Remarques sur l'intégration des fonctions $a^n \cos a\, da$, $a^n \sin a\, da$.

Par M. EDOUARD COLLIGNON,
Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite.

Lorsqu' on intègre successivement les fonctions

$$\cos a\, da,\quad a \cos a\, da,\quad a^2 \cos a\, da,\quad a^3 \cos a\, da \ldots\ldots,$$

où le cosinus de l'arc a est multiplié par une puissance à exposant entier de l'arc lui-même,
on reconnaît que les intégrales sont toutes comprises dans la formule

$$P \sin a + Q \cos a,$$

où P et Q représentent des polynomes entiers en a que l'on détermine dans chaque cas particulier.

On a en effet

$$\int \cos a\, da = \sin a,$$

$$\int a \cos a\, da = a \sin a + \cos a,$$

$$\int a^2 \cos a\, da = (a^2 - 2)\sin a + 2a \cos a,$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'intégration de $\sin a\, da$, $a \sin a\, da$, $a^2 \sin a\, da, \ldots\ldots$ donnerait lieu à des relations analogues.

§ 1

Cherchons d'abord la loi de formation des polynomes P et Q, et posons d'une manière générale

$$(1) \qquad \int a^n \cos a\, da = P_n \sin a + Q_n \cos a,$$

en mettant en évidence l'exposant n dont dépend la forme des polynomes cherchés.

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

Différentions ; nous devrons avoir identiquement

$$a^n \cos a = \left(\mathrm{P}_n + \frac{d\mathrm{Q}_n}{da}\right)\cos a + \left(\frac{d\mathrm{P}_n}{da} - \mathrm{Q}_n\right)\sin a,$$

et par conséquent nous devrons poser

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d\mathrm{P}_n}{da} - \mathrm{Q}_n = 0, \\ \dfrac{d\mathrm{Q}_n}{da} + \mathrm{P}_n = a^n. \end{cases}$$

La première équation montre que Q_n est la dérivée de P_n par rapport à a. Eliminons Q_n entre les deux équations (2). Il viendra

$$(3) \quad \frac{d^2\mathrm{P}_n}{da^2} + \mathrm{P}_n = a^n,$$

équation différentielle du second ordre, dont nous devrons prendre seulement la solution particulière dans laquelle P_n est un polynome entier en a. Posons, en appelant A_1, A_2, A_3, ... des coefficients indéterminés,

$$\mathrm{P}_n = a^n + \mathrm{A}_1 a^{n-1} + \mathrm{A}_2 a^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} a^2 + \mathrm{A}_{n-1} a + \mathrm{A}_n .$$

La seconde dérivée sera égale à

$$\frac{d^2\mathrm{P}_n}{da^2} = n(n-1)a^{n-2} + (n-1)(n-2)\mathrm{A}_1 a^{n-3} + (n-2)(n-3)\mathrm{A}_2 a^{n-4} + \ldots\ldots\ldots + 2\mathrm{A}_{n-2},$$

et la somme des deux fonctions entières doit se réduire à a^n ;

$$a^n = a^n + \mathrm{A}_1 \left| a^{n-1} + \begin{matrix} \mathrm{A}_2 \\ + n(n-1) \end{matrix} \right| a^{n-2} + \left. \begin{matrix} \mathrm{A}_3 \\ + (n-1)(n-2)\mathrm{A}_1 \end{matrix} \right| a^{n-3}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \left. \begin{matrix} \mathrm{A}_n \\ + 2\mathrm{A}_{n-2} \end{matrix} \right|$$

d'où l'on déduit

$$\begin{array}{lcl}
\mathrm{A}_1 = 0 & \text{et par suite} & \mathrm{A}_1 = 0, \\
\mathrm{A}_2 + n(n-1) = 0 & ,, & \mathrm{A}_2 = -n(n-1), \\
\mathrm{A}_3 + (n-1)(n-2)\mathrm{A}_1 = 0 & ,, & \mathrm{A}_3 = 0, \\
\mathrm{A}_4 + (n-2)(n-3)\mathrm{A}_2 = 0 & ,, & \mathrm{A}_4 = n(n-1)(n-2)(n-3), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \mathrm{A}_5 = 0, \\
\mathrm{A}_n + 2\mathrm{A}_{n-2} = 0. & &
\end{array}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

Les coefficients de rang pair A_1, A_3, A_5... sont tous nuls, et l'on a par conséquent

$$A_{n-1} = 0 \text{ si } n \text{ est pair}, \quad A_n = 0 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Les signes des coefficients A_2, A_4, A_6, ... sont alternativement $-$ et $+$, de sorte qu'on a

$$A_n \;\;= (-1)^m \times (n\,!), \quad A_{n-1} = 0, \quad \text{si } n = 2m\,;$$
$$A_{n-1} = (-1)^m \times (n\,!), \quad A_n \;\;= 0, \quad \text{si } n = 2m+1.$$

Soit par exemple $n = 6$. On aura

$$A_2 = -6\,.\,5 = -30, \quad A_1 = A_3 = A_5 = 0,$$
$$A_4 = +6\,.\,5\,.\,4\,.\,3 = 360,$$
$$A_6 = -6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 720\,;$$

et pour $n = 7$

$$A_2 = -7\,.\,6 = -42, \quad A_1 = A_3 = A_5 = A_7 = 0,$$
$$A_4 = 840, \quad A_6 = -5040.$$

Cette règle suffit à la rigueur pour écrire immédiatement les facteurs P_n et Q_n de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$. Mais on peut encore la simplifier, grâce aux remarques suivantes.

Nous venons de trouver

$$(4) \quad P_n = a^n - n(n-1)a^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4} - \ldots\ldots$$

et en prenant la première dérivée du polynome on en déduit

$$(5) \quad Q_n = \frac{dP_n}{da} = na^{n-1} - n(n-1)(n-2)a^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5}$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots -$$

En comparant ces deux polynomes terme par terme, on reconnaît que na^{n-1} est la dérivée de a^n; de sorte que le premier terme de Q_n s'obtient par dérivation du premier terme de P_n;

que $n(n-1)a^{n-2}$, second terme de P_n changé de signe, est la dérivée de na^{n-1}, premier terme de Q_n;

que $n(n-1)(n-2)a^{n-3}$ est la dérivée de $n(n-1)a^{n-2}$, de sorte que la dérivation du second terme de P_n donne le second terme de Q_n,

et ainsi de suite alternativement, en ayant soin d'alterner les signes des termes obtenus, de manière à prendre négativement dans chaque développement les termes de rang pair, positivement les termes de rang impair.

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

Pour opérer les développements des deux polynomes, il convient d'écrire alternativement les dérivées formant chaque terme suivant deux lignes horizontales, l'une qui donnera le développement de P_n, l'autre le développement de Q_n :

$$\begin{array}{llllll} a^n & & n(n-1)a^{n-2} & & n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4} & \\ & na^{n-1} & & n(n-1)(n-2)a^{n-3} & & n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5} \end{array}$$

et ainsi de suite ; en mettant le signe $-$ aux termes de rang pair dans chaque ligne, il vient en définitive

$$P_n = a^n - n(n-1)a^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4} - \ldots\ldots$$

$$Q_n = na^{n-1} - n(n-1)(n-2)a^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5} - \ldots$$

Posons par exemple $n = 7$. Il viendra

$$P_7 = a^7 - 42a^5 + 840a^3 - 5040a,$$

$$Q_7 = 7a^6 - 210a^4 + 2520a^2 - 5040,$$

et l'on aura par conséquent

$$\int a^7 \cos a \, da = (a^7 - 42a^5 + 840a^3 - 5040a)\sin a$$
$$+ (7a^6 - 210a^4 + 2520a^2 - 5040)\cos a.$$

Si, au lieu de mettre en facteur les polynomes P_n, Q_n qui multiplient respectivement $\sin a$ et $\cos a$, on ordonne le second membre par rapport aux puissances descendantes de a, on écrira

$$\int a^7 \cos a \, da = a^7 \sin a + 7a^6 \cos a - 42a^5 \sin a - 210a^4 \cos a$$
$$+ 840a^3 \sin a + 2520a^2 \cos a - 5040a \sin a - 5040 \cos a,$$

et il est clair que pareille disposition est applicable au cas général :

$$(6) \qquad \int a^n \cos a \, da = a^n \sin a + na^{n-1} \cos a - n(n-1)a^{n-2} \sin a$$
$$- n(n-1)(n-2)a^{n-3} \cos a + \ldots\ldots$$

Or pour passer d'un terme au suivant, il suffit de prendre séparément les dérivées des deux facteurs qui composent le terme considéré, savoir le monôme contenant la puissance de a et le facteur trigonométrique qui la multiplie ; par exemple, si l'on isole les facteurs

$$a^n \text{ et } \sin a$$

qui forment le premier terme, on obtiendra le second en prenant leurs dérivées respectives

$$na^{n-1} \text{ et } \cos a,$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

ce qui donnera $na^{n-1}\cos a$;

pour passer au suivant, on isolera de même

$$na^{n-1} \text{ et } \cos a$$

et prenant les dérivées de chacun des facteurs on aura

$$n(n-1)a^{n-2} \text{ et } -\sin a$$

dont le produit est

$$-n(n-1)a^{n-2}\sin a,$$

c'est à dire, le troisième terme.

Le quatrième sera de même

$$n(n-1)(n-2)a^{n-3}\times(-\cos a)$$
$$= -n(n-1)(n-2)a^{n-3}\cos a,$$

et ainsi de suite, jusqu' à épuisement des dérivées des puissances de a ; les facteurs trigonométriques règlent le signe de chaque terme, par l'opération même de la dérivation.

Exemple. Écrire l'intégrale $\int a^{10}\cos a\, da$.

On pourra disposer les calculs en trois colonnes verticales, l'une renfermant le monôme a^{10} et ses dérivées successives, l'autre $\sin a$ et ses dérivées, la troisième le produit des dérivées correspondantes prises dans les deux colonnes.

a^{10}	$\sin a$	$\int a^{10}\cos a\, da = a^{10}\sin a$
$10a^9$	$\cos a$	$+ 10a^9 \cos a$
$90a^8$	$-\sin a$	$- 90a^8 \sin a$
$720a^7$	$-\cos a$	$- 720a^7 \cos a$
$5040a^6$	$\sin a$	$+ 5040a^6 \sin a$
$30240a^5$	$\cos a$	$+ 30240a^5 \cos a$
$151200a^4$	$-\sin a$	$- 151200a^4 \sin a$
$604800a^3$	$-\cos a$	$- 604800a^3 \cos a$
$1814400a^2$	$\sin a$	$+ 1814400a^2 \sin a$
$3628800a$	$\cos a$	$+ 3628800a \cos a$
3628800	$-\sin a$	$- 3628800 \sin a$

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

On aurait du même coup P_{10} et Q_{10} en ordonnant l'intégrale obtenue par rapport à $\sin\alpha$ et à $\cos\alpha$, et en prenant pour P_{10} le coefficient de $\sin\alpha$, pour Q_{10} le coefficient de $\cos\alpha$, ce qui revient à prendre pour P_{10} les termes inscrits dans la première colonne à gauche, de deux en deux en alternant les signes, et pour Q_{10} les autres termes avec signes alternatifs :

$$P_{10} = \alpha^{10} - 90\alpha^8 + 5040\alpha^6 - 151200\alpha^4 + 1814400\alpha^2 - 3628800,$$

$$Q_{10} = 10\alpha^9 - 720\alpha^7 + 30240\alpha^5 - 604800\alpha^3 + 3628800\alpha.$$

§ 2

On trouverait de même l'intégrale $\int \alpha^n \sin\alpha \, d\alpha$. Posons, par analogie avec ce que nous avons fait pour l'intégrale $\int \alpha^n \cos\alpha \, d\alpha$,

$$\int \alpha^n \sin\alpha \, d\alpha = M\cos\alpha + N\sin\alpha,$$

M et N désignant des polynomes entiers en α, qu'il s'agit de déterminer.

Nous aurons, en différentiant et en divisant par $d\alpha$,

$$\begin{aligned} \alpha^n \sin\alpha &= -M\sin\alpha + N\cos\alpha + \frac{dM}{d\alpha}\cos\alpha + \frac{dN}{d\alpha}\sin\alpha \\ &= \left(\frac{dN}{d\alpha} - M\right)\sin\alpha + \left(\frac{dM}{d\alpha} + N\right)\cos\alpha, \end{aligned}$$

d'où résultent les relations qui assurent l'identité des deux membres :

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{dN}{d\alpha} - M = \alpha^n, \\ \dfrac{dM}{d\alpha} + N = 0. \end{cases}$$

Comparons le système d'équations (9) au système (2) :

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dP_n}{d\alpha} - Q_n = 0, \\ \dfrac{dQ_n}{d\alpha} + P_n = \alpha^n. \end{cases}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

On ramène le premier système au second en posant

$$N = Q_n \text{ et } M = -P_n,$$

car la première du groupe (9) devient identique à la seconde du groupe (2), et la seconde du groupe (9) reproduit la première du groupe (2) changée de signe. On aura donc, sans nouveaux calculs,

$$(10) \quad \int a^n \sin a \, da = -P_n \cos a + Q_n \sin a.$$

Si l'on rapproche cette formule de notre formule (1)

$$(1) \quad \int a^n \cos a \, da = P_n \sin a + Q_n \cos a,$$

on pourra les fondre en une seule de deux manières, soit en posant

$$(11) \quad \int a^n \left| \begin{matrix} \cos a \\ \sin a \end{matrix} \right| da = P_n \left| \begin{matrix} \sin a \\ -\cos a \end{matrix} \right| + Q_n \left| \begin{matrix} \cos a \\ \sin a \end{matrix} \right|$$

ce qui revient à changer $\cos a$ en $\sin a$ et $\sin a$ en $-\cos a$ pour passer de l'équation (1) à l'équation (10), ou en multipliant l'équation (10) par l'unité imaginaire $i = \sqrt{-1}$, et en l'ajoutant ensuite à l'équation (1) ; il vient en effet

$$(12) \quad \int a^n (\cos a + i \sin a) \, da = \int a^n e^{ai} \, da$$

$$= P_n (\sin a - i \cos a) + Q_n (\cos a + i \sin a)$$

$$= P_n \frac{e^{ai}}{i} + Q_n e^{ai} = e^{ai}(Q_n - i P_n).$$

§ 3

Nous avons obtenu les relations générales

$$(4) \quad P_n = a^n - n(n-1)a^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4} \ldots\ldots,$$

$$(5) \quad Q_n = na^{n-1} - n(n-1)(n-2)a^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5} \ldots.$$

Changeons n en $n-1$ dans la première équation ; il viendra

$$(13) \quad P_{n-1} = a^{n-1} - (n-1)(n-2)a^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5} \ldots,$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

et cette équation multipliée par n reproduit la valeur de Q_n. On a donc

(14) $Q_n = nP_{n-1}$,

relation générale qui donne, en y changeant n en $n-1$,

$$Q_{n-1} = (n-1)P_{n-2}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dP_{n-1}}{da} = Q_{n-1} = (n-1)P_{n-2},$$

et multipliant par n, il vient

$$n\frac{dP_{n-1}}{da} = n(n-1)P_{n-2}.$$

Formons $\frac{dP_{n-1}}{da}$; nous aurons en multipliant par n la dérivée de l'équation (4)

$$n\frac{dP_{n-1}}{da} = n(n-1)a^{n-2} - n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)a^{n-6} \ldots\ldots,$$

ce qui reproduit, changés de signes, les termes de P_n à partir du second. On a donc l'équation

(15) $P_n = a^n - n\frac{dP_{n-1}}{da} = a^n - n(n-1)P_{n-2}$

qui établit une relation de recurrence reliant entre elles les fonctions P_n de deux en deux.

On prouverait de même, et on établirait du reste, soit en dérivant l'équation (15), soit en nous servant de l'équation (14),

(16) $Q_n = na^{n-1} - n(n-1)Q_{n-2}$.

Les relations (15) et (16) permettent de former de proche en proche les fonctions P et les fonctions Q. On partira de l'intégrale connue $\int \cos a \, da = \sin a$ qui montre que $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$; puis de

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press

l'intégrale $\int a\cos a\, da = a\sin a + \cos a$, ce qui entraîne $P_1 = a$, $Q_1 = 1$, et l'on formera les deux suites :

$$P_0 = 1,$$
$$P_2 = a^2 - 2,$$
$$P_4 = a^4 - 12(a^2 - 2) = a^4 - 12a^2 + 24,$$
$$P_6 = a^6 - 30(a^4 - 12a^2 + 24)$$
$$= a^6 - 30a^4 + 360a^2 - 720,$$
$$P_8 = a^8 - 56(a^6 - 30a^4 + 360a^2 - 720)$$
$$= a^8 - 56a^6 + 1680a^4 - 20160a^2 + 40320,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_1 = a,$$
$$P_3 = a^3 - 6a,$$
$$P_5 = a^5 - 20(a^3 - 6a) = a^5 - 20a^3 + 120a,$$
$$P_7 = a^7 - 42(a^5 - 20a^3 + 120a)$$
$$= a^7 - 42a^5 + 840a^3 - 5040a,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La série des valeurs de Q_n s'obtiendrait de même en partant des relations

$$Q_0 = 0 \text{ et } Q_1 = +1$$

et du premier terme de la formule, toujours égal à na^{n-1}.
Il vient

$$Q_2 = 2a,$$
$$Q_4 = 4a^3 - 12 \times 2a = 4a^3 - 24a,$$
$$Q_6 = 6a^5 - 30(4a^3 - 24a) = 6a^5 - 120a^3 + 720a,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q_3 = 3a^2 - 6,$$
$$Q_5 = 5a^4 - 20(3a^2 - 6) = 5a^4 - 60a^2 + 120, \text{ etc.}$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500001838 Published online by Cambridge University Press