TRANSFORMATIONS AFFINES AGISSANT SUR UN ENSEMBLE COMPACT CONVEXE

SERGE DUBUC

Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et soit K un sous-ensemble convexe compact de E, le problème que nous voulons considérer est le suivant : nous partons d'une famille $\mathbf{A}$ de transformations affines de K dans lui-même, pour chaque point x de K, nous considérons la fermeture de l'enveloppe convexe de $\{A(x) | A \in \mathbf{A}\}$, ce que nous appellons $\mathbf{A}(x)$. Si nous voulons que l'application $x \to \mathbf{A}(x)$ vérifie certaines propriétés, quelles conditions devons-nous imposer à $\mathbf{A}$ ou à K? La solution de ce problème est reliée à plusieurs théorèmes de point fixe (en particulier au théorème de Markov-Kakutani (**2**) et de Ryll-Nardzewski (**3**)), ainsi qu'au lemme de Choquet-Deny sur les solutions bornées de l'équation de convolution $\mu * \sigma = \mu$. Le principal résultat de cet article est que l'application identité est un élément extrême de l'ensemble des applications affines d'un convexe borné en lui-même.

1. Compactification d'un convexe. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et soit C une partie convexe de V, on dira que C est un convexe *borné* si les fonctionnelles affines bornées sur C séparent les points de C. Désignons par C^* la totalité des fonctionnelles affines bornées sur C. Il existe une injection canonique de C dans $\mathbf{R}^{C^*}$: si $x \in C$, $\phi(x) = (c(x)), c \in C^*$. Munissant $\mathbf{R}^{C^*}$ de la topologie de Tychonof, nous dirons que $\hat{C}$, la fermeture de $\phi(C)$ dans $\mathbf{R}^{C^*}$, est le compactifié de C. La proposition suivante établit la propriété universelle dont jouit $(\hat{C}, \phi)$.

PROPOSITION 1. *Soit C un convexe borné et soit $(\hat{C}, \phi)$ le compactifié de C; si K est un espace compact convexe et si A est une application affine de C dans K, alors il existe une et une seule application affine continue $\hat{A}$ de $\hat{C}$ dans K tel que $A = \hat{A} \circ \phi$.*

Preuve. Définissons $\hat{A}$ d'abord sur $\phi(C)$: si $x = \phi(y)$, $\hat{A}(x) = Ay$. Vérifions que $\hat{A}$ est uniformément continu. Soit V un entourage de K, on peut trouver n fonctionnelles affines continues sur K, $\{f_i\}_1^n$, telles que

$$\{(x_1, x_2) | (\forall i)|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < 1\} \subset V ;$$

soit $g_i = f_i \circ A$ et $U = \{(y_1, y_2) | (\forall i)|g_i(x_1) - g_i(x_2)| < 1\}$; si $(y_1, y_2) \in U$

Reçu le 11 mars 1968. La plupart des résultats de cet article proviennent de la thèse de doctorat de l'auteur : *Topological convex spaces*, Cornell University, 1966. Celle-ci fut rédigée sous la direction du professeur James Eells et avec l'appui des professeurs Jacques Deny et Carl Herz.

nous voyons que $(Ay_1, Ay_2) \in V$. Puisque $\hat{A}$ est uniformément continu sur $\phi(C)$, $\hat{A}$ se prolonge de façon unique en un opérateur continue de $\hat{C}$ dans K. $\hat{A}$ sera de plus une application affine.

THÉORÈME 2. *Si C est un convexe borné, si A et B sont deux transformations affines distinctes de C dans C qui commutent entre elles et si $t \in (0, 1)$, alors*

$$(1 - t)A + tB$$

n'est pas une surjection sur C.

Preuve. Supposons que l'opérateur $P = (1 - t)A + tB$ soit surjectif. Si $\hat{P}$, $\hat{A}$, et $\hat{B}$ sont les prolongement continus à $\hat{C}$, des opérateurs originaux, on a que $\hat{P}$ est un opérateur surjectif. Puisque $A \neq B$, on peut trouver un point extrême z de $\hat{C}$ tel que $\hat{A}z \neq \hat{B}z$. Puisque $\hat{P}$ est surjectif et continu, o ı peut trouver un point extrême w de $\hat{C}$ tel que $\hat{P}(w) = z$; d'où $\hat{A}(w) = \hat{B}(w) = z$, $\hat{A}\hat{B}(w) = \hat{A}(z)$, $\hat{B}\hat{A}(w) = \hat{B}(z)$. Mais $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, ce qui entraîne que $A(z) = B(z)$, ce qui est une contradiction.

COROLLAIRE 1. *Si C est un convexe borné, si $A(C, C)$ est l'ensemble des transformations affines de C dans C, alors la transformation identité est un élément extrême de $A(K, K)$.*

En effet, si la transformation identité I est égale à $(1 - t)A + tB$ avec $0 < t < 1$, alors $AB = BA$. D'où par le théorème précédent, $A = B$.

COROLLAIRE 2. *Si B est une algèbre normée avec unité e, alors e est un élément extrême de la boule unité de B.*

COROLLAIRE 3. *Si C est un convexe borné, si I est l'application identité, si A est une transformation affine de C différente de I, si $t \in (0, 1)$, alors $(1 - t)I + tA$ n'est pas un opérateur surjectif.*

Remarque. A la suite du théorème 2, on pourrait être tenté de démontrer que toute application affine surjective de C sur C est un élément extrême de $A(C, C)$. Ceci est faux en général. L'exemple suivant est convaincant : soit C l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f \geqq 0$ et $\sum_{n \in \mathbf{N}} f(n) \leqq 1$. Soit A l'application suivante, si $f \in C$, Af est la fonction

$$g(n) = \begin{cases} f(n+1) & \text{si } n \geqq 1, \\ \frac{1}{2}f(0) + f(1) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Alors A est surjectif, mais A n'est pas un opérateur extrême de $A(K, K)$.

2. Action sur un ensemble convexe. Soit K une partie convexe compacte d'un espace vectoriel topologique localement convexe, nous désignerons par $A(K, K)$ l'ensemble des applications affines de K dans lui-même. Si nous considérons une topologie sur $A(K, K)$, il s'agira de la topologie de la convergence simple.

Définition d'action. Une action sur K est une partie $\mathbf{A}$ de $A(K, K)$ contenant l'application identité. On dira que l'action est *convexe* si $\mathbf{A}$ est une partie convexe de $A(K, K)$, que l'action est *fermée* si $\mathbf{A}$ est une partie fermée de $A(K, K)$. L'action est *continue* si les opérateurs de $\mathbf{A}$ sont continus ; elle est injective si les opérateurs de $\mathbf{A}$ sont injectifs ; elle est abélienne si les opérateurs de $\mathbf{A}$ commutent deux à deux ; elle est transitive si la composition de deux opérateurs de $\mathbf{A}$ donne un opérateur de $\mathbf{A}$.

Définition de l'orbite d'un point par une action. Si $\mathbf{A}$ est une action et si x est un point de K, l'orbite de x, notée $\mathbf{A}(x)$, est le plus petit ensemble convexe fermé de K contenant $\{A(x)| A \in \mathbf{A}\}$.

Etablissons deux propositions élémentaires relatives à certaines actions.

PROPOSITION 3. *Si une action* $\mathbf{A}$ *est transitive et continue ou si elle est transitive convexe et fermée, alors*

$$(\forall x \in K)(\forall y \in \mathbf{A}(x)), \qquad \mathbf{A}(y) \subseteq \mathbf{A}(x).$$

Preuve. (a) Si $\mathbf{A}$ est une action transitive et continue, si $x \in K$ et si $y \in \mathbf{A}(x)$, soit $A \in \mathbf{A}$, alors $Ay \in A(\mathbf{A}(x))$. $A(\mathbf{A}(x))$ est contenu dans la fermeture de l'enveloppe convexe de $\{ABx| B \in \mathbf{A}\}$, puisque A est continue.

$$\{ABx| B \in \mathbf{A}\} \subseteq \{Cx| C \in \mathbf{A}\}.$$

D'où $Ay \in \mathbf{A}(x)$ et $\mathbf{A}(y) \subseteq \mathbf{A}(x)$.

(b) Si $\mathbf{A}$ est une action transitive convexe et fermée, si $x \in K$ et $y \in \mathbf{A}(x)$, puisque $\mathbf{A}(x) = \{Ax| A \in \mathbf{A}\}$, il existe alors un B de $\mathbf{A}$ tel que $y = Bx$ et

$$\mathbf{A}(y) = \{ABx| A \in \mathbf{A}\} \subseteq \mathbf{A}(x).$$

PROPOSITION 4. *Si* $\mathbf{A}$ *est une action abélienne continue et si* $\mathbf{A}(x) \neq \{x\}$, *alors il existe un point* y *de* $\mathbf{A}(x)$ *tel que* $\mathbf{A}(y) \neq \mathbf{A}(x)$.

Preuve. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbf{A}$ est une action convexe. Si $x \in K$ et si $B \in \mathbf{A}$, démontrons que $B(\mathbf{A}(x)) = \mathbf{A}(Bx)$. Puisque B est continu, $B(\mathbf{A}(x))$ est contenu dans la fermeture de

$$\{BAx| A \in \mathbf{A}\} = \{ABx| A \in \mathbf{A}\},$$

d'où $B(\mathbf{A}(x)) \subseteq \mathbf{A}(Bx)$; puisque $\mathbf{A}(x)$ est compacte et que B est continu, $B(\mathbf{A}(x))$ est un ensemble fermé convexe qui contient

$$\{BAx| A \in \mathbf{A}\} = \{ABx| A \in \mathbf{A}\},$$

d'où $\mathbf{A}(Bx) \subseteq B(\mathbf{A}(x))$.

Si $\mathbf{A}(x) \neq \{x\}$, il existe un A de $\mathbf{A}$ tel que $Ax \neq x$, soit $B = \frac{1}{2}(I + A)$ et $y = Bx$. $\mathbf{A}(y) = B(\mathbf{A}(x))$. Si $\mathbf{A}(y) = \mathbf{A}(x)$, par le corollaire 3 du théorème 2, alors il existe un point z de $\mathbf{A}(x)$ tel que $Az \notin \mathbf{A}(x)$. Dans ce cas, $\mathbf{A}(z) \neq \mathbf{A}(x)$.

3. Un point extrême de $\mathbf{A}(x)$.

Définition. Une action est fortement injective si pour tout couple de points distincts x et y de K, l'adhérence de $\{(Ax, Ay) | A \in \mathbf{A}\}$ ne rencontre pas la diagonale de $K \times K$.

Remarque. Une action injective fermée est fortement injective.

PROPOSITION 5. *Si* $\mathbf{A}$ *est une action transitive, continue et fortement injective, alors pour tout* x *de* K, x *est un point extrême de* $\mathbf{A}(x)$.

Preuve. Supposons que x n'est pas un point extrême de $\mathbf{A}(x)$. On peut donc trouver dans $\mathbf{A}(x)$ deux points distincts y et z tels que $x = \frac{1}{2}(y + z)$. Soit w un point extrême de $\mathbf{A}(x)$, w appartient à l'adhérence de $\{A(x) | A \in \mathbf{A}\}$, il existe donc un ultrafiltre $\mathfrak{Z}$ tel que $\lim_{B \in \mathfrak{Z}} B(x) = w$. Par la proposition 4, $\mathbf{A}(x)$ est stable sous les applications de $\mathbf{A}$; d'où $\lim_{B \in \mathfrak{Z}} B(y) = \lim_{B \in \mathfrak{Z}} B(z) = w$. Ce qui contredit le fait que $\mathbf{A}$ est une action fortement injective.

THÉORÈME 6. *Si* $\mathbf{A}$ *est une action abélienne convexe et fermée, alors pour tout point* x *de* K, x *est un point extrême de* $\mathbf{A}(x)$.

Preuve. Puisque l'action est convexe et fermée, $\mathbf{A}(x) = \{Ax | A \in \mathbf{A}\}$. Si x n'est pas un point extrême de $\mathbf{A}(x)$, nous pouvons trouver deux applications A et B de $\mathbf{A}$ telles que $Ax \neq Bx$ et $x = \frac{1}{2}(Ax + Bx)$. Soit

$$K' = \{y | \tfrac{1}{2}(Ay + By) = y\},$$

K' est une partie convexe de K. Puisque $\mathbf{A}$ est une famille abélienne, tout opérateur de $\mathbf{A}$ applique K' dans K'. La restriction à K' de $\frac{1}{2}(A + B)$ est l'identité. Par le corollaire 1 du théorème 2, sur K', $A = B$; ce qui est une contradiction.

COROLLAIRE. *Si* $\mathbf{A}$ *est une action abélienne convexe et fermée, si* x *n'est pas un point extrême de* K, *alors* $\mathbf{A}(x) \neq K$.

PROPOSITION 7. *Si* K *est un espace convexe compact dont les fonctionnelles affines bornées sont toutes continues, si* $\mathbf{A}$ *est une action abélienne, alors pour tout point* x *de* K, x *est un point extrême de* $\mathbf{A}(x)$.

Preuve. Sous les dernières hypothèses, K est isomorphe à son compactifié ; d'où toute application affine de K dans K est continue. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathbf{A}$ est une action convexe. Soit $\mathbf{A}'$ l'adhérence de $\mathbf{A}$ dans $A(K, K)$, il suffit de démontrer que $\mathbf{A}'$ est une action abélienne. Soit B un opérateur de $A(K, K)$ qui ne commute pas avec au moins un élément de la famille $\mathbf{A}$. On peut donc trouver un opérateur A_0 de $\mathbf{A}$ et un point y de K tel que $BA_0y \neq A_0By$. Soit f une fonctionnelle continue qui sépare BA_0y et A_0By, si g est la fonctionnelle suivante sur $A(K, K)$, $g(A) = f(AA_0y) - f(A_0Ay)$, g est une fonctionnelle continue. Comme $g(A) = 0$ et $g(B) \neq 0$, B n'appartient pas à $\mathbf{A}'$. Ce qui démontre que $\mathbf{A}'$ est une famille abélienne. Si $x \in K$, x est un point extrême de $\mathbf{A}'(x) = \mathbf{A}(x)$, d'après le théorème 6.

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-119-1 Published online by Cambridge University Press

Remarque. Evidemment "la plupart" des espaces convexes compacts admettent des fonctionnelles affines bornées discontinues. Mais si B est un espace de Banach réflexif, si K est un sous-ensemble de B convexe, fermée et bornée, d'intérieur non-vide, K muni de la topologie faible est compact et toute fonctionnelle affine bornée sur K est continue.

Nous terminons cette section par l'étude d'une action abélienne transitive continue qui ne vérifie pas la conclusion du théorème 6, ni même le corollaire de celui-ci. Soit K l'espace des fonctions de l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers dans l'intervalle-unité $[0, 1]$. Alors K avec la topologie de la convergence simple est un espace compact convexe. Pour chaque entier x de $\mathbf{Z}$, soit $X: K \to K$ l'application pour laquelle $X(f)(y) = f(x + y)$, si $f \in K$ et si $y \in \mathbf{Z}$. L'action que nous considérons est $\mathbf{A} = \{X | \, x \in \mathbf{Z}\}$. Il s'agit d'une action continue transitive.

Utilisons sur K la mesure μ, le produit des mesures de Lebesgue sur chaque copie de $[0, 1]$, une copie pour chaque entier de $\mathbf{Z}$. Nous prouverons que presque partout, $\mathbf{A}(f) = K$. Puisque K est un espace topologique séparable, il suffit de démontrer que pour une fonction donnée g de K, $g \in \mathbf{A}(f)$ presque partout pour f. Puisque chaque point de K admet une base dénombrable de voisinages, il suffit de démontrer que pour un ouvert donné O, $O \cap \mathbf{A}(f) = \emptyset$ presque partout pour f. Mais les seules parties mesurables de K invariantes par $\mathbf{A}$ sont de mesure 0 ou 1. Si $F = \{f | \, \mathbf{A}(f) \cap O \neq \emptyset\}$, F est mesurable et invariant par $\mathbf{A}$, F contient O qui n'est pas de mesure nulle. Donc $\mu(F) = 1$. Puisque l'ensemble des points extrêmes de K est de mesure nulle, presque partout, x n'est pas un point extrême de $\mathbf{A}(x)$.

4. Points fixes d'une action. Les propositions que nous avons établies jusqu'ici permettent d'obtenir des théorèmes de points fixes dès qu'on utilise le lemme suivant.

LEMMA 8. *Si X est un espace topologique compact, si f est une application de X dans les parties compactes de X satisfaisant aux conditions suivantes :*

(1) $(\forall x \in X), x \in f(x)$,

(2) $(\forall x \in X)\ (\forall y \in f(x)), f(y) \subseteq f(x)$,

(3) $(\forall x \in X)$, *si* $f(x) \neq \{x\}$, *alors il existe un y de $f(x)$ tel que $f(y) \neq f(x)$. Alors si x appartient à X, il existe un x_0 appartenant à $f(x)$ tel que $f(x_0) = \{x_0\}$.*

Preuve. On considère sur X le préordre suivant $x \leqq y$ si $f(x) \subseteq f(y)$. Soit $\{x_i\}$, $i \in I$, une chaîne dans X, vu la compacité de X, $\bigcap_{i \in I} f(x_i) \neq \emptyset$ si $x \in \bigcap_{i \in I} f(x_i)$, alors $x \leqq x_i$. Toute chaîne de X est borné inférieurement. Par le lemme de Zorn, si $x \in X$, il existe un élément minimal x_0 tel que $x_0 \leqq x$. Et dans ce cas $f(x_0) = \{x_0\}$.

THÉORÈME 9 (Markov-Kakutani (**2**)). *Si K est un espace compact convexe et si $\mathbf{A}$ est une famille d'applications affines continues de K dans K telles que,*

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-119-1 Published online by Cambridge University Press

$(\forall A \in \mathbf{A})\ (\forall B \in \mathbf{A}), AB = BA$, *alors il existe un point x de K tel que*

$$(\forall A \in \mathbf{A}) \qquad Ax = x.$$

Preuve. Il n'y aucune perte de généralité à supposer que $\mathbf{A}$ est une action transitive. L'application $x \to \mathbf{A}(x)$ satisfait aux conditions du lemme 8, vu la proposition 3 et la proposition 4. D'où il existe un x_0 tel que $\mathbf{A}(x_0) = \{x_0\}$, c'est-à-dire $(\forall A \in \mathbf{A}), Ax_0 = x_0$.

THÉORÈME 10 (Ryll-Nardzewski (**3**)). *Si* $\mathbf{A}$ *est une action transitive, continue, et fortement injective, alors il existe un point x tel que,* $(\forall A \in \mathbf{A}), Ax = x$.

Preuve. De nouveau, considérons l'application $x \to \mathbf{A}(x)$. Parce que $\mathbf{A}$ est une action transitive et continue, l'application $x \to \mathbf{A}(x)$ satisfait aux conditions (1) et (2) du lemme 8. Vérifions que la condition (3) est vérifiée. Soit $x \in K$, tel que $\mathbf{A}(x) \neq \{x\}$ et soit un point y de $\mathbf{A}(x)$ qui n'est pas un point extrême de $\mathbf{A}(x)$, par la proposition 5, y est un point extrême de $\mathbf{A}(y)$ et $\mathbf{A}(y) \subseteq \mathbf{A}(x)$. D'où $\mathbf{A}(y) \neq \mathbf{A}(x)$.

Utilisant la même argumentation, on peut établir qu'une action abélienne, transitive convexe et fermée admet un point fixe.

5. Action abélienne et équations de convolution. Nous allons indiquer comment un lemme de Choquet-Deny peut se déduire facilement du corollaire 1 du théorème 2. Rappellons une définition. Si C est un ensemble convexe, une partie D de C est dite une partie extrémale de C si,

$$(\forall x \in C)(\forall y \in C)(\forall t \in (0, 1)), \quad (1 - t)x + ty \in D \Rightarrow x \in D \text{ et } y \in D.$$

THÉORÈME 11. *Soit K un ensemble convexe borné, soit* $\mathbf{A}$ *une action abélienne sur K;*
si $\mathbf{A}' = \{A \in A(K, K) \mid \forall B \in \mathbf{A}, AB = BA\}$,
si $K_0 = \{x \in K \mid (\forall A \in \mathbf{A}), Ax = x\}$,
si $\mathbf{A}'' = \{A \in \mathbf{A}' \mid (\forall x \in K_0), Ax = x\}$,
alors $\mathbf{A}''$ *est une partie extrémale de* $\mathbf{A}'$ *qui contient* $\mathbf{A}$.

Preuve. Si $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}'$, et $x \in K_0$, alors $ABx = BAx = Bx$; d'où $B: K_0 \to K_0$. Si $B \in \mathbf{A}'$, $C \in \mathbf{A}'$, et $t \in (0, 1)$, et si la restriction de $(1 - t)B + tC$ à K_0 est l'identité, c'est-à-dire si $(1 - t)B + tC$ appartient à $\mathbf{A}''$, alors par le corollaire 1 du théorème 2, B et C appartiennent à $\mathbf{A}''$. $\mathbf{A}''$ est donc une partie extrémale de $\mathbf{A}'$.

Soit G un demi-groupe topologique abélien localement compact, on dit qu'une mesure μ sur G est bornée si pour toute fonction continue sur G à support compact $\mu_x(f) = \int f(x + y)\, d\mu(y)$ est une fonction bornée en x. Si μ est une mesure bornée et si σ est une mesure dont la masse totale est 1, on peut définir la convolution de μ avec σ : c'est la mesure

$$(\mu * \sigma)(f) = \int f(x + y)\, d\mu(y) d\sigma(x).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-119-1 Published online by Cambridge University Press

Choquet et Deny ont démontré que les mesures bornées μ, telles que $\mu * \sigma = \mu$, sont précisément les mesures μ dont le groupe des périodes contient le support de σ, dans le cas où G est un groupe.

Regardons ce qui se produit lorsque G est un demi-groupe. Soit σ une mesure dont la masse totale est 1, soit μ une mesure bornée telle que $\mu * \sigma = \mu$. Soit K l'ensemble des mesures ν telles que si f est une fonction continue positive à support compact, $\nu(f) \leqq \sup\{\mu_x(f) | x \in G\}$. K est un ensemble convexe borné. L'application $\nu \to \nu * \sigma$ applique K dans K. Soit $\mathbf{A}$ l'action constituée de cet opérateur et de l'opérateur identité et soit $\mathbf{A}'$ les opérateurs de K qui commute avec $\mathbf{A}$. Si x est un point du support de σ et si O est un voisinage ouvert de x, considérons σ_0 et σ_0' les deux mesures

$$\sigma_0(A) = \frac{\sigma(A \cap O)}{\sigma(O)}, \qquad \sigma_0'(A) = \frac{\sigma(A \cap \mathscr{C}O)}{\sigma(\mathscr{C}O)},$$

alors $\sigma = \sigma(O)\sigma_0 + \sigma(\mathscr{C}O)\sigma_0'$. Les convolutions des mesures de K par σ_0 et par σ_0' sont des opérateurs appartenant à $\mathbf{A}'$. D'où σ_0 appartient à toute partie extrémale de $\mathbf{A}'$ qui contient $\mathbf{A}$. Ainsi $\mu * \sigma_0 = \mu$ par le théorème 11. En prenant la limite sur le filtre des voisinages de x, on obtient que $\mu_x = \mu$.

Nous avons donc établi que les mesures bornées, solutions de l'équation $\mu * \sigma = \mu$, ont pour demi-groupe de périodes un demi-groupe qui contient le support de σ.

Bibliographie

1. G. Choquet et J. Deny, *Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$*, C. R. Acad. Sci. Paris *250* (1960), 799–801.

2. S. Kakutani, *Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets*, Proc. Imp. Acad. Tokyo *14* (1938), 242–245.

3. C. Ryll-Nardzewski, *On fixed points of semigroups of endomorphisms of linear spaces*, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: *Contributions to Probability Theory*, Part 1, pp. 55–61 (Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967).

Université de Montréal,
Montréal, Québec