

COHOMOLOGIE DE DE RHAM DU REVÊTEMENT MODÉRÉ DE L'ESPACE DE DRINFELD

DAMIEN JUNGER 

*Mathematisches Institut, Universität Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Münster, Orleans-Ring 10, 48149 Münster, Germany.
(djunger@uni-muenster.de)*

(Received 18 October 2022; revised 31 January 2024; accepted 1 February 2024)

Résumé Dans cet article, nous étudions la cohomologie de de Rham du premier revêtement de la tour de Drinfel'd. En particulier, nous obtenons une preuve purement locale du fait que la partie supercuspidale réalise la correspondance de Jacquet-Langlands locale pour GL_n en la comparant à la cohomologie rigide de certaines variétés de Deligne-Lusztig. Les représentations obtenues sont analogues à celles qui apparaissent dans la cohomologie ℓ -adique lorsqu'on oublie l'action du groupe de Weil. La preuve repose sur une généralisation d'un résultat d'excision de Grosse-Klönne et de la description explicite du premier revêtement en tant que revêtement cyclique obtenu par l'auteur dans un travail précédent.

Abstract In this article, we study the de Rham cohomology of the first cover in the Drinfel'd tower. In particular, we get a purely local proof that the supercuspidal part realizes the local Jacquet-Langlands correspondence for GL_n by comparing it to the rigid cohomology of some Deligne-Lusztig varieties. The representations obtained are analogous to the ones appearing in the ℓ -adic cohomology if we forget the action of the Weil group. The proof relies on the generalization of an excision result of Grosse-Klönne and on the explicit description of the first cover as a cyclic cover obtained by the author on a previous work.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Préliminaires	5
2.1.	Conventions générales	5
2.2.	Cohomologie étale et toseurs	6
2.3.	Cohomologie de de Rham et toseurs	6
2.4.	Cohomologie rigide	7

This work has been written in great part during the author PhD thesis at the ENS Lyon. His work is currently funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) under Germany's Excellence Strategy EXC 2044 –390685587, Mathematics Münster: Dynamics–Geometry–Structure.

© The Author(s), 2024. Published by Cambridge University Press. This is an Open Access article, distributed under the terms of the Creative Commons Attribution licence (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted re-use, distribution and reproduction, provided the original article is properly cited.



3	Rappels sur la géométrie de l'espace de Drinfeld	7
3.1.	L'immeuble de Bruhat-Tits	8
3.2.	L'espace des hyperplans K -rationnels	8
3.3.	Géométrie de l'espace symétrique de Drinfeld	9
3.4.	Géométrie de la fibre spéciale de $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$	10
3.5.	Interprétation modulaire de l'espace de Drinfeld	11
3.6.	La tour de Drinfeld	12
3.7.	Le premier revêtement	13
4	Cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig	14
4.1.	Variétés de Deligne-Lusztig	14
4.2.	Cohomologie étale des variétés de Deligne-Lusztig	16
4.3.	Cohomologie rigide des variétés de Deligne-Lusztig	17
5	Cohomologie de de Rham et revêtements cycliques modérés	18
5.1.	Réduction semi-stable généralisée	18
5.2.	Enoncé du résultat principal	18
5.3.	Tores monômiaux et leurs revêtements cycliques modérés	20
5.4.	Cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique modéré d'un tore monomial	21
5.5.	Une première réduction	25
5.6.	Une deuxième réduction	27
5.7.	Fin de la preuve du théorème 5.1	29
6	Cohomologie de de Rham du premier revêtement de la tour de Drinfeld	32
6.1.	Le tube au-dessus d'une composante irréductible	33
6.2.	Le tube au-dessus d'une intersection de composantes irréductibles	38
6.3.	Réalisation de la correspondance de Langlands locale	40
	References	42

1. Introduction

Soit $d \geq 1$ un entier et p un nombre premier, nous étudierons dans cet article la cohomologie de de Rham de \mathbb{H}_K^d l'espace de Drinfeld de dimension d sur K une extension finie de \mathbb{Q}_p . C'est un ouvert de l'espace projective rigide, sur lequel agit naturellement $G = \mathrm{GL}_{d+1}(K)$, tel que

$$\mathbb{H}_K^d(C) = \mathbb{P}_K^d(C) \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H,$$

où \mathcal{H} est l'ensemble des hyperplans K -rationnels de \mathbb{P}_K^d et $C = \widehat{K}$ le complété d'une clôture algébrique de K .

Dans un article monumental [14], Drinfeld a construit une tour de revêtements finis étales G -équivariants $(\mathcal{M}_{D_r}^n)_{n \geq 0}$ de l'espace $\mathcal{M}_{D_r}^0 := \mathbb{H}_K^d \times \mathbb{Z}$ (avec $\widehat{K} = \widehat{K}^{nr}$ le complété

de l'extension maximale non ramifiée dans \overline{K} et $\mathbb{H}_K^d = \mathbb{H}_K^d \otimes_K \check{K}$, de groupe de Galois \mathcal{O}_D^* avec D l'algèbre à division sur K de dimension $(d+1)^2$ et d'invariant $1/(d+1)$. La cohomologie étale l -adique pour $l \neq p$ de cette tour fournit une réalisation géométrique de la correspondance de Langlands et de Jacquet-Langlands locales ; cf. [23], [5], [24]. Pour $l = p$, $d = 1$ et $K = \mathbb{Q}_p$, il est montré dans [6] que la cohomologie étale p -adique de ces espaces encode aussi la correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la cohomologie de de Rham de la tour de Drinfeld, guidés par le principe informel suivant : les résultats l -adiques établis dans [23], [5], [24] doivent avoir des analogues en cohomologie de de Rham, obtenus en oubliant simplement l'action du groupe de Weil W_K de K et en changeant les coefficients. L'action de W_K sur les groupes de cohomologie l -adique est très intéressante, mais elle devient invisible sur les groupes de cohomologie de de Rham, qui encodent uniquement les liens entre les représentations de G et de D^* . Ce genre de résultat a été démontré pour $d = 1$ dans [12] (pour $K = \mathbb{Q}_p$) et dans [6] (pour K quelconque), pour toute la tour de Drinfeld. Notre résultat principal est une preuve (purement locale) de ce principe quand $n = 1$ et d est quelconque, plus précisément pour la 'partie supercuspidale' de la cohomologie. Il s'agit d'un analogue en cohomologie de de Rham du résultat l -adique démontré par voie locale par Wang [32]. Nous utilisons de manière cruciale les résultats géométriques concernant $\mathcal{M}_{D_r}^1$, obtenus dans loc.cit (la situation est nettement plus compliquée pour $\mathcal{M}_{D_r}^n$ quand $n > 1$, et il est peu probable qu'une approche purement locale puisse résoudre ce problème).

Pour énoncer notre résultat principal, nous avons besoin de quelques préliminaires. Le groupe de Galois du revêtement $\mathcal{M}_{D_r}^1 \rightarrow \mathcal{M}_{D_r}^0$ est $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$ (avec \mathbb{F}_q le corps résiduel de K), un groupe cyclique d'ordre premier à p (ce qui jouera un rôle fondamental par la suite). Soit $\theta : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow C^*$ un caractère primitif de ce groupe (i.e., qui ne se factorise pas par la norme $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow \mathbb{F}_{q^e}^*$ pour tout diviseur e de $d+1$, différent de $d+1$). On peut associer à θ les objets suivants :

- une représentation de Deligne-Lusztig (ou de Green) $\overline{\pi}_\theta$ du groupe $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$.
- une représentation de D^*

$$\rho(\theta) := \mathrm{ind}_{\mathcal{O}_D^*}^{D^*} \varpi^z \theta.$$

- une représentation de G

$$\mathrm{JL}(\rho(\theta)) := \mathrm{c}\text{-ind}_{\mathrm{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)}^G \overline{\pi}_\theta.$$

La notation est bien entendu inspirée par la correspondance de Jacquet-Langlands pour les représentations supercuspidales de niveau 0 et de caractère central trivial sur $\varpi^{\mathbb{Z}}$.

Théorème A. *Pour tout caractère primitif $\theta : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow C^*$ il existe des isomorphismes de G -représentations*

$$\mathrm{Hom}_{D^*}(\rho(\theta), \mathrm{H}_{\mathrm{dR},c}^i(\mathcal{M}_{D_r,C}^1/\varpi^{\mathbb{Z}})) \cong \begin{cases} \mathrm{JL}(\rho(\theta))^{d+1} & \text{si } i = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Expliquons les difficultés qu'il faut surmonter pour prouver ce théorème. La principale est l'absence d'un modèle semi-stable (ou semi-stable généralisé ; cf. ci-dessous) de l'espace

$\mathcal{M}_{D,r}^1$, alors que l'on dispose d'un tel modèle (construit par Deligne) $\widehat{\mathcal{M}}_{D,r}^0$ pour $\mathcal{M}_{D,r}^0$ (du côté Lubin-Tate, la situation est meilleure : Yoshida a construit [34] un modèle semi-stable généralisé du premier revêtement de l'espace de Lubin-Tate et étudié la géométrie de sa fibre spéciale). Le schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{D,r}^0$ possède une interprétation modulaire ; grâce à un théorème fondamental de Drinfeld [14], ce modèle classe des déformations par quasi-isogénie d'un \mathcal{O}_D -module formel spécial de hauteur $(d+1)^2$ au sens de Drinfeld. Soit \mathfrak{X} le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur $\widehat{\mathcal{M}}_{D,r}^0$, si Π_D est une uniformisante de \mathcal{O}_D , alors $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ est un schéma formel en \mathbb{F}_p -espaces vectoriels de Raynaud dont on connaît une classification [29]. De plus, $\widehat{\mathcal{M}}_{D,r}^1$ est l'espace obtenu en analytifiant $\mathfrak{X}[\Pi_D] \setminus \{0\}$.

En utilisant les observations ci-dessus, on peut étudier certains ouverts de l'espace $\mathcal{M}_{D,r}^1$, qui admettent un modèle lisse dont la fibre spéciale est isomorphe à une variété de Deligne-Lusztig (cette observation cruciale a été faite en premier par Teitelbaum [30] quand $d = 1$ et a été généralisée par Wang [32]). La difficulté est alors de montrer que l'étude de ces ouverts suffit à comprendre la cohomologie de l'espace tout entier. En cohomologie l -adique, cela se fait par une étude délicate des cycles évanescents pour relier des questions sur $\mathcal{M}_{D,r}^1$ à des questions sur la fibre spéciale et plus particulièrement, sur la variété de Deligne-Lusztig. Ces méthodes sont propres à la cohomologie l -adique et pour surmonter cet obstacle, nous avons besoin du point technique suivant. Soit \mathcal{X} un schéma formel sur \mathcal{O}_K , localement de type fini. On dit que \mathcal{X} est de réduction semi-stable généralisée si Zariski-localement sur \mathcal{X} on peut trouver un morphisme étale vers $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K\langle X_1, \dots, X_n \rangle / (X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} - \varpi))$ pour certains $r \leq n$ et $\alpha_i \geq 1$ (ou ϖ est une uniformisante de K). Si l'on peut choisir les α_i égaux à 1, on parle de réduction semi-stable.

Théorème B. *Soit \mathcal{X} un schéma formel de réduction semi-stable généralisée, $\mathcal{X}_s = \bigcup_{i \in I} Y_i$ la décomposition en composantes irréductibles de la fibre spéciale et $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ un revêtement étale en fibre générique de groupe de Galois μ_n avec $n \wedge p = 1$. Si $\mathcal{T} = \mathcal{X}_\eta$ ou bien \mathcal{X} est de réduction semi-stable et \mathcal{T} est quelconque, alors pour toute partie finie J de I on a un isomorphisme naturel*

$$H_{\mathrm{dR}}^*(\pi^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j[\mathcal{X}])) \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{dR}}^*(\pi^{-1}(\bigcup_{i \notin J} Y_i[\mathcal{X}]))$$

où $Y_J = \bigcap_{j \in J} Y_j$.

Le cas $n = 1$ et \mathcal{X} semi-stable (non généralisé) est dû à Grosse-Klönne. On a un analogue en cohomologie étale l -adique en termes de cycles évanescents quand \mathcal{X} est algébrisable et $|J| = n = 1$ démontré par Zheng [35] (voir aussi [8]). Nous aurons besoin uniquement du cas où \mathcal{X} est semi-stable dans cet article (par contre il est indispensable de travailler avec J et \mathcal{T} quelconques), mais le cas semi-stable généralisé devrait être utile pour l'étude du premier revêtement de l'espace de Lubin-Tate.

Au vu de la description de la géométrie de $\mathcal{M}_{D,r}^1$ et du théorème B, nous pouvons établir :

Théorème C. Soit θ un caractère primitif de $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$ et notons \mathcal{BT}_0 l'ensemble des sommets de l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple de G . On a des isomorphismes

$$H_{\text{dR},c}^i(\Sigma^1)[\theta] \cong \bigoplus_{s \in \mathcal{BT}_0} H_{\text{rig},c}^i(\text{DL}_{\mathbb{F}_q}/\check{K})[\theta]$$

où $\text{DL}_{\mathbb{F}_q}$ est la variété de Deligne-Lusztig introduite dans 4.1.

Le théorème principal A découlera alors de la théorie de Deligne-Lusztig que nous rappelons dans la partie 4.2.

Toutefois, pour étudier les intersections quelconques de tubes au dessus de composantes $\pi^{-1}(Y_J)$, nous aurons besoin de façon essentielle de la description globale du torseur $\Sigma^1 \rightarrow \mathbb{H}_K^d$ réalisé dans [27] que l'on restreindra à $\pi^{-1}(Y_J) \rightarrow Y_J$.

Remerciements

Le présent travail a été, avec [25, 27, 26], en grande partie réalisé durant ma thèse à l'ENS de Lyon, et a pu bénéficier des nombreux conseils et de l'accompagnement constant de mes deux maîtres de thèse Vincent Pilloni et Gabriel Dospinescu. Je les en remercie très chaleureusement. La preuve du résultat 5.8 doit beaucoup aux conseils de Laurent Fargues (pour m'avoir suggéré de voir le complexe de de Rham sur un revêtement comme une somme directe de complexe sur la base suivant les parties isotypiques) et de Jean-Claude Sikorav (pour l'explication du cas analogue sur le corps des complexes).

2. Préliminaires

2.1. Conventions générales

On fixe dans tout l'article un nombre premier p et une extension finie K de \mathbb{Q}_p , dont on note \mathcal{O}_K l'anneau des entiers, ϖ une uniformisante et $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ le corps résiduel. On note $C = \widehat{\bar{K}}$ le complété d'une clôture algébrique de K et \check{K} le complété de l'extension maximale non ramifiée de K . Soit $L \subset C$ une extension complète de K , susceptible de varier, d'anneau des entiers \mathcal{O}_L , d'idéal maximal \mathfrak{m}_L et de corps résiduel κ .

Si S est un L -espace analytique, on note \mathbb{A}_S^n (resp. \mathbb{P}_S^n) l'espace analytique affine (resp. projectif) sur S , de dimension relative n . Les espaces \mathbb{B}_S^n et \mathbb{B}_S^n seront les boules unitées ouverte et fermée.

Si X est un L -espace analytique et si $F \subset \mathcal{O}(X)$ est une famille finie de fonctions analytiques sur X et g une autre fonction analytique, on note

$$X \left(\frac{F}{g} \right) = \{x \in X \mid \forall f \in F, |f(x)| \leq |g(x)|\}, \quad X \left(\frac{g}{F} \right) = \{x \in X \mid \forall f \in F, |g(x)| \leq |f(x)|\}.$$

De même, $X \left(\left(\frac{F}{g} \right)^{\pm 1} \right)$ ou $X \left(\frac{F}{g}, \frac{g}{F} \right)$ désignera $\{x \in X \mid \forall f \in F, |f(x)| = |g(x)|\}$. Pour $s \in |C^*|$ on note $X \left(\frac{F}{s} \right) = \{x \in X \mid \forall f \in F, |f(x)| \leq s\}$ (idem pour $X \left(\frac{s}{F} \right)$).

Les éléments de la base canonique de \mathbb{Z}^n seront notés $(\delta_i)_i$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ et $A \in M_{k,n}(\mathbb{Z})$, nous adopterons la notation multi-indice (i.e., $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ et $x^A = (x^{A\delta_i})_{1 \leq i \leq k}$).

2.2. Cohomologie étale et toiseurs

Soit n premier à p , on identifie $H_{\text{ét}}^1(X, \mu_n)$ et l'ensemble des classes d'isomorphisme de μ_n -toiseurs sur X (i.e., des revêtements galoisiens $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$ de groupe de Galois μ_n). On note $[\mathcal{T}]$ la classe d'isomorphisme du toiseur \mathcal{T} , vue comme un élément de $H_{\text{ét}}^1(X, \mu_n)$. Si $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sont des μ_n -toiseurs sur X , alors $\mathcal{T}_1 \times_X \mathcal{T}_2 \rightarrow X$ est un revêtement de groupe de Galois μ_n^2 et en notant $H \cong \mu_n$ l'antidiagonal, le quotient $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \times_X \mathcal{T}_2 / H$ est un revêtement de X de groupe de Galois $\mu_n^2 / H \cong \mu_n$ et $[\mathcal{T}_1] + [\mathcal{T}_2] = [\mathcal{T}_3]$. Il est à remarquer que $\mathcal{T}_1 \times_X \mathcal{T}_2$ est encore un revêtement de \mathcal{T}_3 de groupe de Galois $H \cong \mu_n$.

Le morphisme de Kummer sera noté $\kappa : \mathcal{O}^*(X) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(X, \mu_n)$. Le toiseur $\kappa(u)$ associé à une fonction inversible u sur X sera noté $\pi : X(u^{1/n}) \rightarrow X$. Si $U \subset X$ est un ouvert affinoïde, alors

$$\mathcal{O}_{X(u^{1/n})}(\pi^{-1}(U)) \simeq \mathcal{O}_X(U)[t]/(t^n - u).$$

2.3. Cohomologie de de Rham et toiseurs

Si X est un affinoïde sur L , on notera X^\dagger l'espace surconvergent associé. Si X^\dagger est un espace surconvergent lisse, d'espace rigide analytique sous-jacent X , on note $H_{\text{dR}}^*(X)$ et $H_{\text{dR}}^*(X^\dagger)$ les hypercohomologies des complexes de de Rham $\Omega_{X/L}^\bullet$ et $\Omega_{X^\dagger/L}^\bullet$. Par [19, Proposition 2.5], le théorème *B* de Kiehl [28, Satz 2.4.2] et la suite spectrale de Hodge-de Rham, ces cohomologies sont calculées directement à partir du complexe de de Rham correspondant, quand X est Stein.¹ Les deux cohomologies coïncident si X est partiellement propre (par exemple Stein).

Soit n premier à p et $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$ un μ_n -toiseur d'un espace analytique lisse X . On a une décomposition $\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}} = \bigoplus_{\chi \in \mu_n^\vee} \mathcal{L}_\chi$ où \mathcal{L}_χ est l'espace propre associé au caractère χ pour l'action de μ_n (c'est un faisceau localement libre de rang 1). Le morphisme π étant étale, on a

$$\pi_* \Omega_{\mathcal{T}/L}^q = \Omega_{X/L}^q \otimes \pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}} = \bigoplus_{\chi \in \mu_n^\vee} \Omega_{X/L}^q \otimes \mathcal{L}_\chi$$

et de même pour le complexe surconvergent. Les différentielles des complexes de de Rham étant μ_n -équivariantes, elles respectent ces décompositions en somme directe donnant lieu pour chaque χ à des complexes de cochaînes $\Omega_{X/L}^\bullet \otimes \mathcal{L}_\chi =: \Omega_{\mathcal{T}/L}^\bullet[\chi]$ et $\Omega_{X^\dagger/L}^\bullet \otimes \mathcal{L}_\chi =: \Omega_{\mathcal{T}^\dagger/L}^\bullet[\chi]$ dont les cohomologies seront notées $H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T})[\chi]$ et $H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}^\dagger)[\chi]$. C'est la partie isotypique associée à χ . En particulier,

$$H_{\text{dR}}^*(X) = H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T})^{\mu_n} = H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T})[1] \text{ et } H_{\text{dR}}^*(X^\dagger) = H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}^\dagger)^{\mu_n} = H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}^\dagger)[1].$$

¹En cohomologie de de Rham (non surconvergente), l'hypothèse X quasi-Stein suffit.

Soit $\mathcal{T}_1 \rightarrow X$, $\mathcal{T}_2 \rightarrow Y$ deux μ_n -torseurs sur des L -espaces lisses X et Y . On obtient $\mathcal{T}_1 \times_L Y$, $X \times_L \mathcal{T}_2$ deux revêtements sur $X \times_L Y$ et on construit (voir plus haut pour la définition de H)

$$\mathcal{T}_3 = ((\mathcal{T}_1 \times_L Y) \times_{X \times Y} (X \times_L \mathcal{T}_2))/H = (\mathcal{T}_1 \times_L \mathcal{T}_2)/H.$$

C'est un revêtement de $X \times_L Y$ dont la classe s'identifie à $[\mathcal{T}_1 \times_L Y] + [X \times \mathcal{T}_2]$. Comme $\mathcal{T}_1 \times_L \mathcal{T}_2$ est un revêtement de \mathcal{T}_3 étale de groupe de Galois H , on a

Proposition 2.1. *On a des isomorphismes naturels*

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}_3) &= H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}_1 \times_L \mathcal{T}_2)^H = \bigoplus_{q_1+q_2=q} \bigoplus_{\chi \in \mu_n^\vee} H_{\text{dR}}^{q_1}(\mathcal{T}_1)[\chi] \otimes H_{\text{dR}}^{q_2}(\mathcal{T}_2)[\chi], \\ H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}_3)[\chi] &= \bigoplus_{q_1+q_2=q} H_{\text{dR}}^{q_1}(\mathcal{T}_1)[\chi] \otimes H_{\text{dR}}^{q_2}(\mathcal{T}_2)[\chi] \end{aligned}$$

idem pour la cohomologie de de Rham surconvergente.

2.4. Cohomologie rigide

La cohomologie rigide d'un schéma algébrique Y sur le corps résiduel κ de L sera notée $H_{\text{rig}}^*(Y/L)$. On rappelle la dualité de Poincaré :

Proposition 2.2. 1. *Si X est un L -affinoïde lisse, pur de dimension d , alors*

$$H_{\text{dR}}^i(X^\dagger) \cong H_{\text{dR},c}^{2d-i}(X^\dagger)^\vee \text{ et } H_{\text{dR},c}^i(X^\dagger) \cong H_{\text{dR}}^{2d-i}(X^\dagger)^\vee.$$

2. *Si X est un L -espace lisse et Stein, pur de dimension d , alors*

$$H_{\text{dR}}^i(X) \cong H_{\text{dR},c}^{2d-i}(X)^\vee \text{ et } H_{\text{dR},c}^i(X) \cong H_{\text{dR}}^{2d-i}(X)^\vee.$$

3. *Si Y est un schéma lisse sur κ , pur de dimension d , alors*

$$H_{\text{rig}}^i(Y/L) \cong H_{\text{rig},c}^{2d-i}(Y/L)^\vee \text{ et } H_{\text{rig},c}^i(Y/L) \cong H_{\text{rig}}^{2d-i}(Y/L)^\vee.$$

Démonstration. Voir [19, proposition 4.9] pour le premier point, [19, proposition 4.11] pour le second et [3, théorème 2.4] pour le dernier.

Le théorème de comparaison suivant nous sera très utile :

Théorème 2.3. *Soit \mathcal{X} un schéma formel lisse sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_L)$, de fibre spéciale \mathcal{X}_s et de fibre générique \mathcal{X}_η , on a un isomorphisme naturel*

$$H_{\text{dR}}^*(\mathcal{X}_\eta^\dagger) \cong H_{\text{rig}}^*(\mathcal{X}_s).$$

Démonstration. Il s'agit de [21, proposition 3.6].

3. Rappels sur la géométrie de l'espace de Drinfeld

Nous rappelons quelques résultats standards concernant la géométrie de l'espace symétrique de Drinfeld et nous renvoyons à ([4, section 1, 10, sous-sections I.1. et II.6.], [7, sous-section 3.1.], [32, sous-sections 2.1. et 2.2]) pour plus de détails. On fixe

une extension finie K de \mathbb{Q}_p , une uniformisante ϖ de K et un entier $d \geq 1$. On note $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ le corps résiduel de K et $G = \text{GL}_{d+1}(K)$.

3.1. L'immeuble de Bruhat-Tits

Notons \mathcal{BT} l'immeuble de Bruhat-Tits associé au groupe $\text{PGL}_{d+1}(K)$. Le 0-squelette \mathcal{BT}_0 de l'immeuble est l'ensemble des réseaux de K^{d+1} à homothétie près (i.e., \mathcal{BT}_0 s'identifie à $G/K^* \text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$). Un $(k+1)$ -uplet de sommets $\sigma = \{s_0, \dots, s_k\} \subset \mathcal{BT}_0$ est un k -simplexe de \mathcal{BT}_k si et seulement si, quitte à permuter les sommets s_i , on peut trouver pour tout i des réseaux M_i avec $s_i = [M_i]$ tels que

$$M_{-1} = \varpi M_k \subsetneq M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_k.$$

En posant

$$\overline{M}_i = M_i/M_{-1},$$

on obtient un drapeau $0 \subsetneq \overline{M}_0 \subsetneq \overline{M}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \overline{M}_k \cong \mathbb{F}^{d+1}$. On note $d_i = \dim_{\mathbb{F}}(\overline{M}_i) - 1$ et $e_i = d_i - d_{i-1}$. Nous dirons que le simplexe σ est de type (e_0, e_1, \dots, e_k) .

Considérons une base $(\overline{f}_0, \dots, \overline{f}_d)$ adaptée au drapeau (i.e., telle que $\overline{M}_i = \langle \overline{f}_0, \dots, \overline{f}_{d_i} \rangle$ pour tout i). Pour tout choix de relevés (f_0, \dots, f_d) de $(\overline{f}_0, \dots, \overline{f}_d)$ dans M_0 , on a

$$M_i = \langle f_0, \dots, f_{d_i}, \varpi f_{d_i+1}, \dots, \varpi f_d \rangle = N_0 \oplus \dots \oplus N_i \oplus \varpi(N_{i+1} \oplus \dots \oplus N_k),$$

où

$$N_i = \langle f_{d_{i-1}+1}, \dots, f_{d_i} \rangle$$

avec $d_{-1} = -1$. Si (f_0, \dots, f_d) est la base canonique de K^{d+1} , nous dirons que σ est le simplexe standard de type (e_0, e_1, \dots, e_k) .

La réalisation topologique de l'immeuble sera notée $|\mathcal{BT}|$. Nous confondrons les simplexes avec leur réalisation topologique de telle manière que $|\mathcal{BT}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{BT}} \sigma$. Les différents k -simplexes, vus comme des compacts de la réalisation topologique, seront appelés faces. L'intérieur d'une face σ sera noté $\mathring{\sigma} = \sigma \setminus \bigcup_{\sigma' \subsetneq \sigma} \sigma'$ et sera appelé cellule.

3.2. L'espace des hyperplans K -rationnels

On note \mathcal{H} l'ensemble des hyperplans K -rationnels dans \mathbb{P}^d . Si $a = (a_0, \dots, a_d) \in C^{d+1} \setminus \{0\}$, l_a désignera l'application

$$b = (b_0, \dots, b_d) \in C^{d+1} \mapsto \langle a, b \rangle := \sum_{0 \leq i \leq d} a_i b_i.$$

Ainsi \mathcal{H} s'identifie à $\{\ker(l_a), a \in K^{d+1} \setminus \{0\}\}$ et à $\mathbb{P}^d(K)$.

Le vecteur $a = (a_i)_i \in C^{d+1}$ est dit unimodulaire si $|a|_{\infty} (= \max(|a_i|)) = 1$. L'application $a \mapsto H_a := \ker(l_a)$ induit une bijection entre le quotient de l'ensemble des vecteurs unimodulaires $a \in K^{d+1}$ par l'action évidente de \mathcal{O}_K^* et l'ensemble \mathcal{H} .

Pour $a \in K^{d+1}$ unimodulaire et $n \geq 1$, on considère l'application $l_a^{(n)}$

$$b \in (\mathcal{O}_C/\varpi^n)^{d+1} \mapsto \langle a, b \rangle \in \mathcal{O}_C/\varpi^n$$

et on note

$$\mathcal{H}_n = \{\ker(l_a^{(n)}), a \in K^{d+1} \setminus \{0\} \text{ unimodulaire} \} \simeq \mathbb{P}^d(\mathcal{O}_K/\varpi^n).$$

Alors $\mathcal{H} = \varprojlim_n \mathcal{H}_n$ et chaque \mathcal{H}_n est fini.

3.3. Géométrie de l'espace symétrique de Drinfeld

Nous allons maintenant décrire l'espace symétrique de Drinfeld \mathbb{H}_K^d . Il s'agit de l'espace analytique sur K dont les C -points sont

$$\mathbb{H}_K^d(C) = \mathbb{P}^d(C) \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$

On dispose d'une application G -équivariante

$$\tau : \mathbb{H}_K^d(C) \rightarrow \{\text{normes sur } K^{d+1}\} / \{\text{homothéties}\}$$

donnée par

$$\tau(z) : v \mapsto \left| \sum_{i=0}^d z_i v_i \right|$$

si $z = [z_0, \dots, z_d] \in \mathbb{H}_K^d(C)$. L'image $\tau(z)$ ne dépend pas du représentant de z car les normes sont vues à homothétie près. Le fait de prendre le complémentaire des hyperplans K -rationnels assure que $\tau(z)$ est séparée et donc une norme sur K^{d+1} . D'après un résultat classique de Iwahori-Goldmann [18], l'espace des normes sur K^{d+1} à homothétie près s'identifie bijectivement (et de manière G -équivariante) à l'espace topologique $|\mathcal{BT}|$, ce qui permet de voir τ comme une application

$$\tau : \mathbb{H}_K^d(C) \rightarrow |\mathcal{BT}|.$$

Nous renvoyons à [4, §I.4] quand $d = 1$ ou [32, §2.1] pour la justification des faits suivants. Soit $\sigma \in \mathcal{BT}_k$ un simplexe de type (e_0, e_1, \dots, e_k) et posons

$$\mathbb{H}_{K,\sigma}^d := \tau^{-1}(\sigma), \mathbb{H}_{K,\hat{\sigma}}^d := \tau^{-1}(\hat{\sigma}).$$

L'ouvert $\mathbb{H}_{K,\sigma}^d$ est un affinoïde, admettant un modèle entier $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K,\sigma}^d = \text{Spf}(\hat{A}_\sigma)$ où \hat{A}_σ est le complété p -adique de $\mathcal{O}_K[X_0, \dots, X_d, \frac{1}{P_\sigma}] / (\prod_{i=0}^k X_{d_i} - \varpi)$, pour un certain polynôme $P_\sigma \in \mathcal{O}_K[X_0, \dots, X_d]$ qui est décrit dans [32, §2.1] ou dans [26, §1.5]. Tous ces modèles locaux $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K,\sigma}^d$ se recollent pour donner lieu à un modèle global $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d = \bigcup_\sigma \mathbb{H}_{\mathcal{O}_K,\sigma}^d$ de \mathbb{H}_K^d . La fibre spéciale $\mathbb{H}_{\mathbb{F}}^d$ de ce modèle admet une décomposition similaire $\text{idem} = \bigcup_\sigma \mathbb{H}_{\mathbb{F},\sigma}^d$ qui vérifie $\mathbb{H}_{K,\sigma}^d =]\mathbb{H}_{\mathbb{F},\sigma}^d[$. Nous ne nous servons ici que du cas où $\sigma = s$ est un sommet. L'algèbre \hat{A}_s est alors le complété p -adique de

$$\mathcal{O}_K[X_0, \dots, X_{d-1}, \overline{\prod_{a=(a_i)_i \in \mathbb{F}^{d+1} \setminus \{0\}} (\tilde{a}_0 X_0 + \dots + \tilde{a}_{d-1} X_{d-1} + \tilde{a}_d)}] \tag{1}$$

avec $\tilde{a} = (\tilde{a}_i)_i$ un relevé de a dans \mathcal{O}_K . Pour $\mathbb{H}_{K,\tilde{\sigma}}^d$, il s'agit de l'ouvert (dans une base adaptée)

$$\{z \in \mathbb{P}_K^d : \forall 0 \leq i \leq k, \forall a, b \in M_i \setminus M_{i-1}, \forall c \in M_{i-1}, |\langle c, z \rangle| < |\langle a, z \rangle| = |\langle b, z \rangle|\}$$

avec $M_{-1} = \varpi M_k$. Considérons les ouverts

$$C_r = \{x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{B}_K^r \mid \forall a \in \mathcal{O}_K^{r+1} \setminus \varpi \mathcal{O}_K^{r+1}, 1 = |\langle (1, x), a \rangle|\},$$

$$A_k = \{y = (y_0, \dots, y_{k-1}) \in \mathbb{B}_K^k \mid 1 > |y_{k-1}| > \dots > |y_0| > |\varpi|\}$$

et les morphismes

$$\mathbb{H}_{K,\tilde{\sigma}}^d \rightarrow C_{e_{i-1}}, [z_0, \dots, z_d] \mapsto \left(\frac{z_{d_{i-1}+1}}{z_{d_{i-1}}}, \frac{z_{d_{i-1}+2}}{z_{d_{i-1}}}, \dots, \frac{z_{d_i-1}}{z_{d_{i-1}}}\right) \text{ et}$$

$$\mathbb{H}_{K,\tilde{\sigma}}^d \rightarrow A_k, [z_0, \dots, z_d] \mapsto \left(\frac{z_{d_0}}{z_d}, \frac{z_{d_1}}{z_d}, \dots, \frac{z_{d_{k-1}}}{z_d}\right).$$

Il est montré dans [10, 6.4] que les morphismes ci-dessus induisent un isomorphisme

$$\mathbb{H}_{K,\tilde{\sigma}}^d \cong A_k \times \prod_{i=0}^k C_{e_{i-1}} \cong A_k \times C_\sigma.$$

De même, on peut définir des ouverts en fibre spéciale $\mathbb{H}_{\mathbb{F},\tilde{\sigma}}^d = \mathbb{H}_{\mathbb{F},\sigma}^d \setminus \bigcup_{\sigma' \subsetneq \sigma} \mathbb{H}_{\mathbb{F},\sigma'}^d$, telle que $\mathbb{H}_{K,\tilde{\sigma}}^d =]\mathbb{H}_{\mathbb{F},\tilde{\sigma}}^d[$.

Remarque 3.1. Nous avons introduit précédemment une décomposition en somme adapté au simplexe :

$$M_k = N_0 \oplus \dots \oplus N_k$$

avec $N_i = \langle f_{d_{i-1}+1}, \dots, f_{d_i} \rangle$. En particulier, un vecteur unimodulaire a est dans M_i si et seulement si la projection sur $N_{i+1} \oplus \dots \oplus N_k$ est divisible par ϖ . Ainsi tout vecteur a de M_i peut s'écrire sous la forme $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in N_i$, $a_2 \in M_{i-1}$ et on a d'après la description des morphismes ci-dessus :

$$\frac{l_{a_1}}{z_{d_i}} \in \mathcal{O}^*(C_{e_{i-1}}).$$

3.4. Géométrie de la fibre spéciale de $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$

Si s est un sommet de \mathcal{BT} on note

$$\text{Ost}(s) = \bigcup_{\sigma \ni s} \tilde{\sigma}, \text{Fst}(s) = \bigcup_{\sigma \ni s} \sigma$$

l'étoile ouverte, respectivement fermée de s . Pour un simplexe σ , on note

$$\text{Ost}(\sigma) = \bigcap_{s \in \sigma} \text{Ost}(s), \text{Fst}(\sigma) = \bigcap_{s \in \sigma} \text{Fst}(s).$$

En prenant des intersections, des unions et des complémentaires d'espaces de la forme $\mathbb{H}_{K,\sigma}^d, \mathbb{H}_{\mathbb{F},\sigma}^d$, on peut encore définir des espaces $\mathbb{H}_{K, \text{Ost}(\sigma)}^d, \mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(\sigma)}^d$ (idem pour Fst) tels que $\mathbb{H}_{K, \text{Ost}(\sigma)}^d =]\mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(\sigma)}^d[$.

Les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$ sont les fermés $\mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(s)}^d$ et sont donc indexées par l'ensemble des sommets de \mathcal{BT}_0 . On obtient ainsi un recouvrement admissible $(\mathbb{H}_{K, \text{Ost}(s)}^d)_{s \in \mathcal{BT}_0} = (]\mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(s)}^d[)_{s \in \mathcal{BT}_0}$ de \mathbb{H}_K^d dont les intersections d'ouverts sont de la forme $\mathbb{H}_{K, \text{Ost}(\sigma)}^d$ pour $\sigma \subset \mathcal{BT}$ un simplexe. En fibre spéciale, le lieu lisse de cette intersection est l'ouvert

$$\mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(\sigma)}^d \setminus \bigcup_{s \notin \sigma} \mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(s)}^d = \mathbb{H}_{\mathbb{F}, \hat{\sigma}}^d$$

car $\hat{\sigma} = \sigma \setminus \bigcup_{\sigma' \subsetneq \sigma} \sigma'$. En particulier, le lieu lisse d'une composante irréductible est

$$\mathbb{H}_{\mathbb{F}, s}^d \cong \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d \setminus \bigcup_H H$$

où H parcourt l'ensemble des hyperplans \mathbb{F} -rationnels (cf (1)). De plus, $\mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(s)}^d$ est une compactification qui s'obtient comme suit ([17, sous-section III.1.] ou [33, 4.1.2]). Posons $Y_0 = \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d$ et construisons par éclatements successifs une suite d'espaces

$$Y_d \rightarrow Y_{d-1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_0.$$

Supposons que l'on ait préalablement construit Y_0, \dots, Y_i . On a des morphismes $p_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$ et $\tilde{p}_i = p_i \circ \dots \circ p_1 : Y_i \rightarrow Y_0$. On pose Z_i le transformé strict par \tilde{p}_i de l'union des espaces de codimension $i + 1$ dans Y_0 . On définit Y_{i+1} comme l'éclaté de Y_i suivant Z_i . Alors, on a $Y_d \cong \mathbb{H}_{\mathbb{F}, \text{Ost}(s)}^d$.

3.5. Interprétation modulaire de l'espace de Drinfeld

Pour construire le premier revêtement de l'espace de Drinfeld, nous avons besoin d'une interprétation modulaire de cet espace, ce qui demande quelques notions et notations.

Rappelons que D est une K -algèbre centrale à division, de dimension $(d + 1)^2$ et d'invariant $\frac{1}{d+1}$ et considérons $\mathcal{O}_{(d+1)}$ l'anneau des entiers d'une extension non-ramifiée de K , de degré $d + 1$ contenue dans D . Si A est une \mathcal{O}_K -algèbre, un \mathcal{O}_D -module formel sur $\text{Spec}(A)$ (ou, plus simplement, sur A) est un groupe formel X sur A muni d'une action de \mathcal{O}_D , notée $\iota : \mathcal{O}_D \rightarrow \text{End}(X)$, qui est compatible avec l'action naturelle de \mathcal{O}_K sur l'espace tangent $\text{Lie}(F)$ (i.e., pour a dans \mathcal{O}_K $d\iota(a)$ est la multiplication par a dans $\text{Lie}(F)$). Le \mathcal{O}_D -module formel X est dit *spécial* si $\text{Lie}(X)$ est un $\mathcal{O}_{(d+1)} \otimes_{\mathcal{O}_K} A$ -module localement libre de rang 1. On a le résultat classique suivant :

Proposition 3.2. *Sur un corps algébriquement clos de caractéristique p , il existe, à isogénie près, un unique \mathcal{O}_D -module formel spécial de dimension $d + 1$ et de $(\mathcal{O}_K$ -)hauteur $(d + 1)^2$.*

On notera $\Phi_{\mathbb{F}}$ l'unique (à isogénie près) \mathcal{O}_D -module formel spécial sur \mathbb{F} de dimension $d+1$ et hauteur $(d+1)^2$ (l'entier d étant fixé par la suite, nous ne le faisons pas apparaître dans la notation $\Phi_{\mathbb{F}}$).

Soit $\text{Nilp}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ -algèbres sur lesquelles ϖ est nilpotent. Considérons le foncteur $\mathcal{G}^{Dr} : \text{Nilp}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}} \rightarrow \text{Ens}$ envoyant $A \in \text{Nilp}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets (ψ, X, ρ) avec :

- $\psi : \mathbb{F} \rightarrow A/\varpi A$ est un \mathbb{F} -morphisme,
- X est un \mathcal{O}_D -module formel spécial de dimension $d+1$ et de hauteur $(d+1)^2$ sur A ,
- $\rho : \Phi_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}, \psi} A/\varpi A \rightarrow X_{A/\varpi A}$ est une quasi-isogénie de hauteur zéro.

Le théorème fondamental suivant, à la base de toute la théorie, est dû à Drinfeld :

Théorème 3.3 [14]. *Le foncteur \mathcal{G}^{Dr} est représentable par $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}^d$.*

Remarque 3.4. On définit le foncteur $\tilde{\mathcal{G}}^{Dr}$ de la même manière que \mathcal{G}^{Dr} mais en ne fixant plus la hauteur de la quasi-isogénie ρ . Alors $\tilde{\mathcal{G}}^{Dr}$ est, lui aussi, représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr}^0$ sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$, qui se décompose

$$\tilde{\mathcal{G}}^{Dr} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}^{Dr, (h)},$$

où $\mathcal{G}^{Dr, (h)}$ est défini comme précédemment en imposant que la quasi-isogénie ρ soit de hauteur $(d+1)h$. Chacun des $\mathcal{G}^{Dr, (h)}$ est alors isomorphe (non canoniquement) au foncteur \mathcal{G}^{Dr} , ce qui induit un isomorphisme non-canonique

$$\widehat{\mathcal{M}}_{Dr}^0 \cong \mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}^d \times \mathbb{Z}.$$

3.6. La tour de Drinfeld

On note \mathfrak{X} le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}^d$ (cf. th. 3.3) et $\tilde{\mathfrak{X}}$ le module formel spécial universel déduit de la représentabilité de $\tilde{\mathcal{G}}^{Dr}$. Pour tout entier $n \geq 1$, l'action de Π_D^n induit une isogénie de \mathfrak{X} et de $\tilde{\mathfrak{X}}$. Le schéma en groupes $\mathfrak{X}[\Pi_D^n] = \ker(\mathfrak{X} \xrightarrow{\Pi_D^n} \mathfrak{X})$ (resp. $\tilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D^n]$) est fini plat, de rang $q^{n(d+1)}$ sur $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}^d$ (resp. $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr}^0$).

On note $\Sigma^0 = \mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}^d$ et $\mathcal{M}_{Dr}^0 = (\widehat{\mathcal{M}}_{Dr}^0)^{\text{rig}} \cong \mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K}}}^d \times \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$ on définit

$$\Sigma^n := (\mathfrak{X}[\Pi_D^n] \backslash \mathfrak{X}[\Pi_D^{n-1}])^{\text{rig}}, \quad \mathcal{M}_{Dr}^n := (\tilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D^n] \backslash \tilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D^{n-1}])^{\text{rig}}.$$

Les morphismes d'oubli $\Sigma^n \rightarrow \Sigma^0$ et $\mathcal{M}_{Dr}^n \rightarrow \mathcal{M}_{Dr}^0$ définissent des revêtements finis étales de groupe de Galois² $\mathcal{O}_D^*/(1 + \Pi_D^n \mathcal{O}_D)$. On a encore des isomorphismes non-canoniques $\mathcal{M}_{Dr}^n \cong \Sigma^n \times \mathbb{Z}$ et les revêtements respectent ces décompositions.

²De même, les morphismes intermédiaires $\Sigma^n \rightarrow \Sigma^{n-1}$ et $\mathcal{M}_{Dr}^n \rightarrow \mathcal{M}_{Dr}^{n-1}$ sont des revêtements finis étales de groupes de Galois $(1 + \Pi_D^{n-1} \mathcal{O}_D)/(1 + \Pi_D^n \mathcal{O}_D)$. Les tours obtenues définissent aussi des revêtements pro-étales de groupe de Galois \mathcal{O}_D^*

Le groupe G s'identifie au groupe des quasi-isogénies de \mathfrak{X} , il agit donc naturellement sur chaque niveau de la tour $(\mathcal{M}_{D_r}^n)_{n \geq 0}$. De même, le groupe \mathcal{O}_D^* permute les points de Π_D^n -torsion et \mathcal{O}_D^* agit sur $\mathcal{M}_{D_r}^n$ à travers son quotient $\mathcal{O}_D^*/(1 + \Pi_D^n \mathcal{O}_D) \simeq \text{Gal}(\mathcal{M}_{D_r}^n/\mathcal{M}_{D_r}^0)$. Ces deux actions commutent entre elle et les revêtements $\mathcal{M}_{D_r}^n \rightarrow \mathcal{M}_{D_r}^0$ sont G -équivalariants. En revanche, le revêtement $\Sigma^n \rightarrow \Sigma^0$ est seulement $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)$ -équivalent.

3.7. Le premier revêtement

Nous nous intéressons désormais au cas $n = 1$. On peut encore définir une flèche de réduction ν de Σ^1 vers l'immeuble de Bruhat-Tits \mathcal{BT} s'inscrivant dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^1 & & \\ \downarrow \pi & \searrow \nu & \\ \mathbb{H}_{\check{K}}^d & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{BT} \end{array}$$

Pour tout sous-complexe simplicial $T \subseteq \mathcal{BT}$, on note

$$\Sigma_T^1 = \nu^{-1}(T), \Sigma_{L,T}^1 = \Sigma_T^1 \otimes_{\check{K}} L.$$

Le groupe de Galois de Σ^1 est $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$. Ce groupe est cyclique et son cardinal

$$N = q^{d+1} - 1$$

est premier à p . C'est un revêtement modérément ramifié et ces deux propriétés joueront un rôle central dans la suite. Le schéma $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ est, en particulier, un schéma en \mathbb{F}_p -espaces vectoriels et la condition que \mathfrak{X} soit spécial entraîne que $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ est un schéma de Raynaud. Pour énoncer les conséquences de cette observation, introduisons quelques notations.

Écrivons

$$\tilde{u}_1(z) = (-1)^d \prod_{a \in (\mathbb{F}^{d+1} \setminus \{0\})} a_0 z_0 + \dots + a_d z_d \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\}).$$

Si on fixe $b \in (\mathbb{F}^{d+1} \setminus \{0\})$, on construit $u_1(z) = (b_0 z_0 + \dots + b_d z_d)^{-N} \tilde{u}_1$ une fonction inversible de $\mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d \cong \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}_1} H$ pour s le sommet standard de \mathcal{BT} . Notons que la projection de u_1 dans $\mathcal{O}^*(\mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d)/(\mathcal{O}^*(\mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d))^N$ ne dépend pas du choix de b et celui-ci n'aura donc pas d'incidence sur les résultats à suivre. Pour simplifier, nous pourrons prendre $b = (0, \dots, 0, 1)$. On peut aussi relever u_1 en une fonction inversible dans $\mathcal{O}^*(\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\check{K},s}}^d)$ voire même dans $\mathcal{O}^*(\mathbb{H}_{\check{K}, \text{Ost}(s)}^d)$ que l'on notera encore u_1 .

En utilisant la classification des schémas de Raynaud, on a d'après [26, Théorème 4.9 et Remarque 4.10]⁴ (cet énoncé étend les résultats de Teitelbaum [30, Théorème 5] pour $d = 1$ et de Wang [32, Lemme 2.3.7.] pour d quelconque) :

³En fait, il l'est pour le groupe qui préserve $\Sigma^1 \cong \Sigma^1 \times \{0\}$ à savoir $(v \circ \det)^{-1}((d+1)\mathbb{Z}) \subset G$.

⁴Notons que l'espace $\check{U}_{1,\check{K}}$ dans [26, Remarque 4.10] coïncide avec $\mathbb{H}_{\check{K}, \text{Ost}(s)}^d$.

Théorème 3.5. *Il existe $u \in \mathcal{O}^*(\mathbb{H}_K^d)$ vérifiant $u \equiv u_1 \pmod{\mathcal{O}^*(\mathbb{H}_{K, \text{Ost}(s)}^d)^N}$ telle que*

$$\Sigma^1 \cong \mathbb{H}_K^d((\varpi u)^{\frac{1}{N}}).$$

En particulier, $\Sigma_{\text{Ost}(s)}^1 \cong \mathbb{H}_{K, \text{Ost}(s)}^d((\varpi u_1)^{\frac{1}{N}})$.

Remarque 3.6. Notons que le résultat précédent ne décrit pas l'action de $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}} = \text{Stab}_G(\text{Ost}(s))$. Toutefois, d'après [26, Remarque 4.12], toutes les actions possibles sur Σ^1 commutant avec le revêtement se déduisent l'une de l'autre en tordant par un caractère

$$\chi \in \text{Hom}(\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K), \mu_N(\mathbb{H}_{K, \text{Ost}(s)}^d)) \cong \mathbb{F}^*.$$

Nous déterminerons l'action provenant de l'interprétation modulaire dans 6.3.

4. Cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig

4.1. Variétés de Deligne-Lusztig

Considérons les groupes algébriques $G = \text{GL}_{d+1, \overline{\mathbb{F}}}$ et $G_0 = \text{GL}_{d+1, \mathbb{F}}$, ainsi que le morphisme de Frobenius F défini par $(a_{i,j})_{i,j} \mapsto (a_{i,j}^q)_{i,j}$. Soit B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, T le tore des matrices diagonales, U le sous-groupe de B des matrices unipotentes.

On identifie le groupe de Weyl $W = N_G(T)/T$ à \mathfrak{S}_{d+1} par le biais des matrices de permutation. Soit w la matrice de permutation associée au cycle $(0, 1, \dots, d) \in \mathfrak{S}_{d+1}$. On définit

$$\begin{aligned} Y(w) &:= \{gU \in G/U \mid g^{-1}F(g) \in UwU\} \text{ et} \\ X(w) &:= \{gB \in G/B \mid g^{-1}F(g) \in BwB\}. \end{aligned}$$

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y(w) & \xrightarrow{\iota} & G/U \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ X(w) & \xrightarrow{\iota} & G/B \end{array}$$

Le groupe $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F}) = G(\overline{\mathbb{F}})^{F=1}$ agit sur $Y(w)$ et $X(w)$ par multiplication à gauche. Le groupe fini commutatif

$$T^{wF} := \{t \in T \mid wF(t)w^{-1} = t\}$$

agit librement (par multiplication à droite) sur $Y(w)$. La flèche π est un revêtement fini étale qui induit un isomorphisme $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F})$ -équivariant

$$Y(w)/T^{wF} \xrightarrow{\sim} X(w).$$

On peut rendre ces objets plus explicites comme suit [11, 2.2]. D'une part T^{wF} s'identifie à $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$ via l'application $x \in \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \mapsto \text{diag}(x, Fx, \dots, F^d x)$. D'autre part, considérons la variété

$$\Omega_{\mathbb{F}}^d := \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d \setminus \bigcup_H H,$$

où H parcourt l'ensemble des hyperplans \mathbb{F} -rationnels. Elle possède une action naturelle de $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F})$. On rappelle que l'on a aussi construit dans la section précédente deux applications $\tilde{u}_1(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\})$ et $u_1(z) = \tilde{u}_1(z)/z_d^N \in \mathcal{O}^*(\Omega_{\mathbb{F}}^d)$.

Proposition 4.1. *On a des identifications $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F})$ -équivariantes entre $X(w)$ et $\Omega_{\mathbb{F}}^d$ et entre $Y(w)$ et*

$$\{z \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\} : \tilde{u}_1(z) = 1\} =: \text{DL}_{\mathbb{F}}^d.$$

De plus, π est induite par la projection naturelle $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d$

Remarque 4.2. • En envoyant $(z_0, \dots, z_d) \in Y(w)$ sur $(z_d^{-1}, [z_0 : \dots : z_d])$ et $(t, z = [z_0 : \dots : z_d]) \in \Omega_{\mathbb{F}}^d(u_1^{1/N})$ sur $(\frac{z_0}{tz_d}, \dots, \frac{z_{d-1}}{tz_d}, t^{-1})$ sous l'identification précédente, on obtient un isomorphisme $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$ -équivariant (le deuxième terme n'a pas d'action naturelle de $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F})$...)

$$Y(w) \simeq \Omega_{\mathbb{F}}^d(u_1^{1/N}).$$

- Comme dans la remarque 3.6, toutes les actions possibles de $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F})$ sur $\Omega_{\mathbb{F}}^d(u_1^{1/N})$ commutant avec le revêtement se déduisent l'une de l'autre en tordant par un caractère

$$\chi \in \text{Hom}(\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K), \mu_N(\Omega_{\mathbb{F}}^d)) \cong \mathbb{F}^*,$$

et le lemme 6.3 exhibe une identification naturelle avec l'ensemble des actions considérées dans 3.6. Dans 6.3, nous verrons que l'action provenant de l'interprétation modulaire de Σ^1 et l'action naturelle sur $\text{DL}_{\mathbb{F}}^d$ coïncident sous cette bijection.

Démonstration. On identifie G/B à la variété des drapeaux complets de $(\overline{\mathbb{F}})^{d+1}$. On vérifie facilement qu'un drapeau $\{0\} \subsetneq D_0 \subsetneq \dots \subsetneq D_d = (\overline{\mathbb{F}})^{d+1}$ est dans $X(w)$ si et seulement si pour tout i on a

$$D_i = D_0 \oplus F D_0 \oplus \dots \oplus F^i D_0.$$

On obtient un plongement $X(w) \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d(D_i) \mapsto D_0$. La projection d'un point $z = (z_0, \dots, z_d) \in (\overline{\mathbb{F}})^{d+1} \setminus \{0\}$ est dans l'image de ce morphisme si et seulement si $(z, Fz, \dots, F^d z)$ est une base de $(\overline{\mathbb{F}})^{d+1}$, ce qui revient à dire que $\det((z_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d})$ est non nul. Mais

$$\det((z_i^{q^j})_{i,j})^{q-1} = \prod_{a \in (\mathbb{F})^{d+1} \setminus \{0\}} l_a(z) = (-1)^d \tilde{u}_1(z).$$

On en déduit alors un isomorphisme

$$X(w) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F})} H = \Omega_{\mathbb{F}}^d.$$

La variété G/U classe les paires $((D_i)_i, (e_i)_i)$ avec $(D_i)_i$ un drapeau et $e_i \in D_i/D_{i-1}$. Une paire $((D_i)_i, (e_i)_i)$ est dans $Y(w)$ si et seulement si $(D_i)_i \in X(w)$ et

$$\forall i < d, F^i e_0 \equiv e_i \pmod{D_{i-1}} \text{ et } F^{d+1} e_0 \equiv e_0 \pmod{\text{Vect}(e_1, \dots, e_d)}.$$

Ainsi la flèche $((D_i)_i, (e_i)_i) \mapsto e_0$ induit un plongement $Y(w) \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Y(w) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(w) & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}_{\mathbb{F}}^d \end{array}$$

Un point $x = (z_0, \dots, z_d) \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\}$ est dans l'image de ce morphisme si et seulement si $\det((z_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d}) = (-1)^d \det(F \cdot (z_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d})$. Cela revient à écrire

$$\iota : Y(w) \xrightarrow{\sim} \{z \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}}^{d+1} \setminus \{0\} : \tilde{u}_1(z) = 1\}.$$

4.2. Cohomologie étale des variétés de Deligne-Lusztig

On note $DL_{\mathbb{F}}^d$ l'extension des scalaires de $DL_{\mathbb{F}}^d$ à $\overline{\mathbb{F}}$. Soit $l \neq p$ un nombre premier, nous allons rappeler la description de la partie cuspidale de la cohomologie l -adique à support compact de $DL_{\mathbb{F}}^d$.

Soit $\theta : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^*$ un caractère, on dit que θ est *primitif* s'il ne se factorise pas par la norme $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow \mathbb{F}_{q^e}^*$ pour tout diviseur propre e de $d+1$. Si M est un $\overline{\mathbb{Q}}_l[\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*]$ -module on note

$$M[\theta] = \text{Hom}_{\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*}(\theta, M).$$

Si π est une représentation de $GL_{d+1}(\mathbb{F})$, on dit que π est *cuspidale* si $\pi^N(\mathbb{F}) = 0$ pour tout radical unipotent N d'un parabolique propre de GL_{d+1} . La théorie de Deligne-Lusztig (ou celle de Green dans notre cas particulier) fournit :

Théorème 4.3. Soit $\theta : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^*$ un caractère.

a) Si θ est primitif, alors $H_{\text{ét},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\theta]$ est nul pour $i \neq d$ et

$$\overline{\pi}_{\theta,l} := H_{\text{ét},c}^d(DL_{\mathbb{F}}^d, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\theta]$$

est une $GL_{d+1}(\mathbb{F})$ -représentation irréductible, cuspidale, de dimension $(q-1)(q^2-1)\dots(q^d-1)$. Toutes les représentations cuspidales sont ainsi obtenues.

b) Si θ n'est pas primitif, aucune représentation cuspidale n'intervient dans $\bigoplus_i H_{\text{ét},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\theta]$.

Démonstration. Voir [11, cor. 6.3], [11, th. 7.3], [11, prop. 7.4], [11, prop. 8.3], [11, cor. 9.9], pour ces résultats classiques.

Ainsi, la partie cuspidale $H_{\text{ét},c}^*(DL_{\mathbb{F}}^d, \overline{\mathbb{Q}}_l)_{\text{cusp}}$ de $H_{\text{ét},c}^*(DL_{\mathbb{F}}^d, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est concentrée en degré d , où elle est donnée par $\bigoplus_{\theta} \overline{\pi}_{\theta,l} \otimes \theta$, la somme directe portant sur tous les caractères primitifs.

Remarque 4.4. (voir [11, 6.3] et [34, Proposition 6.8.(ii) et remarques]) Soit $N = q^{d+1} - 1$ et fixons un isomorphisme $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^{\vee} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Soient θ_{j_1} et θ_{j_2} deux caractères primitifs vus comme des éléments de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ via j_1, j_2 , les représentations $\overline{\pi}_{\theta_{j_1}}$ et $\overline{\pi}_{\theta_{j_2}}$ sont isomorphes si et seulement si il existe un entier n tel que $j_1 = q^n j_2$ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

4.3. Cohomologie rigide des variétés de Deligne-Lusztig

Nous aurons besoin d'un analogue des résultats présentés dans le paragraphe précédent pour la cohomologie rigide. Cela a été fait par Grosse-Klönne dans [22]. Si $\theta : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow \overline{K}^*$ est un caractère, posons

$$\overline{\pi}_{\theta} = H_{\text{rig},c}^*(DL_{\mathbb{F}}^d/\overline{K})[\theta] := \bigoplus_i H_{\text{rig},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d/\overline{K})[\theta],$$

où

$$H_{\text{rig},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d/\overline{K}) := H_{\text{rig},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d) \otimes_{W(\mathbb{F})[1/p]} \overline{K}$$

et où $M[\theta]$ désigne comme avant la composante θ -isotypique de M .

Théorème 4.5. Fixons un premier $l \neq p$ et un isomorphisme $\overline{K} \cong \overline{\mathbb{Q}}_l$. Si θ est un caractère primitif, alors

$$\overline{\pi}_{\theta} := H_{\text{rig},c}^d(DL_{\mathbb{F}}^d/\overline{K})[\theta]$$

est isomorphe en tant que $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F})$ -module à $\overline{\pi}_{\theta,l}$, en particulier c'est une représentation irréductible cuspidale.

Démonstration. Cela se fait en trois étapes; cf. [22, 4.5]. Dans un premier temps, on montre [22, 3.1] que les $\overline{K}[\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F}) \times \mathbb{F}_{q^{d+1}}^*]$ -modules virtuels

$$\sum_i (-1)^i H_{\text{ét},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d, \overline{\mathbb{Q}}_l) \text{ et } \sum_i (-1)^i H_{\text{rig},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d/\overline{K})$$

coïncident. Il s'agit d'une comparaison standard des formules des traces de Lefschetz en cohomologies étale l -adique et rigide. Dans un deuxième temps (et c'est bien la partie délicate du résultat), on montre que $\bigoplus_i H_{\text{rig},c}^i(DL_{\mathbb{F}}^d/\overline{K})[\theta]$ est bien concentré en degré d ; cf. [22, th. 2.3]. On peut alors conclure en utilisant le théorème 4.3.

5. Cohomologie de de Rham et revêtements cycliques modérés

Dans ce chapitre L sera une extension non ramifiée de K , donc ϖ en est une uniformisante. Toutes les cohomologies de de Rham seront calculées sur le complexe surconvergeant ie. nous écrirons par abus $H_{\text{dR}}^*(X)$ pour tout espace analytique X au lieu de $H_{\text{dR}}^*(X^\dagger)$.

5.1. Réduction semi-stable généralisée

Soit \mathcal{X} un schéma formel topologiquement de type fini sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_L)$, de fibre générique \mathcal{X}_η et de fibre spéciale \mathcal{X}_s . On a une flèche de spécialisation $\text{Sp} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$. Pour tout sous-schéma $Z \subset \mathcal{X}_s$ on note $]Z[_{\mathcal{X}}$ le tube de Z dans \mathcal{X}_η (i.e., l'espace analytique

$$]Z[_{\mathcal{X}} = \text{Sp}^{-1}(Z) \subset \mathcal{X}_\eta.$$

On dit que \mathcal{X} est de réduction semi-stable généralisée s'il existe un recouvrement ouvert (Zariski) $\mathcal{X} = \bigcup_{t \in T} U_t$ et un jeu de morphismes étales (pour certains $r \leq d$ et $\alpha_i \geq 1$)

$$\varphi_t : U_t \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \dots, x_d \rangle / (x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r} - \varpi)).$$

Dans ce cas, quitte à rétrécir les ouverts U_t et à prendre r minimal, on peut supposer que les composantes irréductibles de la fibre spéciale \overline{U}_t de U_t sont les $V(\overline{x}_i^*)$ pour $i \leq r$ avec $\overline{x}_i^* = \overline{\varphi}_t(\overline{x}_i)$. Elles ont les multiplicités α_i . On dit que \mathcal{X} est de réduction semi-stable si de plus tous les α_i valent 1. Dans ce cas, les fibres spéciales \overline{U}_t sont réduites.

5.2. Enoncé du résultat principal

Soit \mathcal{X} un schéma formel sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_L)$, de réduction semi-stable généralisée, de fibre générique \mathcal{X}_η et de fibre spéciale \mathcal{X}_s . On note $(Y_i)_{i \in I}$ l'ensemble des composantes irréductibles de \mathcal{X}_s . On suppose que le recouvrement $\mathcal{X}_s = \bigcup_{i \in I} Y_i$ est localement fini (i.e., pour toute partie finie J de I , les composantes Y_j pour $j \in J$ n'intersectent qu'un nombre fini de composantes irréductibles de \mathcal{X}_s). Si J est un sous-ensemble de I , on note

$$Y_J = \bigcap_{j \in J} Y_j.$$

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soient \mathcal{X} semi-stable généralisé et $(Y_i)_{i \in I}$ comme ci-dessus, et soit $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ un revêtement étale de groupe de Galois μ_n avec n premier à p . Pour toute partie finie J de I la flèche de restriction induit un isomorphisme*

$$H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(]Y_J[_{\mathcal{X}})) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(]Y_J \setminus \bigcup_{i \notin J} Y_i[_{\mathcal{X}})).$$

si \mathcal{X} est de réduction semi-stable (non généralisée) ou $n = 1$ (i.e., $\mathcal{T} = \mathcal{X}_\eta$).

Remarque 5.2. 1. Si \mathcal{X} est de réduction semi-stable (non généralisée) et $n = 1$ (i.e., $\mathcal{T} = \mathcal{X}_\eta$) le théorème ci-dessus a été démontré par Grosse-Klönne [20, Theorem 2.4.]. Il s'agit d'un point crucial dans sa preuve de la finitude de la cohomologie rigide. Le

principal intérêt de notre généralisation est la présence du revêtement cyclique π de la fibre générique de \mathcal{X}_η .

- Si de plus \mathcal{X} est algébrisable et $|J| = 1$, le résultat [35, Lemme 5.6] est un analogue en cohomologie étale l -adique du théorème ci-dessus.

Comme dans la preuve originale, on procède en deux étapes. On applique dans un premier temps un certain nombre de réductions assez techniques (cf. 5.5 et 5.6) pour se ramener à l'étude des revêtements de couronnes. Ces étapes sont similaires à la démonstration de Grosse-Klönne, qui utilise des recouvrements bien choisis et la suite spectrale de Čech. Dans notre cas, on reprend les mêmes recouvrements de \mathcal{X}_η puis on les tire en arrière par π pour étudier l'espace \mathcal{T} . Le seul point technique à adapter dans ces réductions est la vérification que l'espace final obtenu est bien décrit par un revêtement de couronnes (voir 5.16).

La deuxième étape de la preuve est le calcul de la cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique modéré d'une couronne. Cela se fait par des calculs directs sur le complexe de de Rham, et fournit une description très explicite de ces groupes de cohomologie. Pour énoncer le résultat nous avons besoin de quelques notations. Considérons la couronne

$$X = \mathbb{A}_{rig,L}^d \left(\frac{x_i}{r_i}, \frac{s_i}{x_i} \right)_{1 \leq i \leq d} = \{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{A}_{rig,L}^d \mid s_i \leq |x_i| \leq r_i \}$$

avec $s_1, \dots, s_d, r_1, \dots, r_d \in |\bar{K}^*|$ tels que $s_i \leq r_i$ pour tout i et un revêtement de Kummer de la forme $\mathcal{T} = X((\lambda x^\beta)^{1/n})$ avec n premier à p , $\lambda \in L^*$ et $\beta \in \mathbb{Z}^d$. Les hypothèses sur \mathcal{T} sont loisibles, puisque nous allons voir que tout revêtement $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$ galoisien cyclique d'ordre n est de cette forme. On dispose donc sur \mathcal{T} d'une racine n -ième t de λx^β . On définit enfin

$$\pi_0 = \text{PGCD}(n, \beta_1, \dots, \beta_d), \tilde{n} = \frac{n}{\pi_0}, \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\pi_0}, t_0 = \frac{t^{\tilde{n}}}{x^{\tilde{\beta}}}.$$

Enfin, si $q \geq 1$ et $I = \{i_1 < \dots < i_q\}$ on pose

$$d\log(x_I) = d\log(x_{i_1}) \wedge \dots \wedge d\log(x_{i_q}).$$

Théorème 5.3. *Avec les notations ci-dessus, on a des isomorphismes naturels*

$$H_{\text{dR}}^q(X) \simeq \bigoplus_I L \cdot d\log(x_I)$$

et

$$H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\pi_0-1} t_0^i \bigoplus_I L \cdot d\log(x_I) \cong \bigoplus_{i=0}^{\pi_0-1} t_0^i H_{\text{dR}}^q(X)$$

où I parcourt les parties de $[[1, d]]$ de cardinal q dans les sommes précédentes.

Remarque 5.4. 1. On déduit facilement du théorème que si $X' \subset X$ sont deux couronnes et si $\mathcal{T} \rightarrow X$, $\mathcal{T}' \rightarrow X'$ sont deux revêtements compatibles (ie. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_X X'$) alors la flèche de restriction $H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}) \rightarrow H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}')$ est un isomorphisme qui respecte la décomposition en parties isotypiques.

- En fait, tous ces résultats sont vrais pour une classe plus générale d'espaces, que l'on appellera tores monômiaux. Nous aurons besoin de ce degré de généralité et nous renvoyons à 5.6, 5.8 et 5.10 pour les énoncés dans ce cadre.

5.3. Tores monômiaux et leurs revêtements cycliques modérés

Définition 5.5. On appellera tore monomial de dimension d un L -espace analytique X de la forme⁵

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{A}_{rig,L}^d : s_i \leq |x_i| \leq r_i \text{ et } \rho \leq |x^\alpha| \leq \mu\}$$

pour $s_i \leq r_i \in |\overline{K}^*|$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ et $\rho \leq \mu \in [s^\alpha, r^\alpha] \cap |\overline{K}^*|$.

On appelle tore monomial semi-ouvert un espace défini par les mêmes inégalités qu'un tore monomial, mais potentiellement strictes. Nous souhaitons étendre un résultat de Berkovich [1, Lemma 3.3] au cas des tores monômiaux.

Proposition 5.6. Soit X un tore monomial de dimension d (semi-ouvert), S un espace K -analytique, n un entier premier à p . La projection canonique $\varphi : X_S := X \times S \rightarrow S$ induit un isomorphisme

$$R^q \varphi_* \mu_n \simeq \mu_n(-q) \binom{d}{q}.$$

Démonstration. Soit X un tore monomial et s, r, α, ρ, μ les données associées. Nous allons montrer le résultat par récurrence sur la dimension d . Si $d = 1$, tous les tores monômiaux sont des couronnes qui ont été traitées dans [1, Lemma 3.3] (on peut aussi appliquer [25, Lemme 4.4.] puis la suite exacte de Kummer).

Soit $d > 1$, en projetant sur les $d - 1$ premières coordonnées, on obtient un morphisme $\psi : X \rightarrow Y$ vers le tore monomial :

$$Y = \{x = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{A}_{rig,L}^{d-1} : s_i \leq |x_i| \leq r_i \text{ et } \rho r_d^{-\alpha_d} \leq |x^{\bar{\alpha}}| \leq \mu s_d^{-\alpha_d}\}$$

avec $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1})$. Soient $u : Y_S \rightarrow S$ les projections naturelles, alors $u \circ \psi = \varphi$, donc

$$R\varphi_* \mu_n \simeq Ru_* R\psi_* \mu_n.$$

Par hypothèse de récurrence et la suite spectrale de Leray il suffit d'établir les isomorphismes

$$R^q \psi_* \mu_n = \begin{cases} \mu_n & \text{si } q = 0 \\ \mu_n(-1) & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q > 1 \end{cases}.$$

Notons que $R^q \psi_* \mu_n$ est un faisceau surconvergent (puisque les faisceaux constants le sont et que cette propriété est stable par image directe et twist à la Tate), on peut donc tester les isomorphismes ci-dessus fibre à fibre. Les tiges du faisceau $R^q \psi_* \mu_n$ se calculent grâce au théorème de changement de base [9, TH 3.7.3] et font intervenir la cohomologie

⁵On a utilisé les notations multi-indice standard, par exemple $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$.

du faisceau μ_n sur les fibres de ψ . Ces fibres sont des couronnes de dimension 1 (sur le corps de définition du point considéré), et on a déjà vu le calcul de ces groupes de cohomologie, ce qui permet de conclure.

Pour le cas semi-ouvert, on peut trouver un recouvrement croissant de X par des tores monômiaux fermés X_k . Pour $\varphi_k : X_k \times S \rightarrow S$ la projection sur le second facteur, on a d'après la discussion précédente un système projectif constant de complexe $(R\varphi_{k,*}\mu_n)_k$ et on en déduit le calcul de $R\varphi_*\mu_n$ du cas fermé.

Remarque 5.7. Si X est un tore monomial sur un corps complet $S = \text{Sp}(L)$ et une couronne Y qui le contient, alors, en reprenant le raisonnement par récurrence précédent sur Y , on montre la bijectivité du morphisme naturel de restriction $H_{\text{ét}}^1(Y, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^1(X, \mu_n)$. Par suite exacte de Kummer sur Y (voir [31, th. 3.25] pour l'annulation du groupe de Picard de Y et [25, Lemme 4.4.] pour le calcul des fonctions inversibles),

$$H_{\text{ét}}^1(X, \mu_n) \cong L^*/(L^*)^n \times \prod_{i \leq d} (x_i^{\mathbb{Z}}/x_i^{n\mathbb{Z}}).$$

En particulier, tout revêtement étale de groupe de Galois μ_n de X_L est un revêtement de Kummer de la forme $X((\lambda x^\beta)^{1/n})$ pour β dans \mathbb{Z}^d et λ dans L^* .

5.4. Cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique modéré d'un tore monomial

Le but de ce paragraphe est de calculer la cohomologie de de Rham d'un revêtement cyclique $\mathcal{T} = X((\lambda x^\beta)^{1/n})$ (avec $\beta \in \mathbb{Z}^d$ et $\lambda \in L^*$) d'un tore monomial

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{A}_{rig,L}^d : s_i \leq |x_i| \leq r_i \text{ et } \rho \leq |x^\alpha| \leq \mu\}.$$

Posons

$$\pi_0 = \text{PGCD}(n, \beta_1, \dots, \beta_d), \tilde{n} = \frac{n}{\pi_0}, \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\pi_0}, t_0 = \frac{t^{\tilde{n}}}{x^{\tilde{\beta}}}.$$

Théorème 5.8. *On dispose d'isomorphismes naturels*

$$H_{\text{dR}}^q(X) = \bigoplus_{\substack{I \subset [1,d] \\ |I|=q}} L \cdot d \log(x_I)$$

et

$$H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}) \cong \bigoplus_{i=0}^{\pi_0-1} t_0^i H_{\text{dR}}^q(X).$$

Remarque 5.9. Pour comprendre l'énoncé du théorème, il est intéressant d'étudier le cas analytique complexe. Si l'on prend un espace X de \mathbb{C}^d défini par les mêmes inégalités qu'un tore monomial (i.e.

$$X = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d : s_i \leq |x_i| \leq r_i \text{ et } \rho \leq |x^\alpha| \leq \mu\},$$

alors X a le type d'homotopie d'un tore.

La cohomologie de de Rham est donc donnée par Künneth :

$$H_{\text{dR}}^q(X) = \bigoplus_{|I|=q} \mathbb{C} \cdot d \log(x_I).$$

D'après la correspondance de Galois entre les revêtements et les sous-groupes de $\pi_1(X)$, un revêtement cyclique \mathcal{T} de X a le type d'homotopie d'une union disjointe de tores. Cette union s'écrit :

$$\{(x, t) \in \mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^d \times \mathbb{C} \mid t^n = x^\beta\}.$$

Le nombre de composantes connexes est la constante π_0 introduite dans l'énoncé du théorème. Comme $t_0^{\pi_0} = 1$, la famille $\{t_0^i\}_i$ engendre le même \mathbb{C} -espace vectoriel que l'ensemble des idempotents pour les différentes composantes connexes, et on obtient

$$H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq \pi_0 - 1} t_0^i H_{\text{dR}}^q(X).$$

Avant de passer à la preuve, mentionnons quelques conséquences utiles :

Corollaire 5.10. *On reprend les notations précédentes et on se donne un autre tore monomial X' inclus dans X . Si \mathcal{T}' est la restriction de \mathcal{T} à X' (i.e., $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \times_X X'$), alors la flèche de restriction $H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}')$ est un isomorphisme qui respecte la décomposition en parties isotypiques.*

Démonstration. La base explicite du théorème 5.8 est conservée par la restriction $\Omega_{\mathcal{T}^\dagger/L}^q \rightarrow \Omega_{(\mathcal{T}')^\dagger/L}^q$ d'où la bijectivité. Pour l'assertion sur les parties isotypiques, l'inclusion induit une application μ_n -équivariante entre les complexes de de Rham et le résultat s'en déduit. Pour un argument plus explicite, on a la décomposition en espaces propres $\Omega_{\mathcal{T}^\dagger/L}^q = \bigoplus_{i=0}^{n-1} t^i \Omega_{X^\dagger/L}^q$ et pour i fixé chaque $t_0^i H_{\text{dR}}^q(X)$ est un espace propre de $H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T})$.

Corollaire 5.11. *Les conclusions de 5.8 et 5.10 sont encore vraies quand X est un tore monomial semi-ouvert.*

Démonstration. On écrit $X = \bigcup_i X_i$ comme une réunion croissante de tores monomiaux. On a alors $\mathcal{T} = \bigcup_i \mathcal{T} \times_X X_i = \bigcup_i \mathcal{T}_i$. Fixons $i_0 \in \mathbb{N}$, d'après ce qui précède, on a

$$\varprojlim_i H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}_i)[\chi] = H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}_{i_0})[\chi] \text{ et } R^1 \varprojlim_i H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}_i)[\chi] = 0$$

d'où $H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T})[\chi] \cong H_{\text{dR}}^*(\mathcal{T}_{i_0})[\chi]$.

Passons à la preuve de 5.8. Nous commençons par traiter le cas des tores monomiaux (i.e., $\pi = \text{Id}$ et $\mathcal{T} = X$). Comme dans la définition, on se donne r, s, α, ρ, μ définissant X et on choisit des constantes $u = (u_i)_i, v = (v_i)_i$ et w_1, w_2 dans L telles que

$$|u_i| = r_i, |v_i| = s_i, |w_1| = \rho, |w_2| = \mu.$$

Si $x = (x_i)_i$ désigne la variable sur X , alors

$$X = \text{Sp}(L(\frac{x}{u}, \frac{v}{x}, \frac{x^\alpha}{w_1}, \frac{w_2}{x^\alpha})).$$

En particulier, toute fonction f appartient à $\mathcal{O}(X^\dagger)$ admet un développement unique $f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} a_\nu x^\nu$. Nous aurons besoin du résultat technique suivant :

Lemme 5.12 (Intégration). *Pour $i \leq d$ et $f = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} a_\nu x^\nu \in \mathcal{O}(X^\dagger)$, il existe une section surconvergente de développement $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d, \nu_i \neq 0} \frac{1}{\nu_i} a_\nu x^\nu \in \mathcal{O}(X^\dagger)$.*

Démonstration. Réécrivons f sous la forme

$$\sum_{(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}} m_{\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2} (\frac{x}{u})^\beta (\frac{v}{x})^\gamma (\frac{x^\alpha}{w_1})^{\delta_1} (\frac{w_2}{x^\alpha})^{\delta_2}$$

tel qu'il existe $h > 1$ tel que $h^{e(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)} |m_{\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2}| \rightarrow 0$ avec $e(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2) = \sum_{1 \leq k \leq d} \beta_k + \sum_{1 \leq k \leq d} \gamma_k + \delta_1 + \delta_2$. Nous voulons montrer que le développement suivant définit bien une section surconvergente :

$$\sum_{(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)} \frac{m_{\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2}}{\beta_i - \gamma_i + \alpha_i(\delta_1 - \delta_2)} (\frac{x}{u})^\beta (\frac{v}{x})^\gamma (\frac{x^\alpha}{w_1})^{\delta_1} (\frac{w_2}{x^\alpha})^{\delta_2}$$

où $(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)$ parcourt les termes tels que $\beta_i - \gamma_i + \alpha_i(\delta_1 - \delta_2) \neq 0$.

Pour tout $h_1 \in]1, h[$, on a $(\frac{h_1}{h})^{e(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)} |\frac{1}{\beta_i - \gamma_i + \alpha_i(\delta_1 - \delta_2)}| \rightarrow 0$ pour le filtre des parties finies et donc

$$h_1^{e(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)} |\frac{m_{\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2}}{\beta_i - \gamma_i + \alpha_i(\delta_1 - \delta_2)}| = h^{e(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)} |m_{\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2}| \frac{(h_1/h)^{e(\beta, \gamma, \delta_1, \delta_2)}}{|\beta_i - \gamma_i + \alpha_i(\delta_1 - \delta_2)|} \rightarrow 0$$

et on obtient bien une section surconvergente sur X de développement $\sum_{\nu, \nu_i \neq 0} \frac{1}{\nu_i} a_\nu x^\nu$.

Une q -forme surconvergente admet un unique développement $\omega = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^d, I \subset [1, d]} a_{\nu, I} x^\nu d \log(x_I)$. Nous dirons que ω contient un terme en x_i (resp. un terme en $d \log(x_i)$) s'il existe $a_{\nu, I} \neq 0$ avec $\nu_i \neq 0$ (resp. avec $i \in I$). On appelle $\Omega_{X^\dagger/L}^q[r]$ le sous-module des formes qui ne contiennent aucun terme en x_i ou $d \log(x_i)$ pour $i > r$. On observe l'inclusion $d(\Omega_{X^\dagger/L}^q[r]) \subset \Omega_{X^\dagger/L}^{q+1}[r]$.

On impose l'ordre lexicographique sur les couples (q, r) et on montre par récurrence sur (q, r) l'égalité suivante :⁶

$$(\Omega_{X^\dagger/L}^q[r])^{d=0} = d(\Omega_{X^\dagger/L}^{q-1}[r]) \oplus \bigoplus_{\substack{I \subset [1, r] \\ |I|=q}} L d \log(x_I).$$

Il est aisé de voir que les modules apparaissant dans le terme de droite sont en somme directe et nous laissons la vérification de ce fait au lecteur. Nous allons seulement prouver que ces modules engendrent bien le sous-ensemble des q -formes fermées.

Si $q = 0$, comme X est géométriquement connexe, on a $H_{\text{dR}}^0(X) = L = L \cdot d \log(x_\emptyset)$.

⁶On a posé $\Omega_{X^\dagger/L}^{q-1}[r] = 0$ si $q = 0$.

Soit $q \geq 1$, supposons le résultat vrai pour tout $(q', r') < (q, r)$. Si $\omega \in (\Omega_{X^\dagger/L}^q[r])^{d=0}$, elle se décompose de manière unique de la forme⁷

$$\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_r^j \omega_j^{(0)} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_r^j \omega_j^{(1)} \wedge d \log(x_r)$$

avec $\omega_j^{(i)} \in \Omega_{X^\dagger/L}^{q-i}[r-1]$. Par fermeture de ω ,

$$d\omega = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_r^j d\omega_j^{(0)} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_r^j ((-1)^q j \omega_j^{(0)} + d\omega_j^{(1)}) \wedge d \log(x_r) = 0 \tag{2}$$

d'où $d\omega_j^{(0)} = 0$ et $d\omega_j^{(1)} = (-1)^{q-1} j \omega_j^{(0)}$ toujours par unicité de la décomposition. En particulier, $d\omega_0^{(1)} = d\omega_0^{(0)} = 0$.

D'après 5.12, la somme suivante est une $(q-1)$ -forme surconvergente de X ,

$$\eta = \sum_{j \neq 0} (-1)^{q-1} \frac{1}{j} x_r^j \omega_j^{(1)}.$$

On vérifie par calcul direct, $\omega - d\eta = \omega_0^{(0)} + \omega_0^{(1)} \wedge d \log(x_r)$ (d'après (2)). On a montré que les formes $\omega_0^{(0)}$ et $\omega_0^{(1)}$ étaient fermés. On peut leur appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui permet de conclure.

On s'intéresse maintenant au cas général. Nous cherchons à calculer la cohomologie d'un revêtement sur X de la forme

$$\mathcal{T} = X((\lambda x^\beta)^{1/n}) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{A}_{rig, L}^1 : t^n = \lambda x^\beta\}.$$

Quitte à étendre L , on suppose qu'il contient les racines π_0 -ièmes de l'unité et que λ vaut 1. On a alors une décomposition

$$\mathcal{T} = \coprod_{\zeta \in \mu_{\pi_0}(L)} X((\lambda x^{\tilde{\beta}})^{1/\tilde{n}}) := \coprod_{\zeta \in \mu_{\pi_0}(L)} \mathcal{T}_\zeta.$$

Appelons \mathcal{L}_ζ le polynôme interpolateur de Lagrange s'annulant sur $\mu_{\pi_0}(L) \setminus \{\zeta\}$ et valant 1 en ζ . Prenons $t \in \mathcal{O}^*(\mathcal{T})$ une racine n -ième de x^β et $t_0 = \frac{t^n}{x^\beta}$. Alors $\mathcal{L}_\zeta(t_0)$ est l'idempotent associé à \mathcal{T}_ζ . Supposons que $\mathcal{T}_\zeta \rightarrow X$ induise un isomorphisme $H_{dR}^*(X) \cong H_{dR}^*(\mathcal{T}_\zeta)$, on obtient une suite d'isomorphismes

$$H_{dR}^*(\mathcal{T}) = \bigoplus_{\zeta} \mathcal{L}_\zeta(t_0) H_{dR}^*(\mathcal{T}_\zeta) \cong \sum_{j=0}^{\pi_0-1} t_0^j H_{dR}^*(X)$$

car $\{t_0^j\}_j$ et $\{\mathcal{L}_\zeta(t_0)\}_\zeta$ engendrent le même L -espace vectoriel. Il suffit ainsi de raisonner sur chaque \mathcal{T}_ζ (i.e., on peut supposer $\pi_0 = 1$).

Considérons maintenant le revêtement de groupe de Galois μ_n^d suivant :

$$\tilde{\mathcal{T}} = X(x_1^{1/n}(x_2^{1/n}) \cdots (x_d^{1/n})) = \{(x, t_1, \dots, t_d) \in X \times \mathbb{A}_{rig, L}^d : t_i^n = x_i\}.$$

⁷ si $r = 1$, on pose $\Omega_{X^\dagger/L}^q[r-1] = L$.

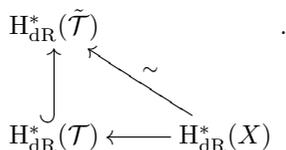
Les flèches $((x_1, \dots, x_d), t_1, \dots, t_d) \mapsto (t_1, \dots, t_d)$ et $(t_1, \dots, t_d) \mapsto ((t_1^n, t_2^n, \dots, t_d^n), t_1, \dots, t_d)$ induisent une bijection

$$\tilde{\mathcal{T}} \cong \{(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{A}_{rig, L}^d : s_i^{1/n} \leq |t_i| \leq r_i^{1/n} \text{ et } \rho^{1/n} \leq |t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_d^{\alpha_d}| \leq \mu^{1/n}\}.$$

On en déduit la suite d'égalités :

$$H_{dR}^i(\tilde{\mathcal{T}}) = \bigoplus_{|I|=i} Ld\log(t_I) = \bigoplus_{|I|=i} Ld\log(x_I) = H_{dR}^i(X).$$

On remarque aisément que $\tilde{\mathcal{T}}$ est un revêtement de \mathcal{T} de groupe de Galois abélien $\text{Fix}_{\mu_n^d}(\mathcal{T}) = \{(\gamma_i)_i \in \mu_n^d : \sum_i \gamma_i \beta_i = 0\}$. La flèche naturelle $H_{dR}^*(\mathcal{T}) \rightarrow H_{dR}^*(\tilde{\mathcal{T}})$ identifie $H_{dR}^*(\mathcal{T})$ à $H_{dR}^*(\tilde{\mathcal{T}})^{\text{Fix}_{\mu_n^d}(\mathcal{T})}$ et est donc injective. On obtient un diagramme commutatif :



Ainsi, $H_{dR}^*(\mathcal{T}) \cong H_{dR}^*(X)$.

5.5. Une première réduction

Revenons maintenant au contexte du théorème 5.1. En particulier, on dispose du schéma formel \mathcal{X} semi-stable généralisé, d'un revêtement cyclique $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ d'ordre premier à p et on note $(Y_i)_{i \in I}$ les composantes irréductibles de sa fibre spéciale. Rappelons que l'on note $Y_J = \bigcap_{j \in J} Y_j$ pour $J \subset I$. Notons que les deux résultats qui vont suivre seront valables dans les deux cas considérés dans 5.1. Nous spécialiserons au cas $\pi = \text{Id}$ ou au cas \mathcal{X} semi-stable (non généralisé) dans la section 5.7.

Lemme 5.13. *Pour démontrer le théorème 5.1 il suffit de prouver la bijectivité de*

$$H_{dR}^*(\pi^{-1}(\bigcup_{J \subset I} Y_J[\mathcal{X}])) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(\pi^{-1}(\bigcup_{J \subset I} Y_J \setminus Y_I[\mathcal{X}]))$$

quand $\mathcal{X} = \text{Spf}(A)$ est affine formel, connexe et possède un morphisme étale

$$\varphi : \text{Spf}(A) \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \dots, x_d \rangle / (x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r} - \varpi)).$$

Démonstration. On considère uniquement l'ensemble (fini) des composantes de I qui intersectent J , ce qui nous permet de supposer que I est fini. Pour $J \subset I$ et $M \subset J^c$, on note

$$\dot{Y}_{J, M} = Y_J \setminus \bigcup_{l \in M} Y_l$$

(i.e., les points dans toutes les composantes irréductibles de J qui évitent celles de M). Si de plus m est un entier positif, on note

$$\mathring{Y}_{J,M}^m = \bigcup_{\substack{N \subset M \\ |N|=m}} \mathring{Y}_{J,N}$$

(i.e., les points dans toutes les composantes de J qui évitent au moins m composantes dans M). On remarque les égalités $Y_J = \mathring{Y}_{J,M}^0$ et $\mathring{Y}_{J,M}^{|M|} = \mathring{Y}_{J,M}$.

On raisonne sur la chaîne d'inclusions

$$Y_J \supset \mathring{Y}_{J,J^c}^1 \supset \dots \supset \mathring{Y}_{J,J^c}$$

il suffit donc de montrer (pour tout m) la bijectivité de la flèche naturelle

$$H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathring{Y}_{J,J^c}^m[\mathcal{X}])) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathring{Y}_{J,J^c}^{m+1}[\mathcal{X}])).$$

Notons que $\mathring{Y}_{J,J^c}^1 = Y_J \setminus Y_I$. Nous allons construire un schéma formel auxiliaire $\tilde{\mathcal{X}}$ de réduction semi-stable généralisée pour déduire le cas m quelconque à partir du cas $m = 0$.

Chaque \mathring{Y}_{J,J^c}^m admet par définition un recouvrement admissible par les ouverts suivants $(\mathring{Y}_{J,N})_{N \subset J^c: |N|=m}$. Les intersections finies de ces ouverts vérifient⁸

$$\bigcap_{N \in Q} \mathring{Y}_{J,N} = \mathring{Y}_{J,M}$$

avec $M = \bigcup_{N \in Q} N$. Lorsque Q varie, M parcourt l'ensemble des parties disjointes de J pour tout M de cardinal au moins m . On se ramène donc, grâce à la suite spectrale de Cech, à montrer l'isomorphisme

$$H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathring{Y}_{J,M} \cap \mathring{Y}_{J,J^c}^m[\mathcal{X}])) = H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathring{Y}_{J,M}[\mathcal{X}])) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathring{Y}_{J,M} \cap \mathring{Y}_{J,J^c}^{m+1}[\mathcal{X}]))$$

pour tout M de cardinal au moins m . Quand M n'est pas de cardinal m , on a $\mathring{Y}_{J,M} = \mathring{Y}_{J,M} \cap \mathring{Y}_{J,J^c}^{m+1}$ et la bijectivité est triviale.

Quand M est de cardinal m , on se place dans la clôture⁹ $\tilde{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}_s \setminus \left(\bigcup_{i \in M} Y_i \right)$ [dans \mathcal{X}].

Les composantes irréductibles de $\tilde{\mathcal{X}}_s$ sont indexées par $I \setminus M$. On reprend les notations $\tilde{Y}_J, \tilde{Y}_{J,N}$ et $\tilde{Y}_{J,N}^m$ pour $J \subset M^c$ et $N \subset (M \cup J)^c$. On observe

$$\mathring{Y}_{J,M} = \tilde{Y}_J \text{ et } \mathring{Y}_{J,M} \cap \mathring{Y}_{J,J^c}^{m+1} = \tilde{Y}_{J,(J \cup M)^c}^1.$$

On s'est ramené à la condition suffisante du lemme par l'observation $\tilde{Y}_J \setminus \tilde{Y}_I = \tilde{Y}_{J,J^c}^1$.

Il reste à expliquer pourquoi on peut supposer \mathcal{X} affine formel. On se donne un recouvrement affine $\mathcal{X} = \bigcup_{s \in S} U_s$ et un jeu de morphismes étales

$$\varphi_s : U_s \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \dots, x_d \rangle / (x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r} - \varpi)).$$

⁸On suppose que tout élément de Q est de cardinal m .

⁹De manière informelle, $\tilde{\mathcal{X}}$ est $\mathcal{X}_s \setminus \left(\bigcup_{i \in M} Y_i \right) \cup \mathcal{X}_s \setminus \left(\bigcup_{i \in M} Y_i \right)$.

On note $U_T = \bigcap_{t \in T} U_t$ pour $T \subset S$. On a un recouvrement admissible $\mathcal{T} = \bigcup_{s \in S} \pi^{-1}(U_{s,\eta})$ donc par une nouvelle application de la suite spectrale de Cech, il suffit de prouver la bijectivité de

$$H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{Y}_J[\mathcal{X} \cap U_{T,\eta}])) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{Y}_J \setminus \mathcal{Y}_I[\mathcal{X} \cap U_{T,\eta}]))$$

pour tout $T \subset S$. On s'est donc ramené à $\mathcal{X} = U_T = \text{Spf}(A)$ affine formel, $\mathcal{T} = \pi^{-1}(U_{T,\eta})$ affinoïde et $\varphi = \varphi_s|_{U_T} : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \dots, x_d \rangle / (x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} - \varpi))$ pour un certain $s \in T$. Quitte à réduire \mathcal{X} , on peut supposer qu'il est connexe.

5.6. Une deuxième réduction

Nous supposons maintenant que nous sommes dans le contexte du lemme 5.13. En particulier, $\mathcal{X} = \text{Spf}(A)$ est affine et connexe et possède un morphisme étale $\varphi : \text{Spf}(A) \rightarrow \text{Spf}(\mathcal{O}_L \langle x_1, \dots, x_d \rangle / (x_1^{\alpha_1} \cdots x_r^{\alpha_r} - \varpi))$. Notons $x_i^* = \varphi^*(x_i) \in A$ et \bar{x}_i son image en fibre spéciale. Quitte à réduire \mathcal{X} , on peut supposer $I = \llbracket 1, r \rrbracket$, $J = \llbracket 1, |J| \rrbracket \subset I$, $Y_i = V(\bar{x}_i)$. Notons aussi que \mathcal{T} est affinoïde, disons $\mathcal{T} = \text{Sp}(B)$.

Lemme 5.14. *Pour montrer 5.13, il suffit de prouver que pour toute partition $\llbracket 1, r \rrbracket = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ et tous $\lambda, \beta \in]0, 1[\cap |\overline{K}^*|$, les restrictions de \mathcal{T} à \tilde{C} et à \tilde{C}' ont la même cohomologie de de Rham, où*

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \{s \in \mathcal{X}_\eta : |x_{j_1}^*(s)| \leq \lambda, |x_{j_2}^*(s)| = \beta, |x_{j_3}^*(s)| \leq \beta, \forall j_k \in J_k\}, \\ \tilde{C}' &= \{s \in \mathcal{X}_\eta : |x_{j_1}^*(s)| \leq \lambda, |x_{j_2}^*(s)| = \beta, |x_{j_3}^*(s)| = \beta, \forall j_k \in J_k\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Rappelons que :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_J[\mathcal{X}] &= \{s \in \mathcal{X}_\eta \mid \forall j \in J, |x_j^*(s)| < 1\}, \\ \mathcal{Y}_J \setminus \mathcal{Y}_I[\mathcal{X}] &= \{s \in \mathcal{Y}_J[\mathcal{X}] \mid \exists i \in J^c, |x_i^*(s)| = 1\}. \end{aligned}$$

Nous allons filtrer ces espaces par des ouverts plus simples. Pour $\lambda \in]0, 1[\cap |\overline{K}^*|$ posons¹⁰

$$\mathcal{X}_\eta\left(\frac{J}{\lambda}\right) = \{s \in \mathcal{X}_\eta \mid \forall j \in J, |x_j^*(s)| \leq \lambda\}.$$

On définit $\mathcal{Y}_J \setminus \mathcal{Y}_I[\mathcal{X}(\frac{J}{\lambda})]$ d'une manière semblable et on remarque que $\pi^{-1}(\mathcal{Y}_J[\mathcal{X}]) = \bigcup_{\lambda < 1} \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}))$ est un recouvrement admissible (et la situation est similaire pour $\pi^{-1}(\mathcal{Y}_J \setminus \mathcal{Y}_I[\mathcal{X}])$). Il suffit donc de montrer la bijectivité de

$$H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta\left(\frac{J}{\lambda}\right))) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{Y}_J \setminus \mathcal{Y}_I[\mathcal{X}(\frac{J}{\lambda})]))$$

pour tout λ comme ci-dessus.

Ensuite, intéressons-nous à l'espace

$$\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta\left(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}\right) = \{s \in \mathcal{X}_\eta\left(\frac{J}{\lambda}\right) \mid \exists i \in J^c, |x_i^*(s)| \geq \beta\}$$

¹⁰Pour tout $M \subset I$ nous confondrons M et $\{x_i^* : j \in M\}$.

pour $\beta \in]0, 1[\cap |\overline{K}^*$. On remarque la suite d'inclusion

$$\pi^{-1}(]Y_J \setminus Y_I[_X(\frac{J}{\lambda})) \subset \pi^{-1}(\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}})) \subset \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda})).$$

Étudions d'abord la flèche en cohomologie induite par la première inclusion. On a un recouvrement admissible $(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}})))_{i \in J^c}$ de $\pi^{-1}(\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}))$ et les intersections

sont de la forme $\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{M}))$ pour $M \subset J^c$.

De plus, on a l'identité

$$\pi^{-1}(]Y_J \setminus Y_I[_X(\frac{J}{\lambda}))^\dagger = \bigcap_{\beta < 1} \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{M}))^\dagger$$

car chaque voisinage stricte de $\pi^{-1}(]Y_J \setminus Y_I[_X(\frac{J}{\lambda}))$ contient un ouvert de la forme $\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{M}))$ pour un certain β . En comparant les complexes de de Rham surconvergeant, on obtient la bijectivité de

$$\lim_{\beta < 1} H_{dR}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{M}))) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(\pi^{-1}(]Y_J \setminus Y_I[_X(\frac{J}{\lambda})))$$

puis celle de

$$\lim_{\beta < 1} H_{dR}^*(\pi^{-1}(\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}))) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(\pi^{-1}(]Y_J \setminus Y_I[_X(\frac{J}{\lambda})))$$

grâce à la suite spectrale de Cech.

Il suffit donc d'établir l'isomorphisme suivant pour tout β

$$H_{dR}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}))) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(\pi^{-1}(\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}))) \tag{3}$$

en montrant que cela découle de la condition imposée dans l'énoncé.

On a un recouvrement admissible à deux termes

$$\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda})) = \pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{J^c}{\beta})) \cup \pi^{-1}(\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}})).$$

En utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris qui en découle, il suffit d'établir¹¹

$$H_{dR}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{J^c}{\beta}))) \xrightarrow{\sim} H_{dR}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{J^c}{\beta}) \cap \bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}))).$$

¹¹ Soit un recouvrement admissible $X = U \cup V$ et supposons la flèche $H^i(U) \xrightarrow{\sim} H^i(U \cap V)$ bijective pour tout i . Par Mayer-Vietoris, on a une suite exacte $0 \rightarrow H^i(X) \rightarrow H^i(U) \oplus H^i(V) \rightarrow H^i(U \cap V) \rightarrow 0$. Dit autrement, une classe sur l'union X est équivalente à une classe sur chaque ouvert U, V qui coïncident sur l'intersection. Pour toute classe dans V , sa restriction à $U \cap V$ se relève de manière unique à U . En particulier, la classe de départ sur V se relève de manière unique en une classe sur X . Cela établit l'isomorphisme voulue $H^i(X) \xrightarrow{\sim} H^i(V)$.

On réécrit

$$\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{J^c}{\beta}) \cap \bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}})) = \pi^{-1}(\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}, \frac{J^c}{\beta})).$$

Pour établir l'isomorphisme ci-dessus, comparons les deux espaces considérés avec $\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, (\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1}))$ ie. prouvons la bijectivité des deux flèches

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{J^c}{\beta}))) &\xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, (\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1}))), \\ H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\bigcup_{i \in J^c} \mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}, \frac{J^c}{\beta}))) &\xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, (\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1}))). \end{aligned}$$

Pour la première, cela revient à comparer les deux couronnes de l'énoncé du lemme 5.14 pour la partition $I = J \cup \emptyset \cup J^c$. D'après la suite spectrale de Čech pour le recouvrement $(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{\beta}{\{i\}}, \frac{J^c}{\beta}))_{i \in J^c}$, on se ramène pour la deuxième à

$$H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, \frac{I \setminus (J \cup M)}{\beta}, (\frac{M}{\beta})^{\pm 1}))) \xrightarrow{\sim} H_{\text{dR}}^*(\pi^{-1}(\mathcal{X}_\eta(\frac{J}{\lambda}, (\frac{J^c}{\beta})^{\pm 1})))$$

pour tout $M \subset J^c$. Là encore, cela revient à établir la condition suffisante du lemme pour la partition $I = J \cup M \cup (I \setminus (J \cup M))$

5.7. Fin de la preuve du théorème 5.1

Fixons une partition $\llbracket 1, r \rrbracket = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ et reprenons les notations introduites dans le lemme 5.14. Dans toute la suite, nous appellerons par abus \mathcal{T} le revêtement sur \tilde{C} et \mathcal{T}' celui sur \tilde{C}' . Nous devons comparer les cohomologies de de Rham de \mathcal{T} et de \mathcal{T}' . Pour cela, on considère les inclusions $\tilde{C}' \rightarrow \tilde{C} \rightarrow]Y_I[_{\mathcal{X}} = \{s \in \mathcal{X}_\eta, \forall i \in I, |x_i^*(s)| < 1\}$. Nous allons commencer par une description plus simple de $]Y_I[_{\mathcal{X}}$, fournie par :

Lemme 5.15. *Il existe une \mathcal{O}_L -algèbre ϖ -adiquement complète et formellement lisse \hat{B} et un isomorphisme*

$$]Y_I[_{\mathcal{X}} \cong \text{Sp}(\hat{B} \otimes_{\mathcal{O}_L} L) \times \{Z = (Z_1, \dots, Z_r) \in \mathbb{B}_L^r : Z^\alpha = \varpi\}$$

envoyant Z_i sur x_i^* .

Démonstration. Le morphisme étale $\mathcal{O}_L \langle X_1, \dots, X_d \rangle / (X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} - \varpi) \rightarrow A$ induit, en complétant (X_1, \dots, X_r) -adiquement, un morphisme étale

$$R := \mathcal{O}_L \llbracket X_1, \dots, X_r \rrbracket \langle X_{r+1}, \dots, X_d \rangle / (X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} - \varpi) \rightarrow \hat{A}.$$

D'après [2, (0.2.7)PROPOSITION], $]Y_I[_{\mathcal{X}} = \text{Spf}(\hat{A})^{\text{rig}}$. Considérons le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccc}
 \hat{A} & \longrightarrow & \hat{A}/\varpi & \longrightarrow & \overline{B} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 R & \longrightarrow & R/\varpi & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{F}[X_{r+1}, \dots, X_d]
 \end{array}$$

dans lequel θ est la projection modulo $J = (X_1, \dots, X_r)$ et

$$\overline{B} := \hat{A}/\varpi \otimes_{R/\varpi} \mathbb{F}[X_{r+1}, \dots, X_d] = \hat{A}/(\varpi\hat{A} + J\hat{A}).$$

Observons que l'inclusion canonique $\iota : \mathbb{F}[X_{r+1}, \dots, X_d] \hookrightarrow R/\varpi$ est une section de θ . Comme $R \rightarrow \hat{A}$ est étale, la section ι se relève en une section $s : \overline{B} \rightarrow \hat{A}/\varpi$. En effet, \overline{B} est lisse sur \mathbb{F} car étale sur $\mathbb{F}[X_{r+1}, \dots, X_d]$ par changement de base de $R/\varpi \rightarrow \hat{A}/\varpi$. Ainsi, le morphisme naturel $\overline{B} \xrightarrow{\sim} \hat{A}/(\varpi\hat{A} + J\hat{A})$ se relève en un morphisme $\overline{B} \rightarrow \hat{A}/\varpi$ car \hat{A}/ϖ est complet pour la topologie J -adique. Pour vérifier que l'on obtient bien la section recherchée, il suffit de montrer que ce morphisme est compatible à ι en le réduisant modulo J ce qui est vrai par construction.

Par le théorème d'Elkik [16, THÉORÈME fin section II p568], on peut relever \overline{B} en une \mathcal{O}_K -algèbre lisse B . Ainsi, en reprenant les arguments de la construction de s , on voit que $B \rightarrow \hat{A}/\varpi$ se relève en un morphisme $B \rightarrow \hat{A}$ puis en $\hat{B} \rightarrow \hat{A}$, où \hat{B} est la complétion ϖ -adique de B . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{A} & \longleftarrow & \hat{B} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \hat{A}/\varpi & \longleftarrow & \overline{B}
 \end{array}$$

fournit un morphisme $\beta : \hat{B}[[Z_1, \dots, Z_r]] / (Z_1^{\alpha_1} \dots Z_r^{\alpha_r} - \varpi) \rightarrow \hat{A}$ envoyant Z_i sur x_i^* . Par Nakayama topologique, β est un isomorphisme car il l'est modulo $(Z_1, \dots, Z_r, \varpi)$ par construction. On conclut en passant à la fibre générique.

Notons $S = \text{Sp}(\hat{B} \otimes_{\mathcal{O}_L} L)$ et $X = \{Z = (Z_1, \dots, Z_r) \in \mathbb{B}_L^r : Z^\alpha = \varpi\}$. Le lemme ci-dessus fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{C}' & \longrightarrow & \tilde{C} & \longrightarrow & Y_I[\mathcal{X}] \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 S \times C' & \longrightarrow & S \times C & \longrightarrow & S \times X
 \end{array}$$

où C et C' sont les espaces par

$$\begin{aligned}
 C &= \{s \in X \mid |Z_{j_1}(s)| \leq \lambda, |Z_{j_2}(s)| = \beta, |Z_{j_3}(s)| \leq \beta, \forall j_k \in J_k\}, \\
 C' &= \{s \in X \mid |Z_{j_1}(s)| \leq \lambda, |Z_{j_2}(s)| = \beta, |Z_{j_3}(s)| = \beta, \forall j_k \in J_k\}.
 \end{aligned}$$

On se place maintenant dans le cas où \mathcal{X} est semi-stable ie. $\forall i \in I, \alpha_i = 1$. Alors, en exprimant Z_1 en fonction des variables Z_2, \dots, Z_r , nous pourrons voir les espaces C, C' comme des tores monomiaux géométriquement connexes. Comme on peut raisonner sur

chaque composante de S , on suppose de même S connexe. Enfin, quitte à étendre les scalaires, on suppose le corps de base L complet algébriquement clos.

Lemme 5.16. *Les toorseurs $[\mathcal{T}]$ et $[\mathcal{T}']$ admettent des décompositions en sommes $[\mathcal{T}_1 \times C] + [S \times \mathcal{T}_2]$ et $[\mathcal{T}'_1 \times C'] + [S \times \mathcal{T}'_2]$ où $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}'_1$ (resp. $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}'_2$) est un μ_n -torseur sur S (resp. C, C').*

Démonstration. On raisonne sur C , l'argument sera le même pour C' . Introduisons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 S \times C & \xrightarrow{pr_2} & C \\
 pr_1 \downarrow & \searrow \varphi & \downarrow \varphi \\
 S & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{Sp} L.
 \end{array}$$

On se donne $c_0 \in C$ un point géométrique et on note $\iota : c_0 \times S \rightarrow C \times S$. D'après la suite spectrale de Leray, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow R^1 \varphi_* \mu_{n,S}^{\pi_0(C)} \xrightarrow{R^1 pr_1^*} R^1 \varphi_* \mu_{n,S \times C} \rightarrow \varphi_* R^1 pr_{1,*} \mu_{n,S \times C} \rightarrow R^2 \varphi_* \mu_{n,S}^{\pi_0(C)} \xrightarrow{R^2 pr_1^*} R^2 \varphi_* \mu_{n,S \times C}.$$

Les morphismes induits $R^1 \iota^*$ et $R^2 \iota^*$ fournissent des inverses à droite de $R^1 pr_1^*$ et $R^2 pr_1^*$, d'où une suite exacte de faisceaux scindée :

$$0 \rightarrow (R^1 \varphi_* \mu_{n,S})^{\pi_0(C)} \xrightarrow{R^1 pr_1^*} R^1 \varphi_* \mu_{n,S \times C} \rightarrow \varphi_* R^1 pr_{1,*} \mu_{n,S \times C} \rightarrow 0$$

et une identification $\varphi_* R^1 pr_{1,*} \mu_{n,S \times C} \cong \ker(R^1 \iota^*)$.

Les flèches naturelles compatibles $H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(U \times C, \mu_n)$ induisent un morphisme entre le préfaisceau constant $H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n)|_S$ et le préfaisceau $U \mapsto H_{\text{ét}}^1(U \times C, \mu_n)$. En passant au faisceau associé, on obtient un morphisme naturel $\delta : H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n)|_S \rightarrow R^1 pr_{1,*} \mu_{n,S \times C}$. Le faisceau $pr_{1,*} \mu_{n,S \times C}$ est surconvergent en tant qu'image directe d'un faisceau constant (à quelques twists à la Tate près), on a d'après [9, Th. 3.7.3] $(R^1 pr_{1,*} \mu_{n,S \times C})_s \cong H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n)$ pour tout point $s \in S$ et δ est un isomorphisme.

Comme S et C sont connexes, on a, en prenant les sections globales, une suite exacte scindée

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^1(S, \mu_n) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(S \times C, \mu_n) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n) \rightarrow 0$$

avec $H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \ker(\iota^*)$. Mais, on a un morphisme injectif $H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(S \times C, \mu_n)$ induit par pr_2^* . Il reste à prouver que $\ker(\iota^*) = \mathrm{im}(pr_2^*)$. Le morphisme pr_2^* envoie un revêtement \mathcal{T} sur $S \times \mathcal{T}$ et ι^* envoie \mathcal{T}' sur $S \times C$ vers sa restriction à $S \times c_0 \cong S$. Il est aisé de voir que $\iota^* \circ pr_2^* = 0$ (i.e., $\mathrm{im}(pr_2^*) \subset \ker(\iota^*)$). Mais ces deux groupes ont tous deux pour ordre $|H_{\text{ét}}^1(C, \mu_n)| < \infty$ (cf 5.6 et 5.7), ils sont donc confondus. On a donc la décomposition

$$H_{\text{ét}}^1(S \times C, \mu_n) = \mathrm{im}(pr_1^*) \oplus \mathrm{im}(pr_2^*).$$

L'énoncé est une traduction en termes de toorseurs de cette égalité.

L'espace $\mathcal{T}_1 \times_L \mathcal{T}_2$ est un revêtement de \mathcal{T} de groupe de Galois $H = \{(g, g^{-1}) : g \in \mu_n\}$ et un revêtement de $S \times C$ de groupe de Galois μ_n^2 . On obtient l'égalité par Künneth :

$$\begin{aligned} H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}) &= H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}_1 \times_L \mathcal{T}_2)^H = \left(\bigoplus_{\chi_1, \chi_2 \in \mu_n^\vee} H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)[\chi_1, \chi_2] \right)^H \\ &= \bigoplus_{q_1+q_2=q} \bigoplus_{\chi \in \mu_n^\vee} H_{\text{dR}}^{q_1}(\mathcal{T}_1)[\chi] \otimes H_{\text{dR}}^{q_2}(\mathcal{T}_2)[\chi]. \end{aligned}$$

De même pour $\mathcal{T}_1 \times_L \mathcal{T}'_2$ par rapport à \mathcal{T}' et $S \times C'$, on a

$$H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}') = \bigoplus_{q_1+q_2=q} \bigoplus_{\chi \in \mu_n^\vee} H_{\text{dR}}^{q_1}(\mathcal{T}_1)[\chi] \otimes H_{\text{dR}}^{q_2}(\mathcal{T}'_2)[\chi].$$

On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}) & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{q_1+q_2=q} \bigoplus_{\chi \in \mu_n^\vee} H_{\text{dR}}^{q_1}(\mathcal{T}_1)[\chi] \otimes H_{\text{dR}}^{q_2}(\mathcal{T}_2)[\chi] \\ \downarrow & & \downarrow \oplus_{q_1, q_2, \chi} (\text{Id} \otimes \iota^*) \\ H_{\text{dR}}^q(\mathcal{T}') & \xlongequal{\quad} & \bigoplus_{q_1+q_2=q} \bigoplus_{\chi \in \mu_n^\vee} H_{\text{dR}}^{q_1}(\mathcal{T}_1)[\chi] \otimes H_{\text{dR}}^{q_2}(\mathcal{T}'_2)[\chi] \end{array}$$

Mais d'après 5.10, la flèche ι^* est un isomorphisme et les deux flèches verticales sont des bijections. On peut alors appliquer 5.14 pour prouver le théorème 5.1.

Supposons maintenant \mathcal{X} semi-stable généralisé et $\pi = \text{Id}$. On considère le tore monomial

$$Y = \{ \tilde{Z} = (T, Z_1, \dots, Z_d) : T \prod_{i=0}^d Z_i^{\alpha_i} = \varpi \text{ et } |T| \leq \lambda^{1/\alpha_0}, |Z_{j_1}(s)| \leq \lambda, |Z_{j_2}(s)| = \beta, |Z_{j_3}(s)| \leq \beta \forall j_k \in J_k \}$$

et on peut écrire $C = Y(T^{1/\alpha_0})$. En raisonnant de même sur C' , on observe l'isomorphisme $H_{\text{dR}}^*(C) \cong H_{\text{dR}}^*(C')$ d'après 5.10 et on en déduit $H_{\text{dR}}^*(S \times C) \cong H_{\text{dR}}^*(S \times C')$ par Künneth.

6. Cohomologie de de Rham du premier revêtement de la tour de Drinfeld

Le but de ce chapitre est de calculer la 'partie cuspidale' de la cohomologie de de Rham de Σ^1 . Cela utilise tous les résultats obtenus jusqu'à présent. Dans tout ce chapitre nous noterons

$$N = q^{d+1} - 1, \check{K}_N = \check{K}(\varpi^{\frac{1}{N}}).$$

Théorème 6.1. *Soit $\theta : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow \check{K}_N^*$ un caractère primitif. Il existe un isomorphisme n*

$$H_{\text{dR},c}^d(\Sigma_{\check{K}_N}^1)[\theta] \simeq \bigoplus_{s \in \mathcal{BT}_0} H_{\text{rig},c}^d(\text{DL}_{\mathbb{F}}^d / \check{K}_N)[\theta]$$

et $H_{\text{dR},c}^r(\Sigma_{\check{K}_N}^1)[\theta] = 0$ pour $r \neq d$.

Pour démontrer le théorème, on étudie la suite spectrale de Čech associée au recouvrement par les tubes (dans Σ^1) au-dessus des composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_K}^d$ (i.e., au recouvrement par la famille d'ouverts $(\Sigma_{\text{Ost}(s)}^1)_{s \in \mathcal{BT}_0}$) :

$$E_1^{-r,s} = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{BT}_r} H_{\text{dR},c}^s(\Sigma_{\text{Ost}(\sigma)}^1) \Rightarrow H_{\text{dR},c}^{-r}(\Sigma^1).$$

Par dualité de Poincaré 2.2, on se ramène à étudier $H_{\text{dR}}^r(\Sigma_{\text{Ost}(\sigma)}^1)$. Nous montrerons (cf. paragraphe 6.1) que, pour $s \in \mathcal{BT}_0$, on a un isomorphisme n

$$H_{\text{dR},c}^r(\Sigma_{\check{K}_N, \text{Ost}(s)}^1)[\theta] = \begin{cases} H_{\text{rig},c}^d(\text{DL}_{\mathbb{F}}^d/\check{K}_N)[\theta] & \text{si } r = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et (cf. paragraphe 6.2) que $H_{\text{dR},c}^r(\Sigma_{\text{Ost}(\sigma)}^1)[\theta] = 0$ pour $\dim(\sigma) \geq 1$. Ces deux résultats, dont la preuve utilise de manière cruciale le théorème 5.1, montrent la dégénérescence de la suite spectrale et permettent de conclure la preuve du théorème 6.1.

6.1. Le tube au-dessus d'une composante irréductible

Le but de ce paragraphe est de calculer la cohomologie de de Rham du tube au-dessus d'une composante irréductible (i.e., $H_{\text{dR}}^r(\Sigma_{\text{Ost}(s)}^1)$), plus précisément de démontrer le résultat suivant) :

Proposition 6.2. *Si $s \in \mathcal{BT}_0$ est un sommet, il existe un isomorphisme n*

$$H_{\text{dR},c}^r(\Sigma_{\check{K}_N, \text{Ost}(s)}^1)[\theta] = \begin{cases} H_{\text{rig},c}^d(\text{DL}_{\mathbb{F}}^d/\check{K}_N)[\theta] & \text{si } r = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'après le théorème 5.1 et la discussion dans le paragraphe précédent on a un isomorphisme naturel (induit par la restriction)

$$H_{\text{dR}}^r(\Sigma_{\text{Ost}(s)}^1) \simeq H_{\text{dR}}^r(\Sigma_s^1).$$

Pour étudier $H_{\text{dR}}^r(\Sigma_s^1)$, nous devons rendre explicite le lien entre Σ_s^1 et la variété de Deligne-Lusztig $\text{DL}_{\mathbb{F}}^d$. Ce lien est établi dans [32, 2.3.8], mais nous allons donner l'argument pour le confort du lecteur.

Lemme 6.3. *La restriction $\Sigma_{\check{K}_N, s}^1$ du premier revêtement au-dessus d'un sommet admet un modèle entier lisse $\widehat{\Sigma}_s^1$ dont la fibre spéciale $\overline{\Sigma}_s^1$ est isomorphe à la variété de Deligne-Lusztig $\text{DL}_{\mathbb{F}}^d$.*

De plus, l'isomorphisme ci-dessus est $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K) \times \mathbb{F}_{q^{d+1}}^$ -équivariant.*

Grâce au lemme précédent et à 2.3 on obtient des isomorphismes $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K) \times \mathcal{O}_D^*/(1 + \Pi_D \mathcal{O}_D)$ -équivariants

$$H_{\text{dR}}^r(\Sigma_{\check{K}_N, s}^1) \cong H_{\text{rig}}^r(\overline{\Sigma}_s^1/\check{K}_N) \cong H_{\text{rig}}^r(\text{DL}_{\mathbb{F}}^d/\check{K}_N),$$

ce qui termine la preuve de la proposition 6.2.

Démonstration. On peut supposer que s est le sommet standard. L'énoncé du théorème 3.5 introduit une fonction inversible u_1 sur $\mathbb{H}_{\bar{K}_N, s}^d$ voire même sur $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\bar{K}_N}, s}^d$ telle que $\Sigma_{\bar{K}_N, s}^1 = \mathbb{H}_{\bar{K}_N, s}^d(u_1^{\frac{1}{N}})$. La normalisation de $\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}, s}^d$ dans $\Sigma_{\bar{K}_N, s}^1$ fournit un modèle entier $\widehat{\Sigma}_s^1 = \mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\bar{K}_N}, s}^d(u_1^{\frac{1}{N}})$ de fibre spéciale

$$\overline{\Sigma}_s^1 = \mathbb{H}_{\mathbb{F}, s}^d(u_1^{\frac{1}{N}}).$$

D'après 4.1, le revêtement de type Kummer $\mathbb{H}_{\mathbb{F}, s}^d(u_1^{\frac{1}{N}})$ admet un isomorphisme $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$ -équivariant vers $DL_{\mathbb{F}}^d$. Le reste de la preuve consiste à montrer qu'il est de plus $G^\circ := GL_{d+1}(\mathcal{O}_K)$ -équivariant.

Rappelons que toutes les actions possibles de G° sur $\overline{\Sigma}_s^1$ ou sur Σ_s^1 commutant avec le revêtement se déduisent l'une de l'autre en tordant par un caractère

$$\chi \in \text{Hom}(G^\circ, \mu_N(\overline{\mathbb{F}})) \cong \mathbb{F}^*,$$

d'après [26, Remarque 4.12]. Plus précisément, pour T une racine N -ième de u_1 dans $\mathcal{O}(\overline{\Sigma}_s^1) = \mathcal{O}(DL_{\mathbb{F}}^d)$ ou dans $\mathcal{O}(\Sigma_s^1)$, le caractère χ associé à deux actions de G° notées $g \mapsto [g]_1$ et $g \mapsto [g]_2$ est donné par $\chi(g) = [g]_1 \cdot T/[g]_2 \cdot T$. On en déduit aussi que l'on a une bijection entre les actions de G° sur $\overline{\Sigma}_s^1$ et celles sur Σ_s^1 qui préserve les caractères χ .

Nous étudions maintenant le cas où $g \mapsto [g]_1$ (resp. $g \mapsto [g]_2$) est l'action provenant de Σ^1 (resp. de $DL_{\mathbb{F}}^d$). Il s'agit de prouver que le caractère obtenu est trivial. On voit aisément que ce dernier se factorise via la flèche $G^\circ \xrightarrow{\det} \mathcal{O}_K^* \rightarrow \mathbb{F}^*$ car $1 + \varpi \mathcal{O}_K$ est N -divisible. Comme \mathbb{F}^* est cyclique, il suffit de raisonner sur une matrice $g \in G^\circ$ telle que $\det g$ engendre \mathbb{F}^* et sur la fibre d'un point $y \in \mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}^d(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ fixé par g .

Expliquons comment choisir cette matrice. Observons que la norme $N : \mathbb{F}_{q^{d+1}}^* \rightarrow \mathbb{F}^*$ est surjective¹². On se donne $\lambda \in \mathbb{F}_{q^{d+1}}$ un élément dont la norme engendre \mathbb{F}^* si bien que $\mathbb{F}_{q^{d+1}} = \mathbb{F}[\lambda]$ et le polynôme minimal sur \mathbb{F} de λ est de degré $d + 1$. De plus, n'importe quel relevé unitaire P sur \mathcal{O}_K est encore irréductible de degré $d + 1$. Donnons-nous une matrice $g \in M_{d+1}(\mathcal{O}_K)$ de polynôme caractéristique P (par exemple la matrice compagnon associée). Ainsi, g est dans G° , régulière elliptique et son déterminant engendre \mathbb{F}^* .

L'élément g admet $d + 1$ points fixes distincts dans $\mathbb{P}^d(\mathcal{O}_C)$ qui correspondent aux droites propres de g dans C^{d+1} . Montrons qu'elles sont toutes dans $\mathbb{H}_{\bar{K}, s}^d(C)$. Pour cela, pour tout vecteur propre $v \in C^{d+1}$ que l'on suppose unimodulaire à normalisation près, nous devons prouver que les coordonnées de v modulo ϖ sont libres sur \mathbb{F} . Supposons que ce ne soit pas le cas et prenons $a \in \mathbb{F}^{d+1} \setminus \{0\}$ tel que $\langle a, v \rangle = 0$. Ainsi

$$\langle (g)^t a, v \rangle = \langle a, gv \rangle = \lambda \langle a, v \rangle = 0$$

et $v^\perp \cap \mathbb{F}^{d+1}$ est stable sous l'action de g^t . Comme le polynôme caractéristique P de g^t est irréductible sur¹³ \mathbb{F} , $v^\perp \cap \mathbb{F}^{d+1} = \mathbb{F}^{d+1}$ ie. $v = 0$, d'où une contradiction.

¹²Il s'agit de la flèche $x \mapsto x^{\bar{N}}$.

¹³Les sous-espaces stables sont en bijection avec les facteurs de P .

Prenons $y \in \mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K},s}}^d(\mathcal{O}_C)$ le point fixe de g correspondant à la valeur propre λ et $\bar{y} \in \mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d(\bar{\mathbb{F}})$ sa spécialisation. D'après 4.1, un point $x \in \text{DL}_{\mathbb{F}}^d(\bar{\mathbb{F}})$ correspond à un vecteur $x = (x_0, \dots, x_d)$ dans $\bar{\mathbb{F}}^{d+1}$ tel que $\tilde{u}_1(x) = 1$. De plus, x est dans la fibre $\pi^{-1}(\bar{y})$, si x engendre la droite \bar{y} . Dans ce cas, $[g]_2 \cdot x = \lambda x$. Mais d'après la description de l'isomorphisme $\text{DL}_{\mathbb{F}}^d(\bar{\mathbb{F}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d(u_1^{\frac{1}{N}})$ donnée dans 4.2, on a $T = \frac{1}{x_0}$ et donc $[g]_2 \cdot T = \lambda^{-1}T$ sur $\pi^{-1}(\bar{y})$.

Decrivons maintenant l'action provenant du premier revêtement Σ^1 . D'après¹⁴ [26, Corollaire 3.10], la restriction $\mathfrak{X}[\Pi_D]_s$ des points de torsion du module universel $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ au dessus du sommet s est affine de sections

$$\mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_s) = \mathcal{O}(\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K},s}}^d)[\tilde{T}]/(\tilde{T}^{N+1} - \varpi u_1 \tilde{T}).$$

Rappelons que $\mathcal{O}(\Sigma_s^1) = \mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_s)[1/\tilde{T}, 1/\varpi]$ et $\tilde{T} = \varpi_N T$ dans $\mathcal{O}(\Sigma_s^1) \otimes \check{K}_N$. Ainsi, calculer $[g]_1 \cdot \tilde{T}$ dans $\mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_s)$ revient à déterminer $[g]_1 \cdot T$ dans $\mathcal{O}(\Sigma_s^1)$ ou dans $\mathcal{O}(\check{\Sigma}_s^1)$. Plaçons-nous donc sur $\mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_s)$ et plus précisément sur l'idéal d'augmentation $\mathcal{I} = \bigoplus_{i=1}^N \tilde{T}^i \mathcal{O}(\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K},s}}^d)$ de $\mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_s)$. La description précédente de l'idéal d'augmentation est en fait la décomposition en partie isotypique pour l'action de $\mathcal{O}_{(d+1)}^*(\subset \mathcal{O}_D^*)$. Le cotangent de $\mathfrak{X}[\Pi_D]_s$ s'écrit :

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \tilde{T} \mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_s) / \tilde{T}^2 \mathcal{O}(\mathfrak{X}[\Pi_D]_s) \cong \tilde{T} \cdot \mathcal{O}(\mathbb{H}_{\mathcal{O}_{\tilde{K},s}}^d) / \varpi.$$

Mais, on a aussi

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = (\text{Lie } \mathfrak{X}[\Pi_D]_s)^\vee = \ker(\Pi : \text{Lie } \mathfrak{X}_s \rightarrow \text{Lie } \mathfrak{X}_s)^\vee = (\text{Lie } \mathfrak{X}_s)^\vee / \Pi_{D,*}(\text{Lie } \mathfrak{X}_s)^\vee,$$

il suffit donc de montrer que de comprendre l'action de la matrice g fixée sur la partie isotypique $(\text{Lie } \mathfrak{X}_s)_d|_{\bar{y}}$ correspondante.

Utilisons la théorie de Cartier pour décrire le plan tangent. D'après 3.3, un point fermé $z \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^d(\bar{\mathbb{F}})$ correspond à un couple¹⁵ (X, ρ) où X est un \mathcal{O}_D -module formel spécial sur $\bar{\mathbb{F}}$ et ρ une quasi-isogénie $\Phi \rightarrow X$ de hauteur 0. Aux modules X et Φ correspondent des modules de Cartier M_X et M_Φ sur¹⁶ $\mathcal{O}_{\tilde{K}}\langle F, V \rangle$ (ainsi qu'un opérateur Π qui commute à F, V) qui sont libres de rang 4 sur $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$ et la quasi-isogénie ρ induit un isomorphisme $M_X[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} M_\Phi[\frac{1}{p}]$. Nous allons chercher à déterminer dans la suite les couples (M_X, ρ) qui correspondent aux points de $\mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d(\bar{\mathbb{F}}) \subset \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^d(\bar{\mathbb{F}})$. Pour cela, nous aurons besoin de quelques résultats classiques sur les modules de Cartier spéciaux.

L'action de $\mathcal{O}_{(d+1)}$ sur M_X et M_Φ induit des $\mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$ -graduations $M_X = \sum_{i \in \mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}} M_{X,i}$ (de même pour M_Φ) suivant les plongements de $\mathcal{O}_{(d+1)}$ dans $\mathcal{O}_{\tilde{K}}$. Les opérateurs V, Π sont de degré 1 et F est de degré -1 . On a le résultat classique suivant :

¹⁴Énoncé que l'on peut déjà trouver dans la preuve de [32, (2.3.7)]

¹⁵Le problème modulaire fait aussi intervenir une rigidification ψ que nous ne mentionnerons pas.

¹⁶Cf. [4, II.1.2 et II.1.3] la description de cette algèbre non-commutative.

Lemme 6.4. Soit $X/\overline{\mathbb{F}}$ un \mathcal{O}_D -module formel spécial de dimension $(d+1)$ et de hauteur $(d+1)^2$ et M_X le module de Cartier associé. On a les points suivants :

1. On a une identification $\text{Lie } X \cong M_X/VM_X$ et les parties isotypiques sont de la forme $(\text{Lie } X)_i = M_{X,i}/VM_{X,i-1}$.
2. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$, on a $[M_{X,i}, VM_{X,i-1}] = [M_{X,i}, \Pi M_{X,i-1}] = 1$ et $[M_{X,i}, FM_{X,i+1}] = d$.
3. Soit $i \in \mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$, les points suivants sont équivalents :
 - (a) $\Pi : (\text{Lie } X)_i \rightarrow (\text{Lie } X)_{i+1}$ est nulle,
 - (b) $\Pi M_{X,i} \subset VM_{X,i}$,
 - (c) $\Pi M_{X,i} = VM_{X,i}$,
 - (d) $M_{X,i+1} \neq \Pi M_{X,i} + VM_{X,i}$,
 - (e) $M_{X,i} = M_{X,i}^{V^{-1}\Pi} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\check{K}}$ où $M_{X,i}^{V^{-1}\Pi} = \{m \in M_{X,i} : Vm = \Pi m\}$.
 Lorsque ces hypothèses sont vérifiées, on dit que i est un indice critique.
4. Il existe au moins un indice critique.

Démonstration. Pour 1., la deuxième assertion découle de la première qui est prouvée dans [36, Th. 4.23]. Le reste a été prouvé dans [4, §II.5] quand $d = 1$. La traduction de ces arguments en dimension quelconque est transparente, mais nous en donnons quelques explications succinctes. Pour 2. l'égalité $[M_{X,i}, VM_{X,i-1}] = 1$ provient du caractère spécial. Le reste se déduit du fait que Π, V, F commutent entre eux, et des identités $[M_X, \varpi M_X] = (d+1)^2$ (la hauteur de X) et $FV = \Pi^{d+1} = \varpi$. Pour 3., (a) et (b) sont équivalents d'après 1. Le point 2. fournit le sens non-trivial de l'équivalence de (c) avec (a), (b) (idem pour (d) \Leftrightarrow (c)). Pour (c) \Rightarrow (e), on applique la classification de Dieudonné-Manin à l'isocrystal $(M_{X,i}[1/p], V^{-1}\Pi)$ (l'autre sens est clair). Pour 4., on observe que la flèche $\Pi^{d+1} = \varpi : M_X/VM_X \rightarrow M_X/VM_X$ est nulle.

Pour simplifier, nous supposons que tous les indices de M_Φ sont critiques. Dans ce cas, un couple (M_X, ρ) est dans $\mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}, s}^d(\overline{\mathbb{F}})$ si et seulement si $\rho M_{X,d} = M_{\Phi,d}$ et d est le seul indice critique de M_X . Pour un tel couple, on a une suite d'inclusion

$$\varpi M_{X,d} \subset \Pi^d M_{X,0} \subset M_{X,d}$$

qui définit une droite (d'après le point 4. et 2. de 6.4) $D := \Pi^d M_{X,0}/\varpi M_{X,d}$ dans $M_{X,d}/\varpi M_{X,d}$ et donc une flèche

$$\psi : \mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}}, s}^d(\overline{\mathbb{F}}) \rightarrow \mathbb{P}(M_{X,d}/\varpi M_{X,d}) \cong \mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{F}}).$$

Grâce au point 3. (e) de 6.4, on peut identifier

$$\mathbb{P}(M_{X,d}^{V^{-1}\Pi}/\varpi) \cong \mathbb{P}(\mathbb{F}), \quad \mathbb{P}(M_{X,d}/\varpi) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}(M_{X,d}^{V^{-1}\Pi}/\varpi)} H \cong \mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{F}}) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F})} H$$

et $GL_{d+1}(\mathbb{F}) \cong GL((M_{X,d}^{V^{-1}\Pi}/\varpi)$. On en déduit une action de G° par inflation $\mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{F}}) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F})} H$. Grâce à ces constructions, on peut décrire explicitement la restriction de l'isomorphisme dans 3.3 sur les points géométriques de $\mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d$.

Lemme 6.5. *L'application ψ définie précédemment induit une bijection G° -équivariante :*

$$\mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d(\overline{\mathbb{F}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{F}}) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F})} H.$$

Démonstration. Notons qu'un couple (M_X, ρ) dans $\mathbb{H}_{\mathbb{F},s}^d(\overline{\mathbb{F}})$ est déterminé par la donnée des inclusions $\rho M_{X,i} \subset M_{\Phi}[\frac{1}{p}]$. Par hypothèse, il suffit d'étudier les cas $i \neq d$. Comme aucun de ces indices ne sont critiques, on a les identités (cf 3. (d) dans 6.4)

$$M_{X,1} = VM_{X,0} + \Pi M_{X,0}, \dots, M_{X,d-1} = VM_{X,d-2} + \Pi M_{X,d-2}$$

et le sous-module $M_{X,0}$ détermine $M_{X,1}, \dots, M_{X,d-1}$. Revenons à ψ , la droite $\Pi^d M_{X,0}/\varpi M_{X,d} \subset M_{X,d}/\varpi M_{X,d}$ détermine $\rho \Pi^d M_{X,0}$ (car $\rho M_{X,d}$ et $\rho \varpi M_{X,d}$ sont fixés) et donc le module $\rho M_{X,0}$ par injectivité de la multiplication par Π . Dit autrement, l'application ψ est injective.

Il reste à prouver que l'image de cette flèche est l'ouvert décrit dans l'énoncé. Prenons un couple $(M_X, \rho) \in \mathbb{H}_{\mathbb{F}}^d(\overline{\mathbb{F}})$ tel que $\rho M_{X,d} = M_{\Phi,d}$ et on fixe $m_0 \in M_{X,0} \setminus VM_{X,d}$. En particulier, m_0 engendre $\text{Lie}(X)_0$. Le point crucial est d'observer l'équivalence suivante : d est le seul indice critique si et seulement si $(\Pi^i V^{d-i} m_0)_i$ est une $\overline{\mathbb{F}}$ -base de $M_{X,d}/\varpi M_{X,d}$. Supposons le deuxième hypothèse, le module suivant est contenue dans $VM_{X,d-1}$ et est d'indice 1 dans $M_{X,d}$

$$\mathcal{O}_{\check{K}} \cdot V^d m_0 + \dots + \mathcal{O}_{\check{K}} \cdot V \Pi^{d-1} m_0 + \varpi M_{X,d}.$$

Il est donc confondu avec $VM_{X,d-1}$ d'après le point 2. de 6.4. Ainsi, $\Pi^d m_0$ engendre $\text{Lie}(X)_d$ et la flèche $\Pi^d : \text{Lie}(X)_0 \rightarrow \text{Lie}(X)_d$ est non nulle ce qui montre que d est le seul indice critique. Réciproquement, supposons les indices $0, \dots, d-1$ non critiques et établissons d'abord par récurrence sur $0 \leq k \leq d$:

$$M_{X,k} = \mathcal{O}_{\check{K}} \cdot V^k m_0 + \mathcal{O}_{\check{K}} \cdot V^{k-1} \Pi m_0 + \dots + \mathcal{O}_{\check{K}} \cdot \Pi^k m_0 + V^{k+1} M_{X,d},$$

$$VM_{X,k-1} = \mathcal{O}_{\check{K}} \cdot V^k m_0 + \mathcal{O}_{\check{K}} \cdot V^{k-1} \Pi m_0 + \dots + \mathcal{O}_{\check{K}} \cdot V \Pi^{k-1} m_0 + V^{k+1} M_{X,d}$$

Le cas $k = 0$ est une conséquence directe de la définition de m_0 . Pour l'hérédité, cela découle de la relation $M_{X,k+1} = \Pi M_{X,k} + VM_{X,k}$ pour $k \neq d$. Quand k vaut d , on en déduit que la famille $(\Pi^i V^{d-i} m_0)_i$ engendre

$$M_{X,d}/V^{d+1} M_{X,d} = M_{X,d}/\Pi^{d+1} M_{X,d} = M_{X,d}/\varpi M_{X,d}$$

et est donc une base par argument de dimension.

Pour terminer la preuve, écrivons $\Pi^d m_0 = \sum_i a_i x_i$ dans une base $(x_i)_i$ de $M_{X,d}$ par des éléments de $M_{X,d}^{V^{-1}\Pi}$. On obtient alors dans $M_{X,d}/\varpi M_{X,d}$:

$$\Pi^{d-i} V^i m_0 = (\Pi^{-1} V)^i \Pi^d m_0 = \sum_i a_i^{1/p^i} x_i.$$

Le même argument que dans la preuve de 4.1 montre que $(\Pi^i V^{d-i} m_0)_i$ est une $\overline{\mathbb{F}}$ -base de $M_{X,d}/\varpi M_{X,d}$ si et seulement si $\overline{\mathbb{F}} \cdot V^d m_0 \in \mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{F}}) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F})} H$ si et seulement si $\overline{\mathbb{F}} \cdot \Pi^d m_0 \in \mathbb{P}^d(\overline{\mathbb{F}}) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}^d(\mathbb{F})} H$.

Nous appellerons l'isomorphisme précédent morphisme des périodes. Nous pouvons maintenant terminer la preuve du résultat. Reprenons la matrice g construite précédemment ainsi que la droite propre $\overline{y} \in \mathbb{H}_{\overline{\mathbb{F}},s}^d(\overline{\mathbb{F}})$ associée à la valeur propre λ . Via l'application des périodes, cette droite détermine un couple (M_X, ρ) pour lequel g agit par multiplication par λ sur $D := \Pi^d M_{X,0}/\varpi M_{X,d}$. En reprenant les arguments de la preuve du lemme précédent, les générateurs de D engendrent $\text{Lie}(X)_d$ où g agit donc par multiplication par λ sur $\text{Lie}(X)_d$. Comme l'indice d est critique, on a $\text{Lie}(X)_d = \ker(\Pi : \text{Lie}(X)_d \rightarrow \text{Lie}(X)_0)$ d'où $[g]_1 \cdot T = \lambda^{-1} T$ sur $\pi^{-1}(\overline{y})$ par dualité. Le résultat s'en déduit.

6.2. Le tube au-dessus d'une intersection de composantes irréductibles

Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 6.6. *Si σ est un simplexe de dimension non nulle, alors $H_{\text{dR},c}^j(\Sigma_{\text{Ost}(\sigma)}^1)[\theta] = 0$ pour tout j et tout caractère primitif θ .*

En utilisant l'action de G , on peut supposer que σ est un simplexe standard (en particulier, on a $\sigma = \{[M_i]\}_i$ avec $M_0 = \mathcal{O}_K^{d+1}$), de dimension $k \geq 1$ et de type (e_0, \dots, e_k) . D'après le théorème 5.1, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$H_{\text{dR}}^j(\Sigma_{\text{Ost}(\sigma)}^1)[\theta] \cong H_{\text{dR}}^j(\Sigma_{\text{Ost}(\sigma)}^1 \setminus (\bigcup_{s \notin \sigma} \Sigma_{\text{Ost}(s)}^1))[\theta] \cong H_{\text{dR}}^j(\Sigma_{\overline{\sigma}}^1)[\theta].$$

On a, d'après le théorème 3.5

$$\Sigma_{\text{Ost}(s)}^1 = \mathbb{H}_{\check{K}, \text{Ost}(s)}^d((\varpi u_1)^{\frac{1}{N}}),$$

avec $u_1 = (-1)^d \prod_{a \in (\mathbb{F}_q)^{d+1} \setminus \{0\}} \frac{a_0 z_0 + \dots + a_d z_d}{z_d}$ avec $z = [z_0, \dots, z_d]$ un système de variable sur l'espace projectif \mathbb{P}_K^d adapté à σ . Nous souhaitons restreindre le torseur $\kappa(\varpi u_1)$ à $\mathbb{H}_{\check{K}, \overline{\sigma}}^d$ car $\Sigma_{\overline{\sigma}}^1 \subset \Sigma_{\text{Ost}(s)}^1$. On rappelle [10, 6.4] que cet espace admet une décomposition

$$\mathbb{H}_{\check{K}, \overline{\sigma}}^d \cong A_k \times \prod_{i=0}^k C_{e_i-1} \cong A_k \times C_\sigma,$$

où A_k et C_{e_i-1}, C_σ sont les espaces introduits dans le paragraphe 3.3. Nous allons exhiber une décomposition similaire pour les torseurs. Introduisons avant quelques notations. Pour a unimodulaire ie. $a \in M_0 \setminus \varpi M_0$, $i(a)$ sera l'unique entier tel que $a \in M_{i(a)} \setminus M_{i(a)-1}$.

Lemme 6.7. *Soient S un ensemble fini de vecteur unimodulaire et $(\alpha_a)_{a \in S}$ des entiers de somme nulle¹⁷ et soit $Q = \prod_{a \in S} l_a^{\alpha_a}$. Notons*

¹⁷ sans perte de généralité, on peut supposer que S contient les variables $(z_i)_{0 \leq i \leq d}$

$$Q_{A_k} = \prod_{a \in S} z_{d_{i(a)}}^{\alpha_a} \in \mathcal{O}^*(A_k),$$

Il existe des sections $Q_{C_{e_i-1}} \in \mathcal{O}^*(C_{e_i-1})$, chacune étant un produit homogène de degré 0 de formes linéaire tel que

$$Q = Q_{A_k} Q_{C_{e_0-1}} \cdots Q_{C_{e_k-1}} = Q_{A_k} Q_{C_\sigma} \pmod{1 + \mathcal{O}^{++}(\mathbb{H}_{\check{K}, \check{\sigma}}^d)}$$

avec $Q_{C_\sigma} = Q_{C_{e_0-1}} \cdots Q_{C_{e_k-1}} \in \mathcal{O}^*(C_\sigma)$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour les fractions de la forme $\frac{l_a}{z_d}$. On rappelle que l'on a introduit des sous-modules $N_i \subset M_i$ tels que :

$$\begin{aligned} M_k &= N_0 \oplus \cdots \oplus N_k \\ M_i &= N_0 \oplus \cdots \oplus N_i \oplus \varpi N_{i+1} \oplus \cdots \oplus \varpi N_k. \end{aligned}$$

On peut alors décomposer $a = a_1 + a_2$ avec a_1 dans $N_{i(a)}$ unimodulaire, a_2 dans $M_{i(a)-1}$. On a

$$\frac{l_a}{z_d} = \frac{z_{d_{i(a)}} l_{a_1} + l_{a_2}}{z_d} = \frac{z_{d_{i(a)}} l_{a_1}}{z_d} \left(1 + \frac{l_{a_2}}{l_{a_1}}\right).$$

Le terme $\frac{z_{d_{i(a)}}}{z_d}$ est dans $\mathcal{O}^*(A_k)$, la fraction $\frac{l_{a_1}}{z_{d_{i(a)}}}$ dans $\mathcal{O}^*(C_{e_i-1})$ (cf 3.1) et $\frac{l_{a_2}}{l_{a_1}}$ dans $\mathcal{O}^{++}(\mathbb{H}_{\check{K}, \check{\sigma}}^d)$ par définition de $\mathbb{H}_{\check{K}, \check{\sigma}}^d$. De plus, la fraction $Q_{A_k} = \frac{z_{d_{i(a)}}}{z_d}$ a la forme voulue ce qui conclut la preuve de l'énoncé.

D'après ce qui précède (et en utilisant le fait que N est premier à p , donc toute fonction f telle que $|f - 1| < 1$ est une puissance N -ième), on peut décomposer $u_1 = u_{A_k} u_{C_\sigma} \pmod{\mathcal{O}^*(\mathbb{H}_{\check{K}, \check{\sigma}}^d)^N}$. Introduisons les μ_N -revêtements

$$\mathcal{T}_{A_k} = A_k(u_{A_k}^{1/N}) \text{ et } \mathcal{T}_{C_\sigma} = C_\sigma((\varpi u_{C_\sigma})^{1/N}).$$

Soit H l'antidiagonale de μ_N^2 . On a

$$\Sigma_{\check{\sigma}}^1 = (A_k \times C_\sigma)((\varpi u_{A_k} u_{C_\sigma})^{1/N}) = (\mathcal{T}_{A_k} \times_{\check{K}} \mathcal{T}_{C_\sigma})/H.$$

Lemme 6.8. L'espace \mathcal{T}_{A_k} a $q^m - 1$ composantes géométriques avec $m = \text{PGCD}(d + 1, e_0, \dots, e_k)$.

Démonstration. Notons que A_k est un tore monomial semi-ouvert. En effet,

$$A_k = \{y = (y_0, \dots, y_{k-1}) \in \mathbb{B}_{\check{K}}^k \mid 1 > |y_{k-1}| > \cdots > |y_0| > |\varpi|\}$$

et on réalise le changement de variable $x_0 = \frac{y_0}{y_1}$, $x_1 = \frac{y_1}{y_2}$, \dots , $x_{k-1} = y_{k-1}$ pour obtenir¹⁸

$$A_k = \{x = (x_0, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{B}_{\check{K}}^k \mid 1 > |x_0 \cdots x_{k-1}| > |\varpi|\}.$$

¹⁸Sur le système de coordonnées $[z_0, \dots, z_d]$ de l'espace projectif ambiant, les variables $(y_i)_i$ et $(x_i)_i$ correspondent à $y_i = \frac{z_{d_i}}{z_d}$ et $x_i = \frac{z_{d_i}}{z_{d_{i+1}}}$.

De plus, on a (cf 6.7)

$$u_{A_k} = \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{z_{d_i}}{z_d}\right)^{\beta_i} = \prod_{i=0}^{k-1} y_i^{\beta_i} = \prod_{i=0}^{k-1} x_i^{\beta_i + \dots + \beta_{k-1}}$$

où $\beta_i = |(M_i/\varpi M_0) \setminus (M_{i+1}/\varpi M_0)| = q^{d+1-d_{i+1}}(q^{e_i} - 1)$.

Le nombre de composantes connexes géométriques π_0 de \mathcal{T}_{A_k} est (cf [26, Proposition 4.1.])

$$\pi_0 = \text{PGCD}(N, \beta_0 + \dots + \beta_{k-1}, \dots, \beta_{k-1}) = \text{PGCD}(N, \beta_0, \dots, \beta_{k-1}) = q^m - 1.$$

La partie isotypique en θ est donnée par :

$$H_{\text{dR}}^j(\Sigma_{\sigma}^1)[\theta] = \bigoplus_{j_1+j_2=j} H_{\text{dR}}^{j_1}(\mathcal{T}_{A_k})[\theta] \widehat{\otimes} H_{\text{dR}}^{j_2}(\mathcal{T}_{C_{\sigma}})[\theta].$$

On voit θ comme un élément de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Le nombre de composantes connexes géométriques de \mathcal{T}_{A_k} est de la forme $q^m - 1$ et par primitivité de θ , $N/(q^m - 1)$ ne divise pas θ dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On a alors $H_{\text{dR}}^j(\mathcal{T}_{A_k})[\theta] = 0$ d'après 5.11. Ainsi,

$$H_{\text{dR}}^j(\Sigma_{\sigma}^1)[\theta] = 0.$$

Ce qui conclut la preuve de la proposition 6.6.

6.3. Réalisation de la correspondance de Langlands locale

Dans cette partie, nous allons décrire la cohomologie des espaces $\mathcal{M}_{D_r}^1$ et montrer qu'elle réalise la correspondance de Jacquet-Langlands. On étendra les scalaires à C pour tous les espaces considérés en fibre générique.

On pourra simplifier le produit $G \times D^*$ en GD . On a une ‘valuation’ sur GD :

$$v_{GD} : (g, b) \in GD \mapsto v_K(\det(g) \text{Nr}(b)) \in \mathbb{Z}.$$

On introduit alors pour $i = 0$ ou $i = d + 1$, $[GD]_i = v_{GD}^{-1}(i\mathbb{Z})$ et $[G]_i = G \cap [GD]_i$, $[D]_i = D^* \cap [GD]_i$. Ainsi, on a des inclusions de \mathcal{O}_D^* , G dans $[GD]_0$

$$\begin{aligned} b \in \mathcal{O}_D^* &\mapsto (Id, b) \in [GD]_0 \\ g \in G &\mapsto (g, \Pi_D^{-\det(g)}) \in [GD]_0 \end{aligned}$$

mais les deux sous-groupes ne commutent pas entre eux.

Passons aux représentations qui vont nous intéresser. Nous définissons d’abord des représentations sur $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{O}_D^*\varpi^{\mathbb{Z}}$ que nous étendrons à GD par induction. Fixons θ un caractère primitif de $\mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$ et des isomorphismes $\mathcal{O}_D^*/1 + \Pi_D\mathcal{O}_D \cong \mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$:

- θ sera vu comme une $[D]_{d+1}$ -représentation via $\mathcal{O}_D^*\varpi^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{O}_D^* \rightarrow \mathbb{F}_{q^{d+1}}^*$,
- $\bar{\pi}_{\theta}$ sera la représentation associée à θ sur $\text{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$ via la correspondance de Deligne-Lusztig. On la voit comme une $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}$ -représentation via $\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{GL}_{d+1}(\mathbb{F}_q)$.

Par induction, on obtient :

- une représentation $\pi(\theta)$ de G , où $\pi(\theta) = \text{c-ind}_{\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}}^G \bar{\pi}\theta$. Il pourra être utile de considérer $\tilde{\pi}(\theta) = \text{c-ind}_{\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}}^{[G]_{d+1}} \bar{\pi}\theta$ et d'écrire $\pi(\theta) = \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G \tilde{\pi}(\theta)$,
- une D^* -représentation $\rho(\theta) = \text{c-ind}_{[D]_{d+1}}^{D^*} \theta$.

Nous avons défini une action de GD sur $\mathcal{M}_{D_r}^1$ qui s'identifie non canoniquement à $\Sigma^1 \times \mathbb{Z}$. Si on confond Σ^1 avec $\Sigma^1 \times \{0\} \subset \mathcal{M}_{D_r}^1/\varpi^{\mathbb{Z}} \cong \Sigma^1 \times \mathbb{Z}/(d+1)\mathbb{Z}$, on obtient une action sur Σ^1 de son stabilisateur $[GD]_{d+1}$.

Pour énoncer la correspondance de Langlands, nous aurons besoin de la cohomologie de $\mathcal{M}_{D_r}^1$. On a la relation :

$$H_{\text{dR},c}^i(\mathcal{M}_{D_r}^1/\varpi^{\mathbb{Z}}) = \text{c-ind}_{[GD]_{d+1}}^{GD} H_{\text{dR},c}^i(\Sigma^1).$$

Nous allons montrer :

Théorème 6.9. *Soit θ un caractère primitif, on a un isomorphisme G -équivariant :*

$$\text{Hom}_{D^*}(\rho(\theta), H_{\text{dR},c}^i((\mathcal{M}_{D_r}^1/\varpi^{\mathbb{Z}})/C)) \cong_G \begin{cases} \pi(\theta)^{d+1} & \text{si } i = d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Si $i \neq d$, nous avons déjà prouvé l'annulation de la cohomologie. Posons dorénavant $i = d$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{D^*}(\rho(\theta), H_{\text{dR},c}^d((\mathcal{M}_{D_r}^1/\varpi^{\mathbb{Z}})/C)) &= \text{Hom}_{D^*}(\text{c-ind}_{[D]_{d+1}}^D \theta, \text{c-ind}_{[GD]_{d+1}}^{GD} H_{\text{dR},c}^d(\Sigma_C^1)) \\ &= \text{Hom}_{[D]_{d+1}}(\theta, \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G H_{\text{dR},c}^d(\Sigma_C^1)) \\ &= \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G \text{Hom}_{\mathbb{F}_q^*}(\theta, H_{\text{dR},c}^d(\Sigma_C^1)) \\ &= \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G H_{\text{dR},c}^d(\Sigma_C^1)[\theta] \\ &= \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G \pi(\theta)|_{[G]_{d+1}} \\ &= \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G \text{res}_{[G]_{d+1}}(\text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G \tilde{\pi}(\theta)) \\ &= \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G \left(\bigoplus_{x \in G/[G]_{d+1}} c_x(\tilde{\pi}(\theta)) \right) \\ &= \bigoplus_{x \in G/[G]_{d+1}} \text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G c_x(\tilde{\pi}(\theta)) \\ &= \pi(\theta)^{|G/[G]_{d+1}|} = \pi(\theta)^{d+1}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

On rappelle que $\tilde{\pi}(\theta) = \text{c-ind}_{\text{GL}_{d+1}(\mathcal{O}_K)\varpi^{\mathbb{Z}}}^{[G]_{d+1}} \bar{\pi}\theta$. On a noté $c_x(\tilde{\pi}(\theta))$ la représentation $g \mapsto \tilde{\pi}(\theta)(x^{-1}gx)$. Pour l'avant-dernière égalité, on a utilisé la formule de Mackey $\text{c-ind}_{[G]_{d+1}}^G c_x(\tilde{\pi}(\theta)) = \pi(\theta)$.

References

- [1] V. G. BERKOVICH, Vanishing cycles for formal schemes. II, *Invent. Math.* **125**(2) (1996), 367–390.
- [2] P. BERTHELOT, Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie, *Prépublication IRMAR* 96-03, 1996.
- [3] P. BERTHELOT, Dualité de Poincaré et formule de Künneth en cohomologie rigide, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **325**(5) (1997), 493–498.
- [4] J.-F. BOUTOT AND H. CARAYOL, Uniformisation p -adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Čerednik et de Drinfel, *Astérisque* **196–197**(7) (1992), 45–158. Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988).
- [5] P. BOYER, Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale, *Invent. Math.* **138**(3) (1999), 573–629.
- [6] P. COLMEZ, G. DOSPINESCU AND W. NIZIOL, Cohomologie p -adique de la tour de Drinfeld : le cas de la dimension 1, *J. Amer. Math. Soc.* **33**(2) (2020), 311–362.
- [7] J.-F. DAT, Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques, *Invent. Math.* **169**(1) (2007), 75–152.
- [8] J.-F. DAT, A lemma on nearby cycles and its application to the tame Lubin-Tate space, *Math. Res. Lett.* **19**(1) (2012), 165–173.
- [9] J. DE JONG AND M. VAN DER PUT, Étale cohomology of rigid analytic spaces, *Doc. Math.* **1**(1) (1996), 1–56.
- [10] E. DE SHALIT, Residues on buildings and de Rham cohomology of p -adic symmetric domains, *Duke Math. J.* **106**(1) (2001), 123–191.
- [11] P. DELIGNE AND G. LUSZTIG, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math. (2)* **103**(1) (1976), 103–161.
- [12] G. DOSPINESCU AND A.-C. LE BRAS, Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands p -adique, *Ann. of Math. (2)* **186**(2) (2017), 321–411.
- [13] V. G. DRINFEL'D, Elliptic modules, *Mat. Sb. (N.S.)* **94**(136) (1974), 594–627, 656.
- [14] V. G. DRINFEL'D, Coverings of p -adic symmetric domains, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **10**(2) (1976), 29–40.
- [15] V. G. DRINFEL'D, Elliptic modules. II, *Mat. Sb. (N.S.)* **102**(144)(2) (1977), 182–194, 325.
- [16] R. ELKIK, Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6** (1974), 553–603 (1974).
- [17] A. GENESTIER, Espaces symétriques de Drinfeld, *Astérisque* **234** (1996), ii+124.
- [18] O. GOLDMAN AND N. IWAHORI, The space of p -adic norms, *Acta Math.* **109** (1963), 137–177.
- [19] E. GROSSE-KLÖNNE, Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf, *J. Reine Angew. Math.* **519** (2000), 73–95.
- [20] E. GROSSE-KLÖNNE, Finiteness of de Rham cohomology in rigid analysis, *Duke Math. J.* **113**(1) (2002), 57–91.
- [21] E. GROSSE-KLÖNNE, De Rham cohomology of rigid spaces, *Math. Z.* **247**(2) (2004), 223–240.
- [22] E. GROSSE-KLÖNNE, On the crystalline cohomology of Deligne-Lusztig varieties, *Finite Fields Appl.* **13**(4) (2007), 896–921.
- [23] M. HARRIS, Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel' d upper half spaces : elaboration of Carayol's program, *Invent. Math.* **129**(1) (1997), 75–119.
- [24] M. HARRIS AND R. TAYLOR, *The Geometry and Cohomology of Some Simple Shimura Varieties* (Annals of Mathematics Studies) vol. 151 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001). With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

- [25] D. JUNGER, Cohomologie analytique des arrangements d'hyperplans, Preprint, 2022, <https://arxiv.org/abs/2012.12729>.
- [26] D. JUNGER, Équations pour le premier revêtement de l'espace symétrique de drinfeld, Preprint, 2022, <https://arxiv.org/abs/2202.01018>.
- [27] D. JUNGER, Un autre calcul des fonctions inversibles sur l'espace symétrique de drinfeld, Preprint, 2022, <https://arxiv.org/abs/2111.10274>.
- [28] R. KIEHL, Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.* **2** (1967), 256–273.
- [29] M. RAYNAUD, Schémas en groupes de type (p, \dots, p) , *Bull. Soc. Math. France* **102** (1974), 241–280.
- [30] J. TEITELBAUM, Geometry of an étale covering of the p -adic upper half plane, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **40**(1) (1990), 68–78.
- [31] M. VAN DER PUT, Cohomology on affinoid spaces, *Compositio Math.* **45**(2) (1982), 165–198.
- [32] H. WANG, L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale I, *Math. Z.* **278**(3–4) (2014), 829–857.
- [33] H. WANG, Sur la cohomologie de la compactification des variétés de Deligne-Lusztig, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **64**(5) (2014), 2087–2126.
- [34] T. YOSHIDA, On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles, in *Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces* (Sapporo 2007) (Adv. Stud. Pure Math.) vol. 58 (Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010), 361–402.
- [35] W. ZHENG, Sur la cohomologie des faisceaux l -adiques entiers sur les corps locaux, *Bull. Soc. Math. France* **136**(3) (2008), 465–503.
- [36] T. ZINK, *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen* (Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics]) vol. 68 (BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1984). With English, French and Russian summaries.