UN THEOREME SUR LES GROUPES D'HOLONOMIE*

KATSUMI NOMIZU

1. MM. Ozeki et Hano ont récemment démontré [3] que tout sous-groupe connexe de Lie du groupe linéaire $GL(n, R)$, $n \geqq 2$, peut être réalisé comme groupe d'holonomie d'une certaine connexion linéaire dans un espace affine de dimension n.

On se propose ici de donner une généralisation de ce résultat au cas de connexions infinitésimales dans une variété fibrée différentiable. On établit:

THÉORÈME. *Soit $P(B, G)$ une variété fibrée principale à base B de dimension $\geqq 2$ et à groupe structural de Lie G. Si le groupe structural G peut être réduit à un sous-groupe connexe de Lie H, alors il existe dans P une connexion infinitésimale dont le groupe d'holonomie restreint est exactement H (au choix convenable d'un point de référence dans P).*

Ce théorème complète aussi le résultat suivant: si H est le groupe d'holonomie d'une connexion infinitésimale dans $P(B, G)$, alors le groupe structural G peut être réduit à H (Proposition, p. 37 [1], voir aussi [2]).

COROLLAIRE. *Tout groupe connexe de Lie G peut être réalisé comme groupe d'holonomie restreint d'une certaine connexion infinitésimale dans une variété fibrée principale à base variété quelconque de dimension $\geqq 2$.*

En effet, étant donnée une variété différentiable quelconque B, il suffit de considérer la variété fibrée principale $P = B \times G$, produit direct.

2. Avant d'entrer dans la démonstration du théorème, il est utile de faire deux remarques suivantes sur les connexions infinitésimales dans une variété fibrée principale $P(B, G)$.

Réduction du groupe structural. On dit que le groupe structural G peut être réduit à un sous-groupe de Lie H, s'il existe une variété fibrée principale

Received December 20, 1955.

* Ce travail a été accompli pendant que l'auteur était boursier de la Fondation Yukawa.

$Q(B, H)$, à base B et à groupe structural H, munie d'un isomorphisme différentiable f de Q dans P, c'est-à-dire, une application différentiable biunivoque f de Q dans P telle que l'on ait $f(xa) = f(x)a$ et $\pi(f(x)) = \pi(f(x))$ pour tout $x \in B$ et pour tout $a \in H$ (π désignant la projection canonique de Q sur B et celle de P sur B).

On sait [2] *que, dans ce cas-là, une connexion infinitésimale quelconque Γ dans Q induit une connexion infinitésimale dans P dont le groupe d'holonomie est égal à celui de Γ.*

Prolongement d'une connexion infinitésimale locale. Soit U un ouvert de B. Une connexion infinitésimale locale sur U est, par définition, une connexion infinitésimale dans $\pi^{-1}(U)$, partie de P sur U, qui est une variété fibrée principale d'une façon naturelle.

En tenant compte de la démonstration (p. 40, [1]) de l'existence de connexions infinitésimales et en utilisant le théorème bien connu (p. 25, [4]) sur le prolongement de sections locales dans une variété fibrée différentiable dont la fibre est homéomorphe à un espace numérique, on obtiendra: *Soient U et V deux ouverts de B tels que $\overline{V} \subset U$. Etant donnée une connexion infinitésimale locale Γ sur U, il existe dans P une connexion infinitésimale qui coïncide avec Γ dans $\pi^{-1}(V)$.*

3. La démonstration du théorème s'achève comme suit. En vertu de la première remarque dans **2**, il suffit d'établir l'existence d'une connexion infinitésimale dans P dont le groupe d'holonomie restreint est égal à G.

Pour cela, soit U un ouvert de B tel que $\pi^{-1}(U)$ soit isomorphe au produit direct $U \times G$. On supposera que U est un voisinage d'un point p avec un système de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$, $n \geqq 2$, pour lesquelles $U = \{(x^i) ; |x^i| < \alpha\}$, $\alpha > 0$, et $x^i(p) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit $V = \{(x^i) ; |x^i| < \beta\}$, où $0 < \beta < \alpha$. On va construire une connexion infinitésimale locale Γ sur U telle que le groupe d'holonomie de la connexion induite sur V soit égal à G; cela fait, on n'a qu'à prolonger Γ de la manière indiquée dans **2**.

Enfin, on se trouve dans le cas suivant: P est le produit direct $U \times G$, où $U = \{(x^i) ; |x^i| < \alpha\}$. Pour $V = \{(x^i) ; |x^i| < \beta\}$, où $\beta < \alpha$, il s'agit de construire une connexion infinitésimale dans P telle que le groupe d'holonomie de la connexion induite dans $V \times G$ soit égal à G. C'est là la question essentiellement résolue dans [3]. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G et soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ une base de $\mathfrak{g}$. Pour r nombres $a_1, \ldots, a_r$ tels que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_r < \beta$, soient $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, des fonctions différentiables dans $-\alpha - \varepsilon < t < \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, qui satisfont aux conditions

$$df_i/dt \begin{cases} = 0 \quad \text{pour} \quad t = a_j,\ j \neq i \\ = c_i \neq 0 \quad \text{pour} \quad t = a_i. \end{cases}$$

On définit une connexion infinitésimale dans $P = U \times G$ au moyen de la forme de connexion ω qui est complètement déterminée par les conditions suivantes:

$$\omega_{(x,e)}(X_1) = \sum_{k=1}^{r} f_k(x^2) A_k$$
$$\omega_{(x,e)}(X_i) = 0, \qquad i = 2, \ldots, n,$$

où X_i sont les champs de vecteurs sur $U \times G$ qui sont la différentiation partielle par rapport à x^i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

En choisissant le point $(p, e) \in V \in G$, $p = (0, 0, \ldots, 0)$, comme point de référence, on voit, tout à fait à la même manière que [3], que le groupe d'holonomie de la connexion induite sur $V \times G$ est égal à G.

Bibliographie

[1] C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950.

[2] K. Nomizu, Reduction theorem for connections and its application to the problem of isotropy and holonomy groups of a Riemannian manifold, Nagoya Math. Journ. **9** (1955), pp. 57-66.

[3] H. Ozeki et J. Hano, On the holonomy groups of linear connections, à ce journal.

[4] N. Steenrod, The topology of fiber bundles, Princeton, 1951.

Institut de Mathématiques
Université de Nagoya