'après le Théorème II.2.4 de [**5**], pour tout poids ψ sur M il existe un $h \in N^+$, vérifiant $\lambda s(h) \leqq h < 1$, et tel que $\psi \sim \omega_h \circ E$. (Ici et dans toute la suite, la notation $h < 1$ signifie $h \leqq 1$ et $1 - h$ non singulier.)

Les applications $X \in C^*(M)$ sont donc déterminées par leurs valeurs sur les poids de la forme $\omega_h \circ E$. On pose

$$T_0 = \frac{2\pi}{\log \lambda}.$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

1.1. Theoreme. *La C^* algèbre $C^*(M)$ est isomorphe à la C^* algèbre $\mathscr{C}(S_1)$. L'isomorphisme que l'on construit associe à tout $X \in C^*(M)$ une application $f \in \mathscr{C}(S_1)$ telle que $X(\omega_h \circ E) = \tilde{f}(h)$ (h positif affilié à N de trace finie) où $\tilde{f}$ est définie sur $\mathbf{R}+$ par*

$$\tilde{f}(x) = f(e^{iT_0 \mathrm{Log} x}) \text{ pour tout } x \neq 0 \quad \tilde{f}(0) = 0.$$

1.2. Lemme. *Soit $X \in C^*(M)$. Pour tout opérateur positif h affilié à N de trace finie, $X(\omega_h \circ E) \in N$.*

Démonstration.

$$X(\varphi) \in M'_\varphi \cap M; \quad \varphi = \omega_h \circ E, \ M'_\varphi \subset M'_{\varphi^0}$$

d'où $X(\varphi) \in N$.

Ceci permet de définir une application:

$$N^+{}_* \to N$$
$$\omega_h \mapsto X(\omega_h \circ E)$$

satisfaisant aux conditions P et de même norme que X. On déduit de la Proposition I.2.1, l'existence d'une fonction $\tilde{f}$ bornée sur $\mathbf{R}+$ telle que $\tilde{f}_{|\mathbf{R}^*}$ soit continue, $\tilde{f}(0) = 0$, et qui vérifie pour tout h

$$X(\omega_h \circ E) = \tilde{f}(h).$$

1.3. *Démonstration du Théorème* 1.1. On vérifie que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(\lambda x)$.

En effet : pour tout h,

$$X(\omega_h \circ \theta \circ E) = X(\omega_{\lambda\theta^{-1}(h)} \circ E)$$

d'où

$$\tilde{f}(\lambda\theta^{-1}(h)) = U^*\tilde{f}(h)U.$$

En appliquant ceci à $h = xe$ où $x \in \mathbf{R}+$ et où e est un projecteur de trace finie, on obtient $\tilde{f}(\lambda x) = \tilde{f}(x)$.

On définit alors f sur S_1 par

$$f(e^{i\theta}) = \tilde{f}(e^{\theta/T_0}); f \in \mathscr{C}(S_1).$$

$\|f\|_\infty = \|X\|$. On note j l'homomorphisme de $C^*(M)$ dans $\mathscr{C}(S_1)$, défini par $j(X) = f$. Il reste à vérifier que j est surjectif.

Soit $f_n \in \mathscr{C}(S_1)$ définie par $f_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$.

Pour tout $\varphi \in M^+{}_*$, on pose

$$X_n(\varphi) = (D\varphi : D\tau \circ E)_{nT_0}$$

(cf la Définition 1.2 de [**1**]). Alors pour toute isométrie partielle u telle que $uu^* \in M_\varphi$:

$$X_n(u^*\varphi u) = (D(u^*\varphi u) : D(\tau \circ E))_{nT_0} = u^*X_n(\varphi)u$$

(d'après I.1.4 de [**5**], et parce que $\sigma_{nT_0}^{\tau\circ E} = \mathrm{id}$). Par ailleurs P.3 est trivialement vrai. De plus

$$X_n(\omega_h \circ E) = h^{inT_0}$$

d'où

$$X_n(\omega_h \circ E) = \tilde{f}_n(h)$$

$$(\tilde{f}_n(s) = s^{inT_0} \quad \forall s > 0, \tilde{f}_n(0) = 0).$$

Si $\|\varphi_k - \varphi\| \to 0$; on définit θ_k et θ sur $M \otimes F_2$ par :

$$\theta_k\left(\sum_{1 \leqq i,j \leqq 2} x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \tau \circ E(x_{11}) + \varphi_k(x_{22})$$

et

$$\theta\left(\sum_{1 \leqq i,j \leqq 2} x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \tau \circ E(x_{11}) + \varphi(x_{22}).$$

Alors $\|\theta_k - \theta\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Du Théorème 1 de [**2**] appliqué à $x = 1 \otimes e_{21}$, on déduit que $(D_{\varphi k} : D\tau \circ E)_{nT_0}$ converge fortement vers $(D\varphi : D\tau \circ E)_{nT_0}$. D'où

$$\|X_n(\varphi_k)\varphi_k - X_n(\varphi)\varphi\| \to 0,$$

$$X_n \in C^*(M) \text{ et } j(X_n) = f_n.$$

L'image par j de la C^* algèbre $C^*(M)$ contient l'algèbre engendrée par les f_n qui est dense dans $\mathscr{C}(S_1)$; donc j est un isomorphisme de $C^*(M)$ sur $\mathscr{C}(S_1)$.

2. *Caractérisation de l'équivalence topologique de deux états par l'égalité des mesures sur S_1 qui leur sont associées.* Pour toute application $f \in \mathscr{C}(S_1)$, on note $\tilde{f}$ l'application définie sur $\mathbf{R}+$ par

$$\tilde{f}(x) = f(e^{iT_0 \mathrm{Log}\, x})$$

pour tout $x \neq 0$ et $\tilde{f}(0) = 0$ (comme précédemment).

A tout état φ sur M, on associe la forme linéaire L_φ sur $\mathscr{C}(S_1)$ définie par

$$L_\varphi(f) = \varphi(X_{\tilde{f}}(\varphi))$$

(où $X_{\tilde{f}}(\omega_h \circ E) = \tilde{f}(h)$).

Et on appelle μ_φ l'unique mesure définie sur S_1 par L_φ (Théorème de Riesz). On va montrer le résultat suivant:

2.1. THEOREME. 1) *Soient φ et $\psi \in M^+{}_*$ tels que ψ soit adhérent à l'orbite de φ (i.e., il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $\varphi_n \sim \varphi$ et $\|\varphi_n - \psi\| \to 0$ quand $n \to \infty$).*

Alors $\mu_\varphi = \mu_\psi$.

2) *Soient φ, $\psi \in M^+{}_*$ tels que $\mu_\varphi = \mu_\psi$; alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\varphi_n \in M^+{}_*$, telle que $\forall\, n \in \mathbf{N}$*

$$\text{Supp } \varphi_n = \text{Supp } \psi,\ \varphi_n \sim \varphi,\ \textit{et}$$

$$\|\varphi_n - \psi\| \to 0 \textit{ quand } n \to \infty.$$

2.2. COROLLAIRE. *On peut définir une relation d'équivalence R par $\varphi R \psi$ si et seulement si ψ est adhérent à l'orbite de φ; le quotient $M^+{}_*/R$ est séparé. (Ceci est une conséquence évidente du Théorème.)*

Démonstration du Théorème. 1) Si $\varphi_n \sim \varphi$ et si $\|\varphi_n - \psi\| \to 0$; il est évident (d'après les propriétés P.1 et P.2 vérifiées par les applications X) que $\mu_\varphi = \mu_\psi$.

Le 2) résultera immédiatement du Théorème I.2.2 de **[5]** et du lemme suivant.

2.3. LEMME. *Soient h_1, $h_2 \in N^+$, $\lambda s(h_1) \leqq h_1 \leqq 1$; et $1 - h_1$ non singulier. $\lambda s(h_2) \leqq h_2 \leqq 1$ et $1 - h_2$ non singulier, vérifiant l'égalité :*

$$(\omega_{h_1} \circ E)X(\omega_{h_1} \circ E) = (\omega_{h_2} \circ E)X(\omega_{h_2} \circ E) \quad \textit{pour tout } X \in C^*(M).$$

Alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'isométries partielles de N telles que

$$u_n u_n^* = s(h_1);\ u_n^* u_n = s(h_2) \quad \textit{pour tout } n,$$

et que

$$\|u_n^*(\omega_{h_1} \circ E)u_n - \omega_{h_2} \circ E\| \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty$$

$$(\textit{i.e., } \tau|u_n^* h_1 u_n - h_2| \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty).$$

Démonstration du lemme. Soit $\mu \in \mathbf{R}+$; on pose

$$p_\mu = \chi_{]-\infty,\mu]}(h_1) \quad \text{et} \quad q_\mu = \chi_{]-\infty,\mu]}(h_2).$$

Pour tout $\mu \in]\lambda, 1]$, la fonction $\chi_{]\lambda,\mu]}$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions g_n définies sur $\{0\} \cup [\lambda, 1]$ telles que $g_n(0) = g_n(\lambda) = g_n(1) = 0$, et dont les restrictions à $[\lambda, 1]$ soient continues; alors, par hypothèse

$$\tau(g_n(h_1)) = \tau(g_n(h_2)).$$

La normalité de τ jointe à la non singularité de $1 - h_1$ et $1 - h_2$ entraine pour tout $\mu \in [\lambda, 1]$ l'égalité

$$\tau(p_\mu - p_0) = \tau(q_\mu - q_0) < \infty.$$

Il existe donc une isométrie partielle u_μ de N telle que

$$p_\mu - p_0 = u_\mu u_\mu^* \quad \text{et} \quad q_\mu - q_0 = u_\mu^* u_\mu.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$; pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}$ on pose

$$\alpha_k = \lambda + \frac{(1 - \lambda)k}{2^n}.$$

On construit par récurrence sur k une isométrie partielle $u_{n,k} \in N$ telle que :

$$u_{n,k}u_{n,k}^* = p_{\alpha_k} - p_0;\ u_{n,k}^* u_{n,k} = q_{\alpha_k} - q_0.$$

$$u_{n,k}(u_{n,k-1}^* u_{n,k-1}) = u_{n,k-1};\ u_{n,k}{}^*(u_{n,k-1}u_{n,k-1}{}^*) = u_{n,k-1}{}^*.$$

On pose

$$v_n = u_{n,2^n} \cdot v_n \in N \cdot v_n v_n^* = \operatorname{Supp} h_1;$$

$$v_n{}^* v_n = \operatorname{Supp} h_2 \quad \text{et}$$

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, 2^n\},\ v_n(q_{\alpha_i} - q_0) = u_{n,i};$$

$$v_n^*(p_{\alpha_i} - p_0) = u_{n,i}{}^*.$$

Soient

$$h_{1,n} = \lambda(p_\lambda - p_0) + \sum_{i=0}^{2^n - 1} \alpha_i (p_{\alpha_{i+1}} - p_{\alpha_i})$$

et

$$h_{2,n} = \lambda(q_\lambda - q_0) + \sum_{i=0}^{2^n - 1} \alpha_i (q_{\alpha_{i+1}} - q_{\alpha_i}).$$

$v_n^* h_{1,n} v_n = h_{2,n}$. D'où

$$\tau|v_n^* h_1 v_n - h_2| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

3. *Etude des mesures* μ_φ *où* φ *est un état sur* M.

3.1. PROPOSITION. *Pour toute mesure régulière positive* μ *sur* S_1 *telle que* $\mu(S_1) = 1$, *il existe un état* φ *sur* M *tel que* $\mu = \mu_\varphi$.

La proposition résultera du lemme suivant :

3.2. LEMME. *Soit* φ *une fonction positive croissante sur* $[\lambda, 1]$ *continue à droite en tout point de* $[\lambda, 1[$ *et à gauche au point* 1; *il existe alors* $h \in N^+$ *tel que* $\lambda s(h) \leqq h \leqq 1$; $1 - h$ *non singulier*; *et tel que pour tout* $\mu \in [\lambda, 1]$,

$$\varphi(\mu) = \tau(p_\mu - p_0)$$

(*où* $p_\mu = \chi_{]-\infty,\mu]}(h)$).

Ceci est un résultat classique dans les facteurs de type II_∞. (On pose $\alpha_0 = \lambda$, $\alpha_1 = 1$ et $\{\alpha_n, n > 1\} =]\lambda, 1[\cap \mathbf{Q}$. On construit une suite (q_{α_n}) de projecteurs de N tels que $\tau(q_{\alpha_n}) = \varphi(\alpha_n)$ et que $\alpha_i \leqq \alpha_j \Rightarrow q_{\alpha i} \leqq q_{\alpha j}$. Puis pour tout $t \in [\lambda, 1]$ on pose

$$q_t = \inf \{q_{\alpha_i}; \alpha_i > t\}.$$

Le résultat en découle alors immédiatement.)

3.3. *Démonstration de la Proposition* 3.1. Soit μ_1 une mesure positive régulière sur S_1 telle que $\mu_1(S_1) = 1$. Soit L définie sur $\mathscr{C}(S_1)$ par

$$L(f) = \int_{S_1} f d\mu_1.$$

Soit

$$\begin{aligned} j_0 : [\lambda, 1] &\to S_1. \\ x &\mapsto e^{iT_0 \operatorname{Log} x} \end{aligned}$$

On définit μ_0 sur $[\lambda, 1]$, en posant pour tout sous ensemble borélien A de $[\lambda, 1]$

$$\mu_0(A) = \mu_1(j_0(A \cap [\lambda, 1[\,).$$

Puis on définit ν sur $[\lambda, 1]$ en posant pour tout sous-ensemble borélien A de $[\lambda, 1]$

$$\nu(A) = \int_A \frac{1}{t} d\mu_0(t).$$

$\forall t \in [\lambda, 1]$ on pose

$$\varphi(t) = \nu(\,[\lambda, t]\,) = \int_{[\lambda,t]} \frac{1}{s} d\mu_0(s).$$

Il est clair que φ vérifie les hypothèses du Lemme 3.2. D'où l'existence de $h \in N^+$ satisfaisant aux conclusions du lemme.

Soit $f \in \mathscr{C}(S_1)$. Soit $\widetilde{f}$ associée à f comme dans le Théorème 1.1 :

$$\widetilde{f}_{|[\lambda,1]} = f \circ j_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{S_1} f d\mu_1 = \int_{[\lambda,1[} f \circ j_0(x) d\mu_0(x) \\ &= \int_{[\lambda,1]} \widetilde{f}(x) d\mu_0(x) = \int_{[\lambda,1]} \widetilde{f}(x) x d\nu(x) \\ &= \int_{[\lambda,1]} \widetilde{f}(x) x d\tau(p_x). \end{aligned}$$

Or $Sph \subset \{0\} \cup [\lambda, 1]$ et $\widetilde{f}(0) = 0$ d'où

$$\tau(\widetilde{f}(h)h) = \int_{\mathbf{R}+} \widetilde{f}(x) x d\tau(p_x) = \int_{[\lambda,1]} \widetilde{f}(x) x d\tau(p_x) = L(f).$$

Soit $\psi = \tau(hE(\cdot))$. Alors

$$L_\psi(f) = \tau(\widetilde{f}(h)h) = L(f)$$

d'où $L = L_\psi; \mu_1 = \mu_\psi$, et

$$\tau(h) = \int_{[\lambda,1]} x d\tau(p_x) = L(1) = \mu_1(S_1) = 1.$$

3.4. Theoreme. *$\rho(M)/R$ est en bijection avec les mesures régulières positives sur le cercle de masse totale* 1.

Ceci est une conséquence immédiate du Théorème 2.1 et de la Proposition 3.1.

3.5. *Etats associés à des mesures discrètes.*

Proposition. *Soient $a_1, \ldots, a_k \in S_1$ et soit*

$$\mu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \, \delta_{a_i} \quad \left(\lambda_i \in \mathbf{R}+ \quad et \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\right).$$

Les états φ sur M tels que $\mu = \mu_\varphi$ sont ceux qui sont équivalents (au sens $\sim$ et non pas seulement topologiquement équivalents) à

$$\psi = \tau(hE(\cdot)) \quad où\ h = \sum_{i=1}^k b_i p_i$$

avec

$$b_i \in [\lambda, 1[\quad et \quad e^{iT_0 \mathrm{Log} b_i} = a_i$$

et où les p_i sont des projecteurs deux à deux orthogonaux tels que $b_i\,\tau(p_i) = \lambda_i$.

Démonstration. D'après le Théorème I.2.2 de [**5**] on peut supposer que $\varphi = \omega_h \circ E$, $\lambda s(h) \leqq h \leqq 1$ et $1 - h$ non singulier.

Si il existe $c \in Sp(h) \cap [\lambda, 1[$ tel que

$$e^{iT_0 \mathrm{Log}\, c} \notin \{(a_i)_{1 \leqq i \leqq k}\};$$

alors il existe $\epsilon > 0$ et $f \in \mathscr{C}(S_1)$ tels que

$$\operatorname{Supp} f \subset S_1 - \{(a_i)_{1 \leqq i \leqq k}\};$$

telle que

$$f(x) \geqq \quad 0 \forall x$$

et que

$$f(x) \geqq \frac{1}{2} \forall\ x \in [e^{iT_0 \mathrm{Log}(c-\epsilon)}, e^{iT_0 \mathrm{Log}(c+\epsilon)}].$$

$$\int_{S_1} f(x) d\mu(x) = 0 \quad \text{et}$$

$$\tau(\tilde{f}(h)h) \geqq \frac{1}{2}(c - \epsilon)\tau(p_{c+\epsilon} - p_{c-\epsilon}) > 0$$

car $c \in Sph$ (on note $p_\mu = X_{]-\infty,\mu]}(h)$). Contradiction.

D'où $Sph \subset \{b_1, \dots, b_k, 1\}$. Or 1 n'est pas valeur propre de h par hypothèse. Donc $Sph \subset \{b_1, \dots, b_k\}$.

$$h = \sum_{i=1}^{k} b_i p_i$$

où les p_i sont des projecteurs orthogonaux. L'égalité

$$\int_{S_1} f d\mu = \tau(\tilde{f}(h)h) \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{C}(S_1)$$

donne alors immédiatement : $\lambda_i = b_i \tau(p_i)$ pour tout i.

Remarque. La construction des mesures μ_φ que l'on a faite dépend de la décomposition de M que l'on a choisie. Mais si l'on considère deux décompositions distinctes

$$M = N_0 \underset{\theta_0}{\rtimes} \mathbf{Z} = N_1 \underset{\theta_1}{\rtimes} \mathbf{Z} \cdot N_0 = (M)_{\varphi_0}\, N_1 = (M)_{\varphi_1};$$

d'après [**1**] 4.3.2, il existe un réel α, $\alpha > 0$, tel que $\varphi_1 \sim \alpha\varphi_0$. Et les mesures $\overset{1}{\mu}_\varphi$ se déduisent alors des mesures $\overset{0}{\mu}_\varphi$ par une rotation sur le cercle S_1 d'angle α^{iT_0}.

4. Une caractérisation de $Sp\Delta_{\varphi}$. On va démontrer le résultat suivant :

4.1. THEOREME. *Soit* M *un facteur de type* III_λ $0 < \lambda < 1$; *soit* $\varphi \in M^+{}_*$. *Soit* $\alpha \in \mathbf{R}^*_+$. *Alors :* $\alpha \in Sp\Delta_\varphi$ *si et seulement si les supports des mesures* μ_φ *et* $\mu_{\alpha\varphi}$ *ne sont pas disjoints.*

Il est évident (toujours d'après I.2.2 de [**5**]) que l'on peut se restreindre au cas où $\varphi = \omega_h \circ E$, $\lambda s(h) \leqq h < 1$.

4.2. *Calcul de* $Sp\Delta_{\omega_h \circ E}$ *en fonction de* Sph. On utilisera le lemme suivant :

LEMME. *Soit* N *une algèbre de Von Neumann agissant sur un espace de Hilbert* $\mathfrak{H}$. *Soient* $a, b \in N^+$; *soit* $x \in N$; *soient* $\zeta, \eta \in \mathfrak{H}$. *Il existe alors une mesure* μ *bornée sur* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *définie sur la* σ *algèbre des boréliens telle que pour toutes fonctions boréliennes bornées* f *et* g *sur* $\mathbf{R}$:

$$(f(a)\zeta | xg(b)\eta) = \int\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} f(\alpha)\overline{g(\beta)}d\mu(\alpha, \beta).$$

De plus si $Spa \subset A$ *et* $Spb \subset B$; *alors* $\operatorname{Supp} \mu \subset A \times B$.

Démonstration. On définit $\mu(E \times F)$ lorsque E et F sont des boréliens de $\mathbf{R}$ par :

$$\mu(E \times F) = (\chi_E(a)\zeta | x\chi_F(b)\eta).$$

μ s'étend alors de façon unique en une mesure μ sur les boréliens de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Et il est évident que

$$\operatorname{Supp} \mu \subset Sp(a) \times Sp(b).$$

Lorsque f et g sont des fonctions simples sur $\mathbf{R}$, l'égalité

$$(f(a)\, | xg(b)\eta) = \int\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} f(\alpha)\overline{g}(\beta)d\mu(\alpha, \beta)$$

résulte immédiatement de la définition de μ. Toute fonction borélienne bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions simples; d'où le résultat.

4.3. PROPOSITION. a) *Soit* N *un facteur de type* II_∞. *Soit* τ *une trace sur* N. *Soit* $\varphi = \tau(h\, \cdot) = \omega_h$ (*où* h *est positif affilié à* N *tel que* $\tau(h) < \infty$). *Alors*

$$Sp\Delta_\varphi = \{\gamma\mu^{-1};\ \gamma \textit{ et } \mu \in Sph \textit{ et } \mu \neq 0\}.$$

b) *Soit* M *un facteur de type* III_λ $0 < \lambda < 1$, $M = N \rtimes_\theta \mathbf{Z}$, $\varphi = \omega_h \circ E$ *où* $\lambda s(h) \leqq h \leqq 1$, $\tau(h) < \infty$ *et* $1 - h$ *non singulier. Alors*

$$Sp\Delta_{\omega_h \circ E} = \overline{\{\lambda^k\gamma\mu^{-1} \textit{ avec } \gamma, \mu \in Sph;\ \mu \neq 0 \textit{ et } k \in \mathbf{Z}\}}.$$

Démonstration. a) On vérifie que

$$\{\gamma\mu^{-1};\ \gamma \text{ et } \mu \in Sph - \{0\}\} \subset Sp(\sigma^{\varphi}).$$

Soient $\gamma, \mu \in Sph - \{0\}$. $\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*$ on pose $p_\alpha = \chi_{]-\infty,\alpha]}(h)$. Soit $\epsilon > 0$ soient

$$p = p_{\gamma e^{\epsilon/2}} - p_{\gamma e^{-\epsilon/2}} \quad \text{et } q = p_{\mu e^{\epsilon/2}} - p_{\mu e^{-\epsilon/2}}.$$

N est un facteur de type II_∞ donc p et q sont comparables. Par exemple $p \prec q$. Il existe alors $u \in N$ isométrie partielle telle que $uu^* = p$, $u^*u \leqq q$. Pour montrer que

$$u \in N(\sigma^{\varphi}, V_\epsilon) \text{ où } V_\epsilon = [e^{-\epsilon}\gamma\mu^{-1}, e^{\epsilon}\gamma\mu^{-1}]$$

il suffit (Lemme 2.1.3. de [**1**]) de vérifier que pour tout voisinage V' de 0 et pour toute fonction $g \in L^1(\mathbf{R})$ tels que $Z(g) \supset V_\epsilon + V'$,

$$\sigma^{\varphi}(g)(u) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}(\sigma^{\varphi}(g)(u)\zeta|\eta) &= \int_{\mathbf{R}} (h^{it}uh^{-it}\zeta|\eta)g(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} ((hp)^{it}u(qh)^{-it}\zeta|\eta)g(t)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} (u(qh)^{-it}\zeta|(hp)^{-it}\eta)g(t)dt.\end{aligned}$$

D'après le lemme, il existe une mesure ν sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de support contenu dans $Sp(qh) \times Sp(hp)$ telle que

$$(\sigma^{\varphi}(g)(u)\zeta|\eta) = \int_{\mathbf{R}} g(t)dt \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \alpha^{-it}\beta^{it}d\nu(\alpha, \beta).$$

Supp $\nu \subset Sp(qh) \times Sp(hp)$, d'où $\forall(\alpha, \beta) \in$ Supp ν,

$$\beta\alpha^{-1} \in [e^{-\epsilon}\gamma\mu^{-1}, e^{\epsilon}\gamma\mu^{-1}] = V_\epsilon$$

et alors $\hat{g}(\beta\alpha^{-1}) = 0$.

Une simple application du théorème de Fubini prouve alors que

$$\sigma^{\varphi}(g)(u) = 0.$$

On a donc montré que $\forall \epsilon > 0$,

$$N(\sigma^{\varphi}, [e^{-\epsilon}\gamma\mu^{-1}, e^{\epsilon}\gamma\mu^{-1}]) \neq \{0\}.$$

Donc $\gamma\mu^{-1} \in Sp(\sigma^{\varphi})$ d'où

$$\{\gamma\mu^{-1};\ \gamma \text{ et } \mu \in Sph - \{0\}\} \subset Sp(\sigma^{\varphi}).$$

Réciproquement, on veut montrer que $\forall x \in N$, $x \in N(\sigma^{\varphi}, E)$ où

$$E = \overline{\{\gamma\mu^{-1}/\gamma \text{ et } \mu \in Sph;\ \mu \neq 0\}}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

On fait la même démonstration que dans le cas de u; mais ici

$$\text{Supp } \nu \subset Sph \times Sph.$$

D'où $Sp(\sigma^\varphi) \subset E$. Or $Sp\Delta_\varphi$ est fermé et $Sp\sigma^\varphi = Sp\Delta_\varphi \cap \mathbf{R}_+^*$; d'où

$$Sp(\Delta_\varphi) = \overline{\{\gamma\mu^{-1}/\gamma \text{ et } \mu \in Sph \text{ et } \mu \neq 0\}}$$

(car $0 \in Sp\Delta_\varphi$ si et seulement si $0 \in Sph$).

b) Soit $\varphi = \omega_h \circ E$, $\varphi|_N = \tau(h\ \cdot)$ et $\sigma_t^\varphi(x) = h^{it}xh^{-it}$ $\forall x \in N$. Alors d'après a)

$$\{\gamma\mu^{-1}/\gamma \text{ et } \mu \in Sph - \{0\}\} \subset Sp(\sigma^\varphi).$$

Par ailleurs $S(M) = \{\lambda^n\}$. Et $Sp\Delta_\varphi$ est invariant par multiplication par tout élément non nul de $S(M)$ ([**1**]).

D'où

$$Sp(\Delta_\varphi) \supset \{\lambda^k\gamma\mu^{-1};\ \gamma \text{ et } \mu \in Sph - \{0\}, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Réciproquement, on montre comme au a) que $\forall x \in M$, $x \in M(\sigma^\varphi, F)$ où

$$F = \overline{\{\lambda^k\gamma\mu^{-1}|\gamma \text{ et } \mu \in Sph\ \mu \neq 0 \text{ et } k \in \mathbf{Z}\}}.$$

Pour $x \in N$ le résultat est vrai d'après a). Pour $x = U^n$

$$\sigma_t^{\tau\circ E}(U^n) = U^n\,\lambda^{\mathrm{int}}.$$

Alors si l'on pose $f(t) = g(t)\,\lambda^{\mathrm{int}}$, $\hat{f}(\alpha) = \hat{g}(\lambda^{-n}\alpha)$ d'où (en utilisant a))

$$Sp_{\sigma^\varphi}(U^k) \subset \{\lambda^k\gamma\mu^{-1}/\gamma \text{ et } \mu \in Sph \text{ et } \mu \neq 0\}.$$

On en déduit que $Sp(\sigma^\varphi) \subset F$ (car l'algèbre engendrée par N et U est faiblement dense dans M). Finalement

$$Sp\Delta_\varphi = \overline{\{\lambda^k\gamma\mu^{-1};\ \gamma \text{ et } \mu \in Sph;\ \mu \neq 0 \text{ et } k \in \mathbf{Z}\}}.$$

4.4. *Démonstration du théorème.*

LEMME. *Soit M un facteur de type* III_λ $0 < \lambda < 1$; *soit* $\varphi = \tau(hE(\cdot))$ *un état sur M tel que $\lambda s(h) \leqq h < 1$ et $1 - h$ non singulier. Alors*

$$\text{Supp } \mu_\varphi = \overline{\{e^{iT_0 \mathrm{Log} x}|x \in Sph - \{0\}\}}.$$

Démonstration. Ceci est une conséquence évidente de la définition de μ_φ : pour toute $f \in \mathscr{C}(S_1)$

$$\int_{S_1} fd\mu_\varphi = \tau(\tilde{f}(h)h)$$

où

$$\tilde{f}(x) = f(e^{iT_0 \mathrm{Log} x}) \quad \text{pour tout } x \in [\lambda, 1[\text{ et } \tilde{f}(0) = 0.$$

Démonstration du Théorème 4.1. Soit $\alpha \neq 0$, $\varphi = \omega_h \circ E$, $\lambda s(h) \leqq h < 1$.

$$\begin{aligned} \text{Supp } \mu_{\alpha\varphi} &= \overline{\{e^{iT_0 \mathrm{Log}\alpha x} | x \in Sph - \{0\}\}} \\ &= \{e^{iT_0 \mathrm{Log}\alpha} a | a \in \text{Supp } \mu_\varphi\}. \end{aligned}$$

Soit

$$\mathscr{E} = \{\alpha \in \mathbf{R}_+^* | \text{Supp } \mu_\varphi \text{ et Supp } \mu_{\alpha\varphi} \text{ soient non disjoints}\}.$$

$\mathscr{E}$ est fermé dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathscr{E}$ si et seulement si il existe $a, b \in$ Supp μ_φ tels que

$$e^{iT_0 \mathrm{Log}\alpha} = ba^{-1}.$$

Or

$$e^{iT_0(\mathrm{Log}\alpha + \mathrm{Log}x)} = e^{iT_0 \mathrm{Log}y} \Leftrightarrow \alpha = yx^{-1}\lambda^k \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= \overline{\{\lambda^k \gamma \mu^{-1} \text{ et } \mu \in Sph - \{0\}\}} \cap \mathbf{R}_+^* \\ &= Sp\Delta_\varphi \cap \mathbf{R}_+^* = Sp\sigma^\varphi \quad \text{(d'après 4.3).} \end{aligned}$$

4.5. COROLLAIRE. *Soit φ un état sur M. μ_φ est une mesure ponctuelle sur S_1 si et seulement si $Sp\Delta_\varphi = S(M)$.*

Démonstration. Soit $\mu_\varphi = \delta_a$. On sait alors d'après La Proposition 3.4 que φ est équivalent à $\psi = \tau(bpE(\cdot))(b \in [\lambda, 1[$ tel que $e^{iT_0 \mathrm{Log}b} = a$; p : projecteur et $b\tau(p) = 1$). Alors $Sp\Delta_\varphi = Sp\Delta_\psi$. Et d'après la proposition précédente pour tout $\alpha \in Sp\Delta_\varphi \cap \mathbf{R}_+^*$,

$$e^{iT_0 \mathrm{Log}(\alpha b)} = a;$$

d'où il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\alpha = \lambda^k$.

Alors

$$Sp\Delta_\psi \subset \{\lambda_k | k \in \mathbf{Z}\} = S(M),$$

d'où $Sp\Delta_\varphi = S(M)$.

Réciproquement, si $Sp\Delta_\varphi = S(M)$; pour tous $a, b \in$ Supp μ_φ, $\exists k \in \mathbf{Z}$ tel que

$$ba^{-1} = e^{iT_0 \mathrm{Log}\lambda^k} = 1.$$

D'où Supp $\mu_\varphi = \{a\}$.

5. Rémarque sur le diametre de $\mathscr{S}(M)/\mathscr{U}(M)$. On note $\mathscr{S}(M)/\mathscr{U}(M)$ l'espace des états normaux sur M quotienté par la relation d'équivalence unitaire. Il résulte de la densité des états fidèles dans $\mathscr{S}(M)$ que

$$\operatorname{diam} \mathscr{S}(M)/\mathscr{U}(M) = \operatorname{diam} \mathscr{S}(M)/R$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

où R est la relation d'équivalence définie en 2.

Soit $M = N \rtimes_{\theta} \mathbf{Z}$ une décomposition discrète de M. On vérifie aisément, en utilisant le Théorème I.2.2 de [**5**] que

$$\operatorname{diam} \mathcal{S}(M)/\mathcal{U}(M) = \operatorname*{Sup}_{h_1,h_2 \in \mathcal{N}} \operatorname*{Inf}_{u \in \mathcal{U}(M)} \|\omega_{h_1} \circ E - u(\omega_{h_2} \circ E)u^*\| \quad \text{(i)},$$

où

$$\mathcal{N} = \{h \in N^+ | \lambda s(h) \leqq h < 1; \tau(h) = 1 \text{ et } Sph \text{ discret}\}.$$

5.1. PROPOSITION. diam $\mathcal{S}(M)/\mathcal{U}(M) \leqq 2(1 - \sqrt{\lambda})$ *lorsque M est un facteur de type* III_λ $0 < \lambda < 1$.

5.2. LEMME. *Soient h, $k \in N^+$ ayant des spectres discrets, et de trace finie. Il existe $u \in \mathcal{U}(N)$, des projecteurs $(p_k)_{1 \leqq k \leqq n}$ de N de trace finie deux à deux orthogonaux, et des réels positifs $(\lambda_k)_{1 \leqq k \leqq n}$, $(\mu_k)_{1 \leqq k \leqq n}$ écrits dans l'ordre décroissant de sorte que*

$$h = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \quad \textit{et} \quad u^*ku = \sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i.$$

Ceci est un résultat connu dans les facteurs de type II_∞.

5.3. *Démonstration de la proposition.* Soient h_1, $h_2 \in \mathcal{N}$. D'après le lemme, il existe u, v, $w \in \mathcal{U}(N)$ tels que

$$(*) \quad \omega_{h_1} \circ E = \tau\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i E(\cdot)\right);$$

$$u(\omega_{h_2} \circ E)u^* = \tau\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i E(\cdot)\right);$$

$$vU^*(\omega_{h_1} \circ E)Uv^* = \tau\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i E(\cdot)\right).$$

et

$$wU^*(\omega_{h_2} \circ E)Uw^* = \tau\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i p_i E(\cdot)\right)$$

où les (λ_i), (μ_i), (α_i) et (β_i) sont écrits dans l'ordre décroissant; λ_i, $\mu_i \in [\lambda, 1] \cup \{0\}$ et où U est l'unitaire de M défini au début du III. Soit

$$\varphi((\lambda_i), (\mu_i), (\alpha_i), (\beta_i), \tau(p_i)) = \inf(\|\omega_{h_1} \circ E - \omega_{h_2} \circ E\|;$$
$$\|vU^*(\omega_{h_1} \circ E)Uv^* - \omega_{h_2} \circ E\|; \|wU^*(\omega_{h_2} \circ E)Uw^* - \omega_{h_1} \circ E\|),$$

où h_1 et h_2 vérifient $(*)$ (ceci est bien défini car le terme de droite ne dépend des (p_i) que par l'intermédiaire des $(\tau(p_i))$. De (i) on déduit que

$$\operatorname{diam} \mathscr{S}(M)/\mathscr{U}(M) \leqq \operatorname*{Sup}_{((\lambda_i),(\mu_i),(\alpha_i),(\beta_i))} \operatorname*{Sup}_{\tau(p_i) \in K} \varphi((\lambda_i), (\mu_i), (\alpha_i), (\beta_i), \tau(p_i))$$

où

$$K = \left\{ (a_i)_{1 \leqq i \leqq n} \in [0, 1]^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \right.$$
$$\left. = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i = 1 \right\}.$$

φ dépend linéairement des $\tau(p_i)$ sur le compact convexe K. Donc son maximum sur K est attient en un point extrêmal de K; donc en un point tel que au plus 4 des $\tau(p_i)$ soient non nuls (car $\tau(p_i) = 1$ est impossible).

Si λ_4 ou $\mu_4 \neq 0$, φ est nulle au point considéré; donc on peut supposer que $\lambda_4 = \mu_4 = 0$.

Si $\lambda_3 \neq 0$ (ou $\mu_3 \neq 0$). Nécessairement

$$\alpha_1 = \lambda\lambda_1; \alpha_2 = \lambda\lambda_1; \alpha_3 = \lambda\lambda_2; \alpha_4 = \lambda\lambda_3.$$

Et on a la même relation entre les β_i et μ_i. Donc φ est une fonction convexe des (λ_i), (μ_i). Son maximum sur

$$\left\{ ((\lambda_i), (\mu_i)) \in ([\lambda, 1] \cup \{0\})^6 \,\middle|\, \sum_{i=1}^3 \lambda_i \, \tau(p_i) = \sum_{i=1}^3 \mu_i \, \tau(p_i) = 1 \right\}$$

est alors atteint en un point tel que au plus deux des λ_i ou $\mu_i \notin \{\lambda, 1, 0\}$. Pour que φ ne soit pas nulle en un tel point il faut que

$$h_1 = p + \lambda q + \alpha r$$
$$h_2 = ap + bq + \alpha r \quad (1)$$

avec $1 > a \geqq b > \lambda$ et $\alpha = 1$ ou λ.

Si $\lambda_3 = 0$. Alors $\mu_3 = 0$ (sinon φ est nulle au point considéré). Par le même raisonnement que ci-dessus, on se ramène au cas où

$$h_1 = p + \lambda q$$
$$h_2 = ap + bq \quad (2)$$

ou

$$h_1 = p$$
$$h_2 = ap + bq \quad (3)$$

avec $1 \geqq a \geqq b \geqq \lambda$.

Dans les cas (1) et (2)

$$\tau|h_1 - h_2| \leqq \frac{2(1 - \sqrt{\lambda})}{1 + \sqrt{\lambda}}.$$

Dans le cas (3)

$$\tau|h_1 - h_2| \leqq 2(1 - \sqrt{\lambda}) \quad \text{si } a \geqq \sqrt{\lambda};$$

et

$$\|vU^*\omega_{h_1} \circ EUv^* - \omega_{h_2} \circ E\| \leqq 2(1 - \sqrt{\lambda}) \quad \text{pour } a \leqq \sqrt{\lambda}.$$

φ atteint son maximum : $2(1 - \sqrt{\lambda})$ lorsque $h_1 = p$ et $h_2 = \sqrt{\pi}(p + q)$. Alors $\mu_{\omega_{h_1} \circ E}$ et $\mu_{\omega_{h_2} \circ E}$ sont des mesures ponctuelles associées à deux points du cercle diamétralement opposés. Pour montrer que

$$\operatorname{diam} \mathcal{S}(M)/\mathcal{U}(M) = 2(1 - \sqrt{\lambda}),$$

il reste à prouver que

$$\inf_{u \in \mathcal{U}(M)} \|\omega_{h_1} \circ E - u(\omega_{h_2} \circ E)\, u^*\| = 2(1 - \sqrt{\lambda})$$

ce qui n'est pas encore fait.

IV. Etude des facteurs de type III_0. Soit M un facteur de type III_0. D'après **[1]** Paragraphe V, il existe un poids lacunaire fidèle φ^0 de multiplicité infinie sur M tel que $M_{\varphi^0} = N$ soit une algèbre de Von Neumann de type II_∞ à centre diffus; $\varphi^0|_{N^+} = \tau$ est une trace positive normale fidèle sur N. Il existe alors un automorphisme θ de N, ergodique sur le centre C de N, et un unitaire U de M tels que $\theta(x) = U \times U^*$ pour tout $x \in N$ et que

$$M = N \underset{\theta}{\rtimes} \mathbf{Z}.$$

On note E l'unique espérance conditionnelle normale fidèle de M sur N; et ρ l'unique élément de C, $0 \leqq \rho \leqq \lambda_0 < 1$ pour un λ_0, tel que

$$\tau(\theta(x)) = \tau(\rho x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{N}^+.$$

On reprend les notations de II; en particulier

$$C = L^\infty(\Omega, \mu) \quad \text{et} \quad N = \int_\Omega^\oplus N_\alpha d\mu(\alpha);$$

ρ s'écrit alors dans cette décomposition

$$\rho = \int_{\Omega}^{\oplus} \rho(\alpha) d\mu(\alpha).$$

On établit dans ce paragraphe un isomorphisme entre $C^*(M)$ et la C^* algèbre des classes de fonctions boréliennes bornées sur l'espace du flot des poids qui sont continues le long des orbites du flot; c'est-à-dire la C^* algèbre des classes de fonctions f boréliennes bornées sur $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$ telles que

pour tout $\alpha \in \Omega, f_\alpha$ soit continue sur $\mathbf{R}_+^*$

pour tout $(\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^*, f(\theta_0(\alpha), \rho(\alpha)^{-1}x) = f(\alpha, x)$.

On définit $\tilde{\theta}(f)$ par

$$\widetilde{\theta(f)}(\alpha, x) = f(\theta_0(\alpha), \rho(\alpha)^{-1}x),$$

où θ_0 est la transformation non singulière de (Ω, μ) associé à la restriction de θ à C.

Et on note $C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))_{\tilde{\theta}}$ la C^* algèbre définie ci-dessus.

La classe de f dans cette C^* algèbre sera encore notée f.

On montre également que l'ensemble des classes d'équivalence topologique d'états sur M est en bijection avec l'ensemble des mesures de Borel positives ν sur l'espace F_0 du flot des poids telles que $\nu(F_0) = 1$ et $\nu(A) = 0$ pour tout sous-ensemble A de F_0 saturé par l'action du flot, négligeable.

$$(F_0 = \{ (\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* | \rho(\alpha) \leqq x < 1 \}).$$

On vérifie de plus que cette bijection est invariante par changement d'écriture du flot des poids comme flot "au dessus" d'une fonction.

Notation. Si f est une fonction borélienne définie sur $\Omega \times \mathbf{R}_+^*$, on notera encore f son prolongement à $\Omega \times \mathbf{R}+$ obtenu en posant $f(\alpha, 0) = 0$ pour tout $\alpha \in \Omega$.

1. *Association à tout $X \in C^*(M)$ de $f \in C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))$.*

1.1. PROPOSITION. *Soit $X \in C^*(M)$. On peut lui associer $f \in C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))_{\tilde{\theta}}$ de sorte que pour tout h positif, affilié à N, de trace finie,*

$$X(\omega_h \circ E) = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(h_\alpha) d\mu(\alpha) \cdot (\omega_h(x) = \tau(hx)).$$

1.2. LEMME. *Soit $X \in C^*(M)$. Pour tout h positif affilié à N, de trace finie, $X(\omega_h \circ E) \in N$.*

Démonstration. Elle est identique à celle du Lemme III.1.2.

Ceci permet de définir une application :

$$N^+{}_* \to N$$
$$\omega_h \mapsto X(\omega_h \circ E)$$

satisfaisant aux conditions P. De la Proposition II.3.2, on déduit l'existence de f, $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))$ telle que

$$X(\omega_h \circ E) = \int_\Omega^\oplus f_\alpha(h_\alpha)d\mu(\alpha).$$

1.3. *Démonstration de la proposition.*

$$U(\omega_h \circ E)U^* = \omega_h \circ \theta^{-1} \circ E = \omega_{(\rho_{-1}\theta(h))} \circ E.$$

D'où :

$$X(\omega_{\rho_{-1}\theta(h)} \circ E) = UX(h)U^* = \theta(X(h)).$$

On applique ceci à $h = \lambda e$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$, et tout projecteur e de N tel que $\tau(e) < \infty$. Soit $p = \theta(e)$. Alors

$$X(\rho_{-1}\theta(h)) = \int_\Omega^\oplus f_\alpha(\lambda\rho_{-1}(\alpha))p_\alpha d\mu(\alpha)$$

tandis que

$$\theta(X(h)) = \int_\Omega^\oplus f_{\theta_0^{-1}(\alpha)}(\lambda)p_\alpha d\mu(\alpha).$$

On en déduit l'existence, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$, d'un sous-ensemble Ω_λ de Ω tel que : $\mu(\Omega_\lambda) = 0$ pour tout $\alpha \in \Omega - \Omega_\lambda$,

$$f_\alpha(\lambda\rho_{-1}(\alpha)) = f_{\theta_0^{-1}(\alpha)}(\lambda).$$

Soit $E = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{Q}^*_+} \Omega_\lambda$; $\mu(E) = 0$.

La continuité de f_α et $f_{\theta_0^{-1}(\alpha)}$ entraîne alors que : pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$, pour tout $\alpha \in \Omega - E$

$$f_\alpha(\lambda\rho_{-1}(\alpha)) = f_{\theta_0^{-1}(\alpha)}(\lambda).$$

2. *Définition de X_f pour toute $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$.* Soit

$$f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}.$$

On va donner un sens à l'expression $X_f(\psi)$ pour tout poids ψ sur M et non pas seulement pour toute forme linéaire positive.

a) *Définition* : de $X_f(\psi)$ pour tout poids ψ intégrable sur M lorsque f est unitaire :

On note Θ l'isomorphisme canonique de $L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^*_+)/\tilde{\theta}$ sur P_M; et $c \in Z^1(F^M)$, le cocycle associé à f. Les notations $\bar{\sigma}_c^\omega$, $(D\psi:D\omega)_c$ font référence à IV.2 de [**5**].

2.1. PROPOSITION ET DEFINITION. *Soit ψ un poids intégrable sur M. L'expression $(D\psi:D\omega)_c \times p_\omega^{-1}(\Theta(f))$ est indépendante du choix du poids dominant ω sur M. On la note $X_f(\psi)$.*

Démonstration. Soient ω_1 et ω_2 deux poids dominants sur M. D'après le Théorème II.1.1 de [**5**], il existe un unitaire v de M tel que $\omega_1 = v\omega_2 v^*$. Alors

$$p_{\omega_1}^{-1}(\Theta(f)) = v\, p_{\omega_2}^{-1}(\Theta(f))v^*, \quad \text{et}$$

$$(D\psi:D\omega_1)_c = (D\psi:D\omega_2)_c\, \bar{\sigma}_c^{\omega_2}(v)v^*.$$

Le résultat sera alors une conséquence immédiate du lemme suivant :

2.2. Lemme. *Soit ω un poids dominant sur M; $\bar{\sigma}_c^{\omega}$ est un automorphisme intérieur de M, et plus précisément* :

$$\bar{\sigma}_c^{\omega}(x) = p_{\omega}^{-1}(\Theta(f))x\, p_{\omega}^{-1}(\Theta(f))^* \quad \textit{pour tout } x \in M. \quad \text{(i)}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier (i) pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ pour tout $x \in M(\sigma^{\omega}, \{\lambda\})$.

Soit

$$M = N^1 \underset{\theta^1}{\rtimes} \mathbf{R} \quad \text{avec } N^1 = M_{\omega},$$

une décomposition continue de M.

On reprend les notations de la Proposition IV.2.1. de [**5**]. Soit

$$x \in M(\sigma^{\omega}, \{\lambda\}); \ x = a\, u_{-\mathrm{Log}\lambda} \quad \text{avec } a \in N^1.$$

Alors

$$\bar{\sigma}_c{}^{\omega}(au_{-\mathrm{Log}\lambda}) = p_{\omega}^{-1}(c_{\lambda})\, au_{-\mathrm{Log}\lambda}.$$

Soit $u = p_{\omega}^{-1}(\Theta(f))$; u est un unitaire de C_{ω}

$$p_{\omega}^{-1}(c_{\lambda}) = uu_{\mathrm{Log}\lambda}u^*u_{\mathrm{Log}\lambda}.$$

Or $u_{-\mathrm{Log}\lambda}u^*u_{\mathrm{Log}\lambda} \in C_{\omega}$ donc commute à a. D'où

$$\bar{\sigma}_c{}^{\omega}(au_{-\mathrm{Log}\lambda}) = u(au_{-\mathrm{Log}\lambda})u^*.$$

On choisit un poids dominant $\bar{\omega}$ sur N; $\bar{\omega} = \tau(h\ \cdot)$; alors $\bar{\omega} \circ E$ est dominant sur M.

2.3. Lemme. *Soit ψ un poids intégrable sur N, $\psi = \tau(k\ \cdot)$.*

1) $$\bar{\sigma}_c^{\psi\circ E}(x) = \left(\int_{\Omega}^{\oplus} f_{\alpha}(k_{\alpha})d\mu(\alpha)\right) \times \left(\int_{\Omega}^{\oplus} f_{\alpha}(k_{\alpha})d\mu(\alpha)\right)^*$$

pour tout $x \in M$.

2) $$(D(\psi \circ E):D(\bar{\omega} \circ E))_c = \left(\int_{\Omega}^{\oplus} f_{\alpha}(k_{\alpha})d\mu(\alpha)\right)\left(\int_{\Omega}^{\oplus} f_{\alpha}(h_{\alpha})d\mu(\alpha)\right)^*.$$

Démonstration. D'après le Théorème II.2.2 de [**5**], il existe une isométrie partielle $u \in N$ telle que : $\psi = u\,\bar{\omega}\,u^*$.

$$\int_{\Omega}^{\oplus} f_{\alpha}(k_{\alpha})d\mu(\alpha) = u\int_{\Omega}^{\oplus} f_{\alpha}(k_{\alpha})d\mu(\alpha)u^*$$

et

$$\bar{\sigma}_c^{\psi \circ E}(x) = u\, \bar{\sigma}_c^{\bar{\omega} \circ E}(u^* x u) u^* \quad \text{pour tout } x \in M.$$

1) est alors une conséquence du Lemme 2.2 et de l'égalité

$$p_{\bar{\omega} \circ E}^{-1}(\Theta(f)) = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(h_\alpha) d\mu(\alpha).$$

2) résulte de 1) en considérant θ défini sur $N \otimes F_2$ par

$$\theta\left(\sum_{1 \leqq i,j \leqq 2} x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \bar{\omega}(x_{11}) + \psi(x_{22}) \quad \text{et} \quad 1 \otimes e_{21} \in N \otimes F_2.$$

2.4. Proposition. *X_f vérifie les propriétés suivantes :*
Soit ψ un poids intégrable sur M :

1) *pour toute isométrie partielle u de M telle que $uu^* \in M_\psi$,*

$$X_f(u^* \psi u) = u^* X_f(\psi) u.$$

2) *si $\psi = \varphi(k\, \cdot) = \tau \circ E(k\, \cdot)$,*

$$X_f(\psi) = \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(k_\alpha) d\mu(\alpha).$$

3) $\bar{\sigma}_c^{\psi}(x) = X_f(\psi) x X_f(\psi)^*$ *pour tout $x \in M$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} 1) \quad X_f(u^* \psi u) &= (D(u^*\psi u) : D(\bar{\omega} \circ E))_c\, p_{\bar{\omega} \circ E}^{-1}(\Theta(f)) \\ &= u^*(D\psi : D(\bar{\omega} \circ E))_c\, \bar{\sigma}_c^{\bar{\omega} \circ E}(u)\, p_{\bar{\omega} \circ E}^{-1}(\Theta(f)) \\ &= u^*(D\psi : D(\bar{\omega} \circ E))_c\, p_{\bar{\omega} \circ E}^{-1}(\Theta(f)) u. \end{aligned}$$

2) est une conséquence triviale de 2) du Lemme 2.3.
3) se déduit immédiatement du Lemme 2.2.

b) *Définition* : de $X_f(\psi)$ pour tout poids ψ lorsque c associé à f est de classe C^2 :

c étant de classe C^2, $(D\psi : D\omega)_c$ est défini pour tout poids ψ sur M et tout poids dominant ω sur M (Lemme IV.2.9 de [**5**]);

On pose alors pour tout poids ψ :

$$X_f(\psi) = (D\psi : D\omega)_c\, p_\omega^{-1}(\Theta(f)).$$

Là encore la valeur de cette expression ne dépend pas du choix de ω; donc $X_f(\psi)$ est bien défini.

Il est alors immédiat que les propriétés 1, 2 et 3 de la Proposition 2.4 restent vraies pour tout poids ψ.

Et de plus pour tout ψ :

$$X_f(\psi) = (D\psi : D\tau \circ E)_c \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(1) d\mu(\alpha).$$

c) *Définition* : de $X_f(\psi)$ dans le cas général :

Remarque. Soient f et ψ tels que $X_f(\psi)$ ait déjà été défini en a) ou b).

Soient $k \in N^+(\rho s(k) \leqq k < 1)$; et u une isométrie partielle de M tels que

$$\psi = u^*\varphi(k\ \cdot)u,\ u^*u = \mathrm{Supp}(\psi),\ uu^* = s(k).$$

Alors

$$X_f(\psi) = u^*X_f(\varphi(k\ \cdot)\,)u$$

i.e.,

$$X_f(\psi) = u^*\left(\int_\Omega^\oplus f_\alpha(k_\alpha)d\mu(\alpha)\right)u$$

d'après la Proposition 2.4.

Ceci va permettre de définir $X_f(\psi)$ dans le cas général; à condition de vérifier que le résultat est indépendant du choix de u et k.

2.5. LEMME. *Soient h_1, $h_2 \in N^+$ tels que $\rho s(h_1) \leqq h_1 < 1$; $\rho s(h_2) \leqq h_2 < 1$.*

Soient u_1 et u_2 des isométries partielles de M telles que :

$$u_1u_1^* = s(h_1),\ u_2u_2^* = s(h_2),\ u_1^*u_1 = u_2^*u_2 = \mathrm{Supp}(\psi).$$

On suppose que

$$u_1^*\varphi(h_1\ \cdot)u_1 = u_2^*\varphi(h_2\ \cdot)u_2 = \psi.$$

Soit $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+)\,)_{\tilde{\theta}}$. Alors :

$$u_1^*\left(\int_\Omega^\oplus f_\alpha(h_{1,\alpha})d\mu(\alpha)\right)u_1 = u_2^*\left(\int_\Omega^\oplus f_\alpha(h_{2,\alpha})d\mu(\alpha)\right)u_2.$$

Démonstration.

$$\varphi(h_2\ \cdot) = u_2u_1^*\varphi(h_1\ \cdot)\ u_1u_2^*.$$

D'après le Lemme I.2.6 de [**5**], $u_2u_1^* \in N$. Alors

$$\varphi(h_2\ \cdot) = \varphi(u_2u_1^*h_1u_1u_2^*\ \cdot).$$

Et

$$\int_\Omega^\oplus f_\alpha(h_{2,\alpha})d\mu(\alpha) = u_2u_1^*\left(\int_\Omega^\oplus f_\alpha(h_{1,\alpha})d\mu(\alpha)\right)u_1u_2^*.$$

On peut donc donner la définition suivante :

2.6. *Définition.* Soit ψ un poids quelconque sur M. Il existe (d'après le Théorème I.2.2 de [**5**]) une isométrie partielle u de M, et $k \in N^+$ tels que

$$\psi = u^*\varphi(k\ \cdot)u,\ u^*u = \text{Supp}\ \psi$$

$$\rho s(k) \leqq k < 1,\ uu^* = s(k).$$

Soit $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$; on définit

$$X_f(\psi) = u^*\left(\int_\Omega^\oplus f_\alpha(k_\alpha)d\mu(\alpha)\right)u.$$

D'après la remarque cette définition est compatible avec les précédentes; X_f vérifie alors les propriétés suivantes :

2.7. Proposition. 1) *Soit* $\psi = \varphi(k\ \cdot)$ *où* k *est positif affilié à* N. *Alors*

$$X_f(\psi) = \int_\Omega^\oplus f_\alpha(k_\alpha)d\mu(\alpha).$$

2) *Pour tout poids* ψ, *pour toute isométrie partielle* u *de* M *telle que* $uu^* \in M_\psi$,

$$X_f(u^*\psi u) = u^*X_f(\psi)u.$$

3) *si* Supp ψ_1 *est orthogonal à* Supp ψ_2,

$$X_f(\psi_1 \oplus \psi_2) = X_f(\psi_1) + X_f(\psi_2).$$

Démonstration. 1) On décompose k sous la forme

$$k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n \quad \text{avec } \rho_n s(k_n) \leqq k_n < \rho_{n-1}$$

de sorte que les $s(k_n)$ soient deux à deux orthogonaux.

Il suffit alors de vérifier que pour tout n :

$$\int_\Omega^\oplus f_\alpha(k_{n,\alpha})d\mu(\alpha) = U^{1-n}\int_\Omega^\oplus f_\alpha(k'_{n\alpha})d\mu(\alpha)U^{n-1}$$

où

$$\rho_{1-n}\,\theta^{n-1}(k_n) = \int_\Omega^\oplus k'_{n\alpha}d\mu(\alpha).$$

Il suffit de montrer le résultat pour $n = 2$ et $n = 0$ (il est trivial pour $n = 1$), puis une récurrence immédiate permet de conclure.

$n = 2$. Si $k_2 = \lambda e$ où e est un projecteur de N le résultat découle immédiatement de l'égalité

$$f(\theta_0(\alpha), \lambda) = f(\alpha, \rho(\alpha)\lambda) \quad \text{pour tout } \alpha \in \Omega.$$

On conclut en remarquant que tout $k_2 \in N^+$ est limite croissante d'une suite d'éléments de N^+ qui sont combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de projecteurs deux à deux orthogonaux de N.

Le cas $n = 0$ est identique.

2) et 3) sont immédiats.

Pour vérifier que X_f ainsi défini est un élément de $C^*(M)$, lorsque $f \in C^*_{\Omega}(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$, il reste à montrer la continuité de X_f.

3. *Continuité de X_f lorsque $f \in C^*_{\Omega}(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$ est unitaire et que c associé à f est de classe C^2.* Dans ce cas

$$X_f(\psi) = (D\psi:D\tau \circ E)_c \times \int_{\Omega}^{\oplus} f_\alpha(1)d\mu(\alpha) \quad \text{pour tout poids } \psi.$$

3.1. THEOREME. *Soit $f \in C^*_{\Omega}(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$ unitaire. On suppose que le cocycle c associé à f est de classe C^2 (en norme).*

Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de formes linéaires positives normales fidèles sur M qui convergent vers une même forme linéaire ψ sur M non nécessairement fidèle (i.e., $\|\varphi_n - \psi\| \to 0$ et $\|\psi_n - \psi\| \to 0$). Alors

$$\|\varphi_n - (D\psi_n:D\varphi_n)_c\psi_n\| \to 0 \quad et$$

$$\|X_f(\psi_n)\psi_n - X_f(\varphi_n)\varphi_n\| \to 0 \quad quand\ n \to \infty.$$

Remarque. Ce résultat est comparable au (ii) du Théorème IV.2.6 de [**5**]. Dans les deux cas, on montre une continuité de l'application :

$$(\varphi, \psi) \in \mathfrak{M}^0_M \times \mathfrak{M}^0_M \to (D\varphi:D\psi)_c$$

où $\mathfrak{M}^0_M$ est l'espace des poids fidèles sur M et $\mathscr{U}(M)$ le groupe unitaire de M. Mais ici $\mathfrak{M}^0_M$ et $\mathscr{U}(M)$ sont tous deux munis de topologies strictement plus fines que dans le Théorème IV.2.6 de [**5**].

Notation. Soient φ_1 et φ_2 des poids sur une algèbre de Von Neumann A; on notera

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix}$$

le poids défini sur $A \otimes F_2$ par

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix}\left(\sum_{1\leqq i,j\leqq 2} x_{ij} \otimes e_{ij}\right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}).$$

Démonstration du théorème. Soit F_∞ un facteur de type I_∞. Pour tout $\epsilon > 0$, on choisit $h_\epsilon \in F_\infty$ tel que

$$1 - \epsilon \leqq h_\epsilon \leqq 1 + \epsilon,$$

comme dans la démonstration du Théorème II.4.7 de [**5**], de sorte que

$$\varphi_{n,\epsilon} = \varphi_n \otimes \mathrm{Tr}(h_\epsilon\ \cdot) \quad \text{et} \quad \psi_{n,\epsilon} = \psi_n \otimes \mathrm{Tr}(h_\epsilon\ \cdot)$$

soient des poids fidèles intégrables sur $M \otimes F_\infty$.

On définit alors

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

$$\theta_{n,\epsilon} = \begin{bmatrix} \psi_{n,\epsilon} & 0 \\ 0 & \varphi_{n,\epsilon} \end{bmatrix} \quad \text{sur } M \otimes F_\infty \otimes F_2 = P.$$

Soit $\bar{\omega}$ un poids dominant sur P. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$ (espace de Schwartz) telle que $f(0) = 1$. D'après la démonstration du Lemme IV.2.7 de [**5**] (qui s'applique ici jusqu'à l'avant dernière ligne), il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $L^1(\mathbf{R})$ tels que $\hat{g}_n(0) = 1$ et que

$$\|\sigma^{\bar{\omega}}_{g_n} \circ \sigma^{\bar{\omega}}_{\hat{f}}(\, x - \bar{\sigma}_c^{\bar{\omega}}(x)\,)\| \leqq \epsilon_n \|x\| \quad \text{pour tout } x \in P;$$

où $\epsilon_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, pour tout $\epsilon > 0$, $\theta_{p,\epsilon}$ est intégrable donc $\theta_{p,\epsilon} \prec \bar{\omega}$, d'après le Théorème II.2.2 de [**5**]. L'inégalité établie ci-dessus reste donc vraie lorsque l'on remplace $\bar{\omega}$ par $\theta_{p,\epsilon}$. En l'appliquant à $x = 1_M \otimes 1_{F_\infty} \otimes e_{12}$, on obtient pour tout $\epsilon_0 > 0$, l'existence de N_0 tel que

$$\|\sigma^{\begin{pmatrix} \psi_p & 0 \\ 0 & \varphi_p \end{pmatrix}}_{g_{N_0} * \hat{f}}[\,(1_M - (D\psi_p : D\varphi_p)_c) \otimes e_{12}]\| < \epsilon_0$$

pour tout $p \in \mathbf{N}(i) \cdot g_{N_0} * \hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$; par ailleurs

$$\sigma_t^{\begin{pmatrix} \psi_p & 0 \\ 0 & \varphi_p \end{pmatrix}}(1_M \otimes e_{12}) - (1_M \otimes e_{12})$$

converge fortement vers 0, uniformément sur tout compact (d'après le Lemme 2.4 de [**2**]); de plus

$$\int_{\mathbf{R}} g_{N_0} * \hat{f}(u) du = \hat{g}_{N_0}(0) f(0) = 1.$$

On déduit aisément de ceci la convergence forte de

$$\sigma^{\begin{pmatrix} \psi_p & 0 \\ 0 & \varphi_p \end{pmatrix}}_{g_{N_0} * \hat{f}}(1_M \otimes e_{12})$$

vers $1_M \otimes e_{12}$ lorsque $p \to \infty$. On pose

$$x_p = \sigma^{\begin{pmatrix} \psi_p & 0 \\ 0 & \varphi_p \end{pmatrix}}_{g_{N_0} * \hat{f}}(1_M \otimes e_{12}) - 1_M \otimes e_{12} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{bmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix}.$$

Alors $\|x_p \gamma\| \to 0$ quand $p \to \infty$ (ii).

En utilisant la convergence nomique de γ_p vers γ et le fait que

$$\bar{\sigma}_c^{\begin{pmatrix} \psi_p & 0 \\ 0 & \varphi_p \end{pmatrix}}$$

soit $\begin{bmatrix} \psi_p & 0 \\ 0 & \varphi_p \end{bmatrix}$ invariant, on vérifie aisément que

$$\|\overline{\sigma}_c^{\begin{pmatrix}\psi_p & 0\\ 0 & \varphi_p\end{pmatrix}}(x_p)\gamma\| \to 0 \quad \text{quand } p \to \infty \quad \text{(iii)}.$$

Des relations (i), (ii), (iii) appliquées aux éléments $x \otimes e_{21}$ pour tout $x \in M$, on déduit que

$$\|\varphi_p - (D\psi_p : D\varphi_p)_c \psi_p\| \to 0 \quad \text{quand } p \to \infty.$$

On termine la démonstration du théorème en utilisant l'égalité

$$(D\psi_p : D\varphi_p)_c = X_f(\psi_p)X_f(\varphi_p)^{-1}$$

et l'appartenance de $X_f(\varphi_p)$ à M_{φ_p}.

3.2. COROLLAIRE. *Soient* $(\psi_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$, ψ *des formes linéaires positives normales sur* M *(non nécessairement fidèles) telles que* $\|\psi_p - \psi\| \to 0$ *quand* $p \to \infty$. *Soit* f *unitaire* $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$ *telle que le cocycle* c, *qui lui est associé, soit de classe* C^2 *(en norme). Alors*

$$\|X_f(\psi_p)\psi_p - X_f(\psi)\psi\| \to 0 \quad \textit{quand } p \to \infty.$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Soit ψ'_p une forme linéaire positive normale sur M telle que

$$\text{Supp } \psi'_p = 1 - \text{Supp } \psi_p \quad \text{et que} \quad \|\psi'_p\| = \frac{1}{p}.$$

Soit γ une forme linéaire positive normale sur M telle que

$$\text{Supp } \gamma = 1 - \text{Supp } \psi, \quad \text{et } \|\gamma\| = 1.$$

On pose

$$\varphi_p = \psi_p \oplus \psi'_p \quad \text{et} \quad \gamma_p = \frac{1}{p}\gamma \oplus \psi \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{N}^*.$$

On applique alors le Théorème 3.1 à $(\varphi_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$, $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$ et ψ; ce qui donne :

$$\|X_f(\varphi_p)\varphi_p - X_f(\gamma_p)\gamma_p\| \to 0 \quad \text{quand } p \to \infty.$$

D'où

$$\|X_f(\psi_p)\psi_p - X_f(\psi)\psi\| \to 0 \quad \text{quand } p \to \infty.$$

4. *Continuité de* X_f *pour tout* $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$. Le Théorème 3.1 établie ci-dessus, et son Corollaire 3.2, restent évidemment vrais lorsque f n'est plus supposée unitaire, mais que l'application :

$$\mathbf{R}^*_+ \to L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^*_+)$$
$$\lambda \mapsto f_\lambda : (\alpha, x) \mapsto f(\alpha, x)\overline{f(\alpha, \lambda^{-1}x)}$$

est encore de classe C^2.

On se propose de montrer la continuité de X_f dans le cas général.

a) *Restriction du domaine de* f.

4.1. LEMME. *Soit*

$$F_0 = \{ (\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* | \rho(\alpha) \leqq x < 1 \}.$$

On note Φ *l'application* : $f \mapsto f_{|F_0}$.

1) Φ *induit un isomorphisme de* $L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_+^*)/\widetilde{\theta}$ sur $\mathrm{L}^\infty(F_0)$.

2) Φ *induit un isomorphisme de* $C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))_{\widetilde{\theta}}$ *sur le quotient* :

$$de \left\{ \begin{array}{l} f \textit{ boréliennes bornées sur } F_0 \textit{ telles que} \\ -) \textit{ pour tout } \alpha \in \Omega, f_\alpha \textit{ soit continue sur } [\rho(\alpha), 1[\\ -) \textit{ pour presque tout } \alpha \in \Omega, \end{array} \right\}$$

$$f(\alpha, \rho(\alpha)) = \lim_{x \to 1} f(\theta_0(\alpha), x)$$

où $f\mathscr{R}g$ *si et seulement si* $f_\alpha = g_\alpha$ *pour presque tout* $\alpha \in \Omega$.

Démonstration. On définit $\overline{\theta}$ sur F_0 par

$$\overline{\theta}(\alpha, x) = (\theta_0(\alpha), \rho^{-1}(\alpha)x).$$

On vérifie alors aisément que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\overline{\theta}^n$ est une bijection de F_0 sur $\overline{\theta}^n(F_0)$ où

$$\overline{\theta}^n(F_0) = \{ (\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* | \rho(\overline{\theta}_0^{-1}(\alpha))^{-1} \ldots (\theta_0^{-n+1}(\alpha))^{-1}$$
$$< \rho(\theta_0^{-1}(\alpha))^{-1} \ldots \rho(\theta_0^{-n}(\alpha))^{-1} \} \text{ si } n \leqq 1$$

et

$$\overline{\theta}^n(F_0) = \{ (\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* | \rho(\alpha)\rho(\theta_0(\alpha)) \ldots \rho(\theta_0^{-n}(\alpha)) \leqq x$$
$$< \rho(\alpha) \ldots (\rho(\theta_0^{-n-1}(\alpha)) \} \text{ si } n \leqq -1$$

d'où

$$\Omega \times \mathbf{R}_+^* = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \overline{\theta}^n(F_0);$$

les $\overline{\theta}^n(F_0)$ étant deux à deux disjoints. θ_0 étant mesurable, pour toute $g \in L^\infty(F_0)$, on définit $f \in P_M$ par

$$f(\alpha, x) = g((\overline{\theta})^{-n}(\alpha, x)) \quad \text{pour tout } (\alpha, x) \in \overline{\theta}^n(F_0).$$

Il est alors clair que Φ est un isomorphisme de C^* algèbres de $L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_+^*)/\widetilde{\theta}$ sur $L^\infty(F_0)$ d'où 1); 2) se déduit immédiatement de ce qui précède.

b) Densité des fonctions $f \in C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))_{\widetilde{\theta}}$ telles que l'application $\lambda \mapsto f_\lambda$ soit de classe C^2:

4.2. LEMME. *Soit* $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$. *Il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, *uniformément bornée,* $f_n \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$, *telle que pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *l'application* $\lambda \mapsto (f_n)_\lambda$ *soit de classe* C^∞ *et telle que pour tout* $\alpha \in \Omega$,

$$\sup_{\rho(\alpha)\leqq x<1} |f_n(\alpha, x) - f(\alpha, x)| \to 0 \quad \textit{quand } \mathrm{n} \to \infty.$$

Démonstration. Pour tout $\alpha \in \Omega$, f_α est définie sur $\mathbf{R}^*_+$; on prolonge f_α par 0 sur $\mathbf{R}_-$:

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite régularisante telle que

$$\mathrm{Supp}\ \varphi_n \subset \left[-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}\right]$$

($0 \leqq \varphi_n \leqq 1$, φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$).

Pour tout $\alpha \in \Omega$, on pose $g_{n,\alpha} = f_\alpha * \varphi_n$; puis on définit $f_{n,\alpha}$ par :

$$f_{n,\alpha}(x) = g_{n,\alpha}(x) + a_\alpha x + b_\alpha$$

où a_α et b_α sont choisis de sorte que

$$f_{n,\alpha}(\rho(\alpha)) = f_\alpha(\rho(\alpha)) \quad \text{et} \quad f_{n,\alpha}(1) = f_\alpha(1).$$

Alors

$$\sup_{\rho_\alpha\leqq x<1} |f_{n,\alpha}(x)| \leqq 3\|f\|_\infty.$$

D'après 2) du Lemme 4.1, il existe alors une unique fonction $f_n \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$ telle que pour tout $\alpha \in \Omega$, pour tout $x \in [\rho(\alpha), 1[$:

$$f_n(\alpha, x) = f_{n,\alpha}(x) \cdot (\|f_n\| \leqq 3\,\|f\|).$$

On vérifie aisément, en utilisant les propriétés de régularité de φ_n, que l'application :

$$\lambda \in \mathbf{R}^*_+ \mapsto (f_n)_\lambda \in L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^*_+)$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Par ailleurs, la continuité uniforme de f_α sur un voisinage compact de $[\rho(\alpha), 1]$ entraîne que pour tout $\alpha \in \Omega$,

$$\sup_{\rho(\alpha)\leqq x<1} |f_n(\alpha, x) - f(\alpha, x)| \to 0 \quad \text{quand n} \to \infty.$$

4.3. LEMME. *Soit* $(g_n)n\in\mathbf{N}^*$ *une suite uniformément bornée de fonctions de* $C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$, *telles que pour tout* $\alpha \in \Omega$,

$$\sup_{\rho(\alpha)\leqq x<1} |g_n(\alpha, x)| \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Il existe alors une suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *de fonctions uniformément bornées de* $C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$, *telles que*

i) *pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma_n(\alpha, x) \geqq |g_n(\alpha, x)|$ *pour tout* $x \in \mathbf{R}_+^*$, *pour tout* $\alpha \in \Omega$.

ii) *pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, *l'application*
$\lambda \in \mathbf{R}_+^* \mapsto (\Gamma_n)_\lambda \in L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}_+^*)$

soit de classe $\mathscr{C}^\infty$.

iii) *pour tout* $\alpha \in \Omega$,

$$\operatorname*{Sup}_{\rho(\alpha) \leqq x < 1} \Gamma_n(\alpha, x) \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On prolonge $g_{n,\alpha}$ par 0 sur $\mathbf{R}-$.
Pour tout $(\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$\psi_n(\alpha, x) = \operatorname*{Sup}_{|y-x| \leqq 1/n} |g_n(\alpha, y)|,$$

puis $\gamma_n = \psi_n * \varphi_n$. Alors $\lambda \mapsto (\gamma_n)_\lambda$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et il est évident que pour tout $(\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^*$,

$$\gamma_n(\alpha, x) \geqq |g_n(\alpha, x)|.$$

En utilisant à nouveau le 2) du Lemme 4.1, on considère l'unique $\Gamma_n \in C_\Omega^*(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}_+^*))_{\tilde{\theta}}$ telle que pour $\alpha \in \Omega$, pour tout $x \in [\rho(\alpha), 1[$:

$$\Gamma_n(\alpha, x) = \gamma_n(\alpha, x) + a_{n,\alpha}x + b_{n,\alpha}$$

où $a_{n,\alpha}$ et $b_{n,\alpha}$ sont tels que :

$$\Gamma_n(\alpha, 1) = \operatorname{Sup}(\gamma_n(\alpha, 1); \gamma_n(\theta_0^{-1}(\alpha), \rho(\theta_0^{-1}(\alpha))))$$

$$\Gamma_n(\alpha, \rho(\alpha)) = \operatorname{Sup}(\gamma_n(\alpha, \rho(\alpha)); \gamma_n(\theta_0(\alpha), 1)).$$

Γ_n comme γ_n vérifie (ii).

$$\|\Gamma_n\| \leqq 3\|g_n\| \leqq 3K \quad \text{pour tout } n$$

$$(\text{où } K = \operatorname*{Sup}_{n \in \mathbf{N}^*} \|g_n\|)$$

et

$$\Gamma_n(\alpha, x) \geqq \gamma_n(\alpha, x) \geqq |g_n(\alpha, x)|$$

pour tout $\alpha \in \Omega$ et tout $x \in [\rho_\alpha, 1[$ d'où (i).

Il reste à vérifier (iii).

L'hypothèse faite sur la suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ entraîne que pour tout $\alpha \in \Omega$, pour tout sous-ensemble compact K de $\mathbf{R}_+^*$,

$$\operatorname*{Sup}_{x \in K} |g_n(\alpha, x)| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Soit $\alpha \in \Omega$; $\rho(\alpha) > 0$.

Soit $n_0 \geqq 2/\rho(\alpha)$; de ce qui précède on déduit facilement que

$$\operatorname*{Sup}_{\rho(\alpha)-\frac{1}{n_0}\leqq x\leqq 1+\frac{1}{n_0}} \psi_n(\alpha, x) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

D'où

$$\operatorname*{Sup}_{\rho(\alpha)\leqq x<1} \Gamma_n(\alpha, x) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

On peut maintenant établir la continuité de X_f dans le cas général.

4.4. THEOREME. *Soit $f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$. Soient ψ, $(\psi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ des formes linéaires normales sur M telles que $\|\psi_k - \psi\| \to 0$ quand $k \to \infty$. Alors*

$$\|X_f(\psi_k)\psi_k - X_f(\psi)\psi\| \to 0 \textit{ quand } k \to \infty.$$

Démonstration. Soient $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ comme dans le Lemme 4.2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$g_n = f - f_n.$$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifie les hypothèses du Lemme 4.3; on en déduit alors l'existence d'une suite $(\Gamma_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfaisant aux conclusions de ce lemme.

Il existe $k \in N$ tel que

$$\rho(\alpha)s(k_\alpha) \leqq k_\alpha < 1 \quad \text{pour tout } \alpha \in \Omega;$$

et une isométrie partielle u de M tels que $\psi = u^*(\omega_k \circ E)u$.

Alors

$$\begin{aligned}\|X_{\Gamma_n}(\psi)\psi\| &= \int_\Omega \tau_\alpha(\Gamma_n(k_\alpha)k_\alpha)d\mu(\alpha)\\ &\leqq \int_\Omega \operatorname*{Sup}_{\rho(\alpha)\leqq x<1} \Gamma_n(\alpha, x)\tau_\alpha(k_\alpha)d\mu(\alpha).\end{aligned}$$

$\int_\Omega \tau_\alpha(k_\alpha)d\mu(\alpha) < \infty$; donc $\tau_\alpha(k_\alpha) < \infty$ pour presque tout $\alpha \in \Omega$. La condition (iii) du Lemme 4.3 entraîne alors que

$$\operatorname*{Sup}_{\rho(\alpha)\leqq x<1} \Gamma_n(\alpha, x)\tau_\alpha(k_\alpha) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty,$$

pour presque tout $\alpha \in \Omega$.

D'où $\|X_{\Gamma_n}(\psi)\psi\| \to 0$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue; i.e., pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_0 tel que

$$\|X_{\Gamma_n}(\psi)\psi\| < \epsilon \quad \text{pour tout } n \geqq N_0.$$

Γ_{N_0} vérifient la proprieté (ii) du Lemme 4.3, on déduit du Corollaire 3.2 que

$$\|X_{\Gamma_{N_0}}(\psi_p)\psi_p - X_{\Gamma_{N_0}}(\psi)\psi\| \to 0 \quad \text{quand } p \to \infty. \text{ Or}$$

$$\|X_{g_{N_0}}(\psi_p)\psi_p\| \leqq \|X_{\Gamma_{N_0}}(\psi_p)\psi_p\| \quad \text{pour tout } p$$

(conséquence de (i)). D'où il existe p_0 tel que pour tout $p \geqq p_0$

$$\|X_{g_{N_0}}(\psi_p)\psi_p\| < \epsilon \quad \text{et} \quad \|X_{g_{N_0}}(\psi)\psi\| < \epsilon.$$

En appliquant le Corollaire 3.2 à $X_{f_{N_0}}$, on vérifie que l'inégalité

$$\|X_f(\psi_p)\psi_p - X_f(\psi)\psi\| < 2\epsilon$$

est vraie pour p assez grand.

On est maintenant en mesure de déterminer $C^*(M)$.

4.5. THEOREME. *$C^*(M)$ est isomorphe à $C^*_\Omega(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$. L'image de $X \in C^*(M)$ par cet isomorphisme est $f \in C^*_\Omega(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^*_+))$ de sorte que*

$$X(\omega_h \circ E) = \int_\Omega^\oplus f_\alpha(h_\alpha)d\mu(\alpha)$$

pour tout h positif affilié à N de trace finie.

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de la Proposition 1.1 et du Théorème 4.4.

5. *Caractérisation de l'équivalence topologique de deux formes linéaires positives normales sur M par l'égalité des mesures sur F_0 qui leur sont associées.*

5.1. PROPOSITION. *A chaque $\varphi \in M^+{}_*$, on peut associer une unique mesure de Borel sur F_0, notée μ_φ, telle que pour toute $f \in C^*_\Omega(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$:*

$$\varphi(X_f(\varphi)) = \int_{F_0} f(t)d\mu_\varphi(t).$$

Démonstration. 1) Existence du μ_φ : Soit $f \in \mathcal{C}_c(F_0)$ positive. Soit

$$M = \operatorname*{Sup}_{(\alpha,x)\in F_0} f(\alpha, x).$$

Il existe une suite décroissante $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions positives sur F_0 qui converge simplement vers f sur F_0 et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$-$) $f_{n,\alpha}$ soit continue sur $[\rho(\alpha), 1[$ et

$$\operatorname*{Sup}_{\rho(\alpha)\leqq x<1} |f_{n,\alpha}(x)| \leqq M.$$

$-$) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_{n,\theta_0(\alpha)}(x) = f_{n,\alpha}(\rho(\alpha))$ pour tout $\alpha \in \Omega$.

On note encore f_n l'unique élément de $C^*_\Omega(\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}}$ associé à f_n (cf. Lemme 4.1). On pose alors

$$L_\varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(X_{f_n}(\varphi)).$$

Ceci a bien un sens car si $\varphi \sim \omega_h \circ E$, $\rho s(h) \leqq h < 1$;

$$L_\varphi(f) = \int_\Omega \tau_\alpha(f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha)d\mu(\alpha)$$

(grâce à la normalité de τ_α et au théorème de convergence monotone).

L_φ admet alors un unique prolongement en une forme linéaire continue positive sur $\mathscr{C}_c(F_0)$. Du théorème de représentation de Riesz, on déduit l'existence d'une mesure de Borel positive μ_φ sur F_0 vérifiant la condition voulue.

2) Unicité de μ_φ :

Soit μ' une autre mesure de Borel sur F_0 telle que

$$\varphi(X_f(\varphi)) = \int_{F_0} f(t)d\mu'(t) \quad \text{pour toute } f \in C^*_\Omega(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\widetilde{\theta}}.$$

Soit $f \in \mathscr{C}_c(F_0)$ positive. Soient (f_n) comme ci-dessus. Le théorème de convergence monotone appliqué aux mesures μ et μ_φ prouve que

$$\int_{F_0} f(t)d\mu'(t) = \int_{F_0} f(t)d\mu_\varphi(t).$$

Par linéarité cette égalité reste vraie pour toute $f \in \mathscr{C}_c(F_0)$. D'où $\mu' = \mu_\varphi$.

5.2. *Remarque.* Soit f borélienne bornée sur F_0; soit $\varphi \in M^+{}_*$; $\varphi \sim \omega_h \circ E$, $\rho s(h) \leqq h < 1$, alors

$$\text{(i)} \quad \int_{F_0} f(t)d\mu_\varphi(t) = \int_\Omega \tau_\alpha(f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha)d\mu(\alpha).$$

5.3. THEOREME. 1) *Soient φ, $\psi \in M^+{}_*$ tels que ψ soit adhérent à l'orbite de φ (i.e., il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant $\varphi_n \sim \varphi$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\|\varphi_n - \psi\| \to 0$ quand $n \to \infty$). Alors $\mu_\varphi = \mu_\psi$.*

2) *Soient φ, $\psi \in M^+{}_*$ tels que $\mu_\varphi = \mu_\psi$. Alors it existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $\varphi_n \in M^+{}_*$ telle que :*

pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi_n \sim \varphi$ et Supp φ_n = Supp ψ.

$\|\varphi_n - \psi\| \to 0$ *quand $n \to \infty$.*

5.4. COROLLAIRE. *On peut définir sur $M^+{}_*$ une relation d'équivalence R par : $\varphi R \psi$ si et seulement si ψ est adhérent à l'orbite de φ. Le quotient $M^+{}_*/R$ est séparé.*

Ceci est une conséquence triviale du Théorème 5.3.

5.5. *Démonstration du Théorème* 5.3. 1) Des propriétés P.1 et P.2, on déduit aisément que

$$\varphi(X(\varphi)) = \psi(X(\psi)) \quad \text{pour tout } X \in C^*(M).$$

D'où $\mu_\varphi = \mu_\psi$ (cf. Proposition 5.1).

2) résultera immédiatement de la Proposition 5.6.

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press

5.6. PROPOSITION. *Soient* $h_1, h_2 \in N^+$; $\rho s(h_1) \leqq h_1 < 1$, $\rho s(h_2) \leqq h_2 < 1$. *On suppose que*

$$(\omega_{h_1} \circ E)X(\omega_{h_1} \circ E) = (\omega_{h_2} \circ E)X(\omega_{h_2} \circ E) \text{ pour tout } X \in C^*(M).$$

Alors il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *d'isométries partielles de* N *telle que* :

$$v_n v_n^* = s(h_1);\ v_n^* v_n = s(h_2) \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}$$

$$\|v_n^*(\omega_{h_1} \circ E)v_n - \omega_{h_2} \circ E\| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

5.7. LEMME. *Soient* h_1 *et* h_2 *comme dans la proposition précédente.*

$$h_1 = \int_\Omega^\oplus h_{1,\alpha} d\mu(\alpha) \quad \text{avec } \rho(\alpha)s(h_{1,\alpha}) \leqq h_{1,\alpha} < 1 \quad \text{et}$$

$$\tau_\alpha(h_{1,\alpha}) < \infty \text{ pour tout } \alpha \in \Omega.$$

$$h_2 = \int_\Omega^\oplus h_{2,\alpha} d\mu(\alpha) \quad \text{avec } \rho(\alpha)s(h_{2,\alpha}) \leqq h_{2,\alpha} < 1 \quad \text{et}$$

$$\tau_\alpha(h_{2,\alpha}) < \infty \text{ pour tout } \alpha \in \Omega.$$

Alors pour presque tout $\alpha \in \Omega$; $\tau_\alpha(f(h_{1,\alpha})) = \tau_\alpha(f(h_{2,\alpha}))$ *pour toute fonction* $f:\{0\} \cup [\rho(\alpha), 1] \to \mathbf{C}$ *telle que* $f(0) = 0$ *et dont la restriction à* $[\rho(\alpha), 1]$ *soit continue.*

Démonstration. D'après la Proposition 5.1,

$$\mu_{\omega_{h_1} \circ E} = \mu_{\omega_{h_2} \circ E}.$$

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des restrictions à $[0, 1]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q} + i\mathbf{Q}$; $\mathscr{P}$ est dénombrable et dense dans $(\mathscr{C}([0, 1]), \|\ \|_\infty)$.

Pour toute $f \in \mathscr{P}$, l'application

$$\begin{aligned} &\Omega \to \mathbf{C} \times \mathbf{C} \\ &\alpha \mapsto (\tau_\alpha(f(h_{1,\alpha})h_{1,\alpha}), \tau_\alpha(f(h_{2,\alpha})h_{2,\alpha})) \end{aligned}$$

est mesurable. Il existe alors un sous-ensemble borélien B de Ω tel que $\mu(\Omega - B) = 0$ et tel que les restrictions à B des applications précédentes soient boréliennes. Alors l'application:

$$\Phi: B \times \mathscr{C}([0, 1]) \to \mathbf{R}+$$

$$(\alpha, f) \mapsto |\tau_\alpha(f(h_{1,\alpha})h_{1,\alpha}) - \tau_\alpha(f(h_{2,\alpha})h_{2,\alpha})|$$

est borélienne.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$A_n = \left\{(\alpha, f) \in B \times \mathscr{C}([0, 1])/\Phi(\alpha, f) > \frac{1}{n}\right\}.$$

A_n est borélien; $\mathscr{C}([0, 1])$ est métrique complet. Soit Z_n la projection de A_n sur Ω. Il existe alors une application borélienne :

$$\begin{aligned} &Z_n \to \mathscr{C}([0, 1]) \\ &\alpha \mapsto f_\alpha \end{aligned}$$

telle que pour tout $\alpha \in Z_n$, $(\alpha, f_\alpha) \in A_n$. Soit

$$\alpha \in Z_n \mapsto a_\alpha \in \mathbf{U}$$

(ensemble des nombres complexes de module 1) une application borélienne telle que pour tout $\alpha \in \Omega$:

$$[\tau_\alpha(f_\alpha(h_{1,\alpha})h_{1,\alpha}) - \tau_\alpha(f_\alpha(h_{2,\alpha})h_{2,\alpha})]a_\alpha \in \mathbf{R}+.$$

On définit $g \in \mathscr{B}_b(F_0)$ par

$$g(\alpha, x) = \begin{cases} a_\alpha f_\alpha(x) \text{ si } x \in Z_n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$\int_{F_0} g(t) d\mu_{\omega_{h_1} \circ E}(t) = \int_{F_0} g(t) d\mu_{\omega_{h_2} \circ E}(t).$$

Ce qui, d'après la remarque 5.2 donne

$$0 = \int_{Z_n} |\tau_\alpha(f_\alpha(h_{1,\alpha})h_{1,\alpha}) - \tau_\alpha(f_\alpha(h_{2,\alpha})h_{2,\alpha})| d\mu(\alpha) \geqq \frac{1}{n} \mu(Z_n).$$

D'où $\mu(Z_n) = 0$.

5.8. *Démonstration de la Proposition* 5.6. D'après le Lemme 5.7, on peut supposer que pour tout $\alpha \in \Omega$ et toute $f:\{0\} \cup [\rho(\alpha), 1] \to \mathbf{C}$ telle que $f(0) = 0$ et que $f|_{[\rho(\alpha),1]}$ soit continue

$$\tau_\alpha(f(h_{1,\alpha})) = \tau_\alpha(f(h_{2,\alpha})).$$

On déduit alors de III.2.3, l'existence, pour tout $\alpha \in \Omega$, d'une suite $(u_{n,\alpha})_{n \in \mathbf{N}}$ d'isométries partielles de N_α telles que

$$u_{n,\alpha}u_{n,\alpha}^* = s(h_{1,\alpha}), \; u_{n,\alpha}^* u_{n,\alpha} = s(h_{2,\alpha})$$

et que

$$\tau_\alpha |u_{n,\alpha}{}^* h_{1,\alpha} u_{n,\alpha} - h_{2,\alpha}| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Soit $\alpha \mapsto T_i(\alpha)$ une suite d'applications mesurables de A dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)$, soit $A \subset \Omega$ $(\mu(\Omega - A) = 0)$ tels que : pour tout $\alpha \in A$ les $(T_i(\alpha))_{i \in \mathbf{N}}$ soient denses dans N_α muni de la topologie forte, et que pour tout $i \in \mathbf{N}$ l'application :

$$\begin{aligned} &A \to \mathbf{R}+ \\ &\alpha \mapsto \tau_\alpha |T_i(\alpha) h_{1,\alpha} T_i(\alpha)^* - h_{2,\alpha}| \end{aligned}$$

soit borélienne.

On vérifie alors aisément que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$G_n = \left\{(\alpha, x) \in A \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0) | x \in N_\alpha \text{ et } \tau_\alpha |x h_{1,\alpha} x^* - h_{2,\alpha}| < \frac{1}{n}\right\}$$

est un sous-ensemble borélien de $\Omega \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)^F$.

Par ailleurs, en notant $\mathscr{T}$ l'ensemble des isométries partielles de $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)$, on sait, (cf. la démonstration du Lemme II.1.3) que

$$E = \{ (\alpha, x_\alpha) \in \Omega \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1 | x_\alpha \in N_\alpha \cap \mathscr{T};$$

$$x_\alpha x_\alpha^* = s(h_{1,\alpha}) \text{ et } x_\alpha^* x_\alpha = s(h_{2,\alpha}) \}$$

est borélien dans $\Omega \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^F$.

Or pour tout $\alpha \in \Omega$, $G_{n,\alpha} \cap E_\alpha \neq \emptyset$. Il existe alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, un champ mesurable : $\alpha \in A \mapsto v_{n,\alpha} \in N_\alpha$ tel que

$$(\alpha, v_{n,\alpha}) \in G_n \cap E \text{ pour tout } \alpha \in A.$$

On pose

$$v_n = \int_\Omega^\oplus v_{n,\alpha} d\mu(\alpha)$$

avec $v_{n,\alpha} = 0$ si $\alpha \notin A$. $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfait aux conclusions de la proposition.

6. *Etude des mesures μ_φ, pour $\varphi \in M^+{}_*$.* A chaque $\varphi \in M^+{}_*$, on associe la mesure μ_φ sur F_0 définie en 5.1.

On se propose ici de caractériser les mesures ainsi obtenues.

6.1. Proposition. *Soit π la projection de F_0 sur Ω. Soit ν une mesure de Borel sur* F_0, *positive, telle que $\nu(F_0) = 1$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\varphi \in \mathscr{S}(M)$ tel que $\mu_\varphi = \nu$ est que : pour tout sous-ensemble borélien A de F_0 tel que $\mu(\pi(A)) = 0$; $\nu(A) = 0$.*

Démonstration. i) Pour tout $\varphi \in M^+{}_*$, $\varphi \sim \omega_h \circ E$, $\rho s(h) \leqq h < 1$, pour toute f borélienne bornée sur F_0,

$$\int_{F_0} f(t) d\mu_\varphi(t) = \int_\Omega \tau_\alpha(f_\alpha(h_\alpha)h_\alpha) d\mu(\alpha)$$

(cf. 5.2). D'où la nécessité de la condition.

ii) Soit ν vérifiant la condition énoncée ci-dessus. On peut prolonger ν en une mesure (encore notée ν) définie sur la σ algèbre $\mathscr{B}$ des boréliens de $\Omega \times [0, 1]$ par

$$\nu(A) = \nu(A \cap F_0) \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{B}.$$

Soit $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une numérotation de $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose $B_n =]0, r_n[$. On définit alors une mesure ν_{B_n} positive sur la σ algèbre $\mathscr{B}_0$ des sous-ensembles boréliens de Ω en posant :

$$\nu_{B_n}(A) = \int_{\Omega\times]0,1]} \frac{1}{x} \chi_{A\times B_n}(\alpha, x) d\nu(\alpha, x) \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{B}_0.$$

L'hypothèse faite sur ν entraîne l'absolue continuité de la mesure ν_{B_n} par rapport à la mesure μ. D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe alors $g_n \in L^1(\mu)$ tel que pour tout $A \in \mathscr{B}_0$:

$$\nu_{B_n}(A) = \int_\Omega \chi_A(\alpha) g_n(\alpha) d\mu(\alpha).$$

On peut de plus, en faisant une récurrence sur n, choisir g_n de sorte que : pour tous $p, n \in \mathbf{N}$, $r_p < r_n \Rightarrow g_p \leqq g_n$.

On définit alors pour tout $\alpha \in \Omega$ et tout $t \in]0, 1[$

$$\varphi_\alpha(t) = \inf_{\{n/r_n > t\}} g_n(\alpha).$$

En utilisant la séparabilité de $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^{+f}$ (i.e., $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^{+}$ muni de la topologie faible), on déduit l'existence de B borélien, $B \subset \Omega$, $\mu(\Omega - B) = 0$, tel que pour tout $r \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$, l'application

$$B \times \mathfrak{L}(\mathfrak{H}_0)_1^{+f} \rightarrow \mathbf{R}+$$
$$(\alpha, h) \mapsto \tau_\alpha(\chi_{[\rho(\alpha), r]}(h))$$

De ce qui précède, et du Lemme III.3.2 appliqué à φ_α, on déduit l'existence d'un champ mesurable d'opérateurs : $\alpha \in \Omega \mapsto h_\alpha \in N_\alpha$ tel que :

i) pour tout $\alpha \in \Omega$,

$$\rho(\alpha) s(h_\alpha) \leqq h_\alpha < 1.$$

ii) pour tout $\alpha \in B$,

$$\varphi_\alpha(r) = \tau_\alpha(\chi_{[\rho(\alpha), r]}(h_\alpha)) \quad \text{pour tout } r \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[.$$

On pose

$$h = \int_\Omega^\oplus h_\alpha d\mu(\alpha) \quad \text{et} \quad \psi = \tau(h \cdot)\psi \in M^+{}_*.$$

La continuité à droite de φ_α et la normalité de τ_α entrainent alors l'égalité :

$$\int_{F_0} \frac{1}{x} f(\alpha, x) d\nu(\alpha, x) = \int_{F_0} \frac{1}{x} f(\alpha, x) d\mu_\varphi(\alpha, x)$$

pour toute $f = \chi_{A \times]0,t]}$, $\forall (A, t) \in \mathscr{B}_0 \times]0, 1[$ donc aussi pour toute f borélienne positive sur F_0.

On en déduit que

$$\int_{F_0} g(\alpha, x) d\nu(\alpha, x) = \int_{F_0} g(\alpha, x) d\mu_\psi(\alpha, x)$$

pour toute g borélienne positive, donc aussi pour toute g borélienne bornée sur F_0. D'où $\nu = \mu_\psi$. Or $\nu(F_0) = 1$ d'où $\psi(1) = 1$.

6.2. THEOREME. *$\mathcal{S}(M)/R$ est en bijection avec l'ensemble des mesures de Borel positives ν sur F_0 de mesure totale* 1 *telles que pour tout sous-ensemble A de F_0 saturé négligeable* (*i.e.*, $\mu(\pi(A)) = 0$), $\nu(A) = 0$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du Théorème 5.3 et de la Proposition 6.1.

7. *Indépendance des mesures μ_φ par rapport au choix de la décomposition discrète de M.* On écrit ici le flot des poids sur M comme flot des poids sur la transformation ergodique, non singulière, θ_0, d'un espace mesuré (Ω, μ) au-dessus de la fonction $\rho(0 < \rho < 1)$ sur Ω.

Autrement dit, dans l'espace

$$\bar{F}_0 = \{(\alpha, x) \in \Omega \times \mathbf{R}_+^* | \rho(\alpha) \leqq x \leqq 1\},$$

on identifie les points $(\alpha, \rho(\alpha))$ et $(\theta_0(\alpha), 1)$. Et le flot $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}_+^*}$ est défini sur cet espace par :

$$F_\lambda(\alpha, x) = (\alpha, \lambda^{-1}x) \text{ modulo } \bar{\theta}$$

(où $\bar{\theta}(\alpha, x) = (\theta_0(\alpha), \rho^{-1}(\alpha)x)$). Alors d'après le Théorème 1.6.1 de [**3**], il existe une décomposition discrète "unique" de M associée à cette écriture du flot des poids.

Plus précisément : il existe une algèbre de Von Neumann N de type II_∞, un isomorphisme I de $L^\infty(\Omega, \mu)$ sur le centre de N, une trace normale fidèle τ sur N et un automorphisme θ de N tels que $\theta \circ I = I \circ \theta_0$ et que pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$(D(\tau \circ \theta):(D\tau)_t = I(\rho^{it});$$

de sorte que M soit isomorphe à $N \rtimes_\theta \mathbf{Z}$ par un isomorphisme qui respecte l'écriture du flot des poids de M comme flot sur la transformation θ_0 au-dessus de la fonction ρ.

De plus si N', I', τ', θ' satisfont les mêmes conditions, il existe un isomorphisme σ de N sur N' qui transforme N, I, τ, θ en N', I', τ', θ'.

Il est alors évident que les mesures (μ_φ) sur F_0 définies en 5.1 à partir de la décomposition $N \rtimes_\theta \mathbf{Z}$ d'une part, et de la décomposition $N' \rtimes_{\theta'} \mathbf{Z}$ d'autre part, sont les mêmes.

On veut maintenant étudier comment se transforment les mesures μ_φ, lorsque l'on change l'écriture du flot des poids de M comme flot au-dessus d'une fonction.

Soient

$$F_0^{(i)} = \{(\alpha, x) \in \Omega^{(i)} \times \mathbf{R}_+^* | \rho^{(i)}(\alpha) \leqq x < 1\}, i \in \{1, 2\}.$$

On reprend les mêmes notations que précédemment, mais en leur ajoutant les indices (1) et (2) selon l'écriture du flot des poids à laquelle elles se rapportent. En particulier, on note

$$\Theta_{(i)} : L^{\infty}(F_0^{(i)}) \to P_M$$

les isomorphismes canoniques.

$$\Theta_{(i)} \circ F_t = F_t \circ \Theta_{(i)}.$$

Ainsi $\Theta_{(2)}^{-1} \circ \Theta_{(1)}$ est un isomorphisme de $L^{\infty}(F_0^{(1)})$ sur $L^{\infty}(F_0^{(2)})$ qui commute avec l'action du flot.

On sait alors qu'il existe $A_{(1)}$ et $A_{(2)}$ sous-ensembles boréliens de $F_0^{(1)}$ et $F_0^{(2)}$ respectivement, saturés négligeables (i.e., stables par l'action du flot des poids, de mesure nulle), et un isomorphisme de Borel b de $F_0^{(2)} - A_{(2)}$ sur $F_0^{(1)} - A_{(1)}$ qui commute avec l'action du flot, tel que pour toute f borélienne bornée sur $F_0^{(1)}$,

$$\Theta_{(2)}^{-1} \circ \Theta_{(1)}(f) = f \circ b$$

en dehors d'un ensemble saturé négligeable de $F_0^{(2)}$.

On va alors montrer que pour tout $\varphi \in M^+{}_*$, $\mu_{\varphi}^{(2)}$ est image réciproque de $\mu_{\varphi}^{(1)}$ par b.

PROPOSITION. *Pour toute fonction borélienne bornée f sur $F_0^{(1)}$, pour toute forme $\varphi \in M^+{}_*$:*

$$\int_{F_0^{(1)}} f d\mu_{\varphi}^{(1)} = \int_{F_0^{(2)}} f \circ b \, d\mu_{\varphi}^{(2)}.$$

Démonstration. Pour toute f borélienne bornée sur $F_0^{(1)}$,

$$\Theta_{(2)}^{-1} \circ \Theta_{(1)}(f) = f \circ b$$

(en dehors d'un ensemble saturé négligeable); et b commute avec l'action du flot; il est alors évident que $\Theta_{(2)}^{-1} \circ \Theta_{(1)}$ envoie

$$C^*_{\tilde{\Omega}(1)}(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}(1)} \quad \text{sur} \quad C^*_{\tilde{\Omega}(2)}(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}(2)}.$$

Soit $f \in C^*_{\tilde{\Omega}(1)}(\mathscr{C}_b(\mathbf{R}^*_+))_{\tilde{\theta}(1)}$. La définition donnée en 2.1 rend évidente l'égalité :

$$X_f^{(1)}(\psi) = X^{(2)}_{\Theta_{(2)}^{-1}\circ\Theta_{(1)}(f)}(\psi)$$

pour tout poids ψ intégrable. De la densité des poids intégrables dans l'ensemble des poids fidèles de multiplicité infinie pour la distance d (Théorème II.4.7 de [**5**]), et de la continuité de l'application $\varphi \mapsto \overline{\sigma}_c^{\varphi}$ par rapport à la distance d lorsque c est de classe C^2 (Lemme IV.2.4. de [**5**]), on déduit que cette égalité reste vraie pour tout poids fidèle de multiplicité infinie sur M et toute f unitaire associée à un cocycle de classe C^2 en norme. De la propriété P.2 et du Lemme 4.2, il résulte alors que

$$\varphi(X_f^{(1)}(\varphi)) = \varphi(X^{(2)}_{\Theta_{(2)}^{-1}\circ\Theta_{(1)}(f)}(\varphi)) \quad \text{pour tout } \varphi \in M^+{}_*.$$

D'où, d'après la définition et l'unicité des mesures μ_{φ} (cf. 5.1.),

$$\int_{F_0^{(1)}} f \, d\mu_{\varphi}^{(1)} = \int_{F_0^{(2)}} f \circ b \, d\mu_{\varphi}^{(2)}$$

pour toute f borélienne bornée sur $F_0^{(1)}$.

Bibliographie

1. A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 4ème série, tome 6.

2. ——— *Almost periodic states and factors of type* III_1, Journal of Functional Analysis *20.*

3. ——— *On the classification of Von Neumann algebras, and their automorphisms*, Symposia Mathematica *20.*

4. A. Connes and E. Stormer, *Homogeneity of the state space of factors of type* III_1, Journal of Functional Analysis *28.*

5. A. Connes and M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type* III, Tohoku Math. Journal *29.*

6. J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, 2ème édition (Paris, Gauthier-Villars).

7. J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, 2$^{\text{nde}}$ édition (Paris, Masson).

Ecole Normale Supérieure,
Montrouge, France

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-049-7 Published online by Cambridge University Press