COMPOSITIO MATHEMATICA

Log-isocristaux surconvergents et holonomie

Daniel Caro

Compositio Math. **145** (2009), 1465–1503.

doi:10.1112/S0010437X09004199

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

The London Mathematical Society

Compositio Math. 145 (2009) 1465–1503
doi:10.1112/S0010437X09004199

Log-isocristaux surconvergents et holonomie

Daniel Caro

Abstract

Let $\mathcal{V}$ be a complete discrete valuation ring of unequal characteristic with perfect residue field. Let $\mathfrak{X}$ be a separated smooth formal $\mathcal{V}$-scheme, $\mathcal{Z}$ be a normal crossing divisor of $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^{\#} := (\mathfrak{X}, \mathcal{Z})$ be the induced formal log-scheme over $\mathcal{V}$ and $u : \mathfrak{X}^{\#} \to \mathfrak{X}$ be the canonical morphism. Let X and Z be the special fibers of $\mathfrak{X}$ and $\mathcal{Z}$, T be a divisor of X and $\mathcal{E}$ be a log-isocrystal on $\mathfrak{X}^{\#}$ overconvergent along T, that is, a coherent left $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module, locally projective of finite type over $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$. We check the relative duality isomorphism : $u_{T,+}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u_{T,!}(\mathcal{E}(\mathcal{Z}))$. We prove the isomorphism $u_{T,+}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z})$, which implies their holonomicity as $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules. We obtain the canonical morphism $\rho_{\mathcal{E}} : u_{T,+}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}({}^{\dagger}Z)$. When $\mathcal{E}$ is moreover an isocrystal on $\mathfrak{X}$ overconvergent along T, we prove that $\rho_{\mathcal{E}}$ is an isomorphism.

Table des matières

Introduction

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel parfait k. Kedlaya a prouvé, via la série [Ked07a, Ked07b, Ked08, Ked09], le 'théorème de la réduction semi-stable' suivant.

Théorème (Kedlaya). *Soient Y une variété lisse sur k (i.e., un k-schéma lisse séparé de type fini) et E un F-isocristal surconvergent sur Y. Il existe alors :*

(i) *un morphisme propre, surjectif, génériquement étale $g : Y_1 \to Y$;*

(ii) *une immersion ouverte $j_1 : Y_1 \hookrightarrow X_1$ dans une variété projective lisse telle que $D_1 := X_1 \setminus Y_1$ soit un diviseur à croisements normaux strict de X_1 ;*

Received 26 September 2007, accepted in final form 16 December 2008, published online 24 September 2009.
2000 Mathematics Subject Classification 14F10, 14F30.
Keywords: arithmetical $\mathcal{D}$-modules, log-isocrystals, holonomicity.
L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

(iii) *un log-isocristal convergent G_1 sur $(X_1, D_1)/ \operatorname{Spf} \mathcal{V}$;*
tels que $j_1^\dagger(G_1) \xrightarrow{\sim} g^*E$, avec $j_1^\dagger(G_1)$ signifiant l'isocristal surconvergent sur Y_1 induit par G_1.

Ce théorème correspond aux conjectures de Shiho dans [Shi02, 3.1.8] et de Tsuzuki dans [Tsu02, 1.3.1] qu'ils avaient appelé la 'conjecture de monodromie génériquement finie'.

Ce théorème a d'abord été établi dans les deux cas particuliers suivants : pour les F-isocristaux surconvergents *unités* par Tsuzuki dans [Tsu02] et lorsque Y est une courbe par Kedlaya (voir [Ked03, le théorème 1.1]). On en avait respectivement déduit la surholonomie des F-isocristaux surconvergents unités sur les variétés lisses (voir [Car04] et [Car09]) et l'holonomie des F-isocristaux surconvergents sur les courbes lisses (voir [Car06b, la section 4]). Nous vérifierons, dans un travail en commun avec Tsuzuki (voir [CT08]), la surholonomie des F-isocristaux surconvergents sur les variétés lisses, ce qui constitue une réciproque au dévissage en F-isocristaux surconvergents des F-complexes surholonomes (voir [Car06a] ou [Car07]). Ce présent article est une première étape pour valider la surholonomie des F-isocristaux surconvergents sur les variétés lisses. Précisons à présent le contenu de ce travail.

Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse, $\mathcal{Z}$ un diviseur à croisements normaux strict de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{Y} := \mathfrak{X} \setminus \mathcal{Z}$ l'ouvert correspondant, X, Z, Y les fibres spéciales respectives, $M(\mathcal{Z})$ la log-structure sur $\mathfrak{X}$ définie par $\mathcal{Z}$, $\mathfrak{X}^\# := (\mathfrak{X}, M(\mathcal{Z}))$ le log-$\mathcal{V}$-schéma formel lisse induit, T un diviseur de X et $u : \mathfrak{X}^\# \to \mathfrak{X}$ le morphisme structural. On désigne par $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ le faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini sur $\mathfrak{X}^\#$ à singularités surconvergentes le long de T. Soit $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T, i.e., un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent, localement projectif et de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ (voir remarques 4.20). Notons $\omega_{\mathfrak{X}^\#}$ et $\omega_{\mathfrak{X}}$ les faisceaux des formes différentielles de degré maximal sur respectivement $\mathfrak{X}^\#$ et $\mathfrak{X}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})_{\mathbb{Q}} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \omega_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}})$, où les indices $\mathbb{Q}$ signifient que l'on applique $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $\mathcal{E}(\mathcal{Z}) := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})_{\mathbb{Q}}$ muni de sa structure canonique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module à gauche.

Nous donnons dans la première partie quelques compléments sur les log-$\mathcal{D}$-modules arithmétiques qui étendent au cas logarithmique plusieurs propriétés déjà connues dans le cas non logarithmique.

Dans la quatrième partie, nous vérifions que le morphisme canonique $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z}) \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z})$ est un isomorphisme (voir (4.22.1)). Pour cela, on se ramène au niveau 0 vérifié au deuxième chapitre (voir le corollaire 2.11). La vérification du corollaire 2.11 reprend les idées (notamment l'utilisation de complexes de Spencer) de la démonstration dans le cas complexe des théorèmes [CN05, 1.2.3] ou [Cal99, 4.1.3, 4.2.1].

Dans une cinquième partie, nous définissons les foncteurs duaux, images directes et images directes extraordinaires par u en nous inspirant du cas non-logarithmique. Nous vérifions les isomorphismes canoniques $u_{T,+}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u_{T,!}(\mathcal{E}(\mathcal{Z})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z})$, où $u_{T,+}$ (respectivement $u_{T,!}$) désigne l'image directe (respectivement l'image directe extraordinaire) par u à singularités surconvergentes le long de T. Le premier isomorphisme correspond en quelque sorte (modulo le twist '$(\mathcal{Z})$') à un isomorphisme de dualité relative (logarithmique) au morphisme canonique $\mathfrak{X}^\# \to \mathfrak{X}$. Sa preuve est analogue au cas complexe du théorème [CN05, 3.1.2] et résulte d'un isomorphisme d'associativité qui sera établi dans le troisième chapitre (voir le théorème 3.1 ou l'isomorphisme induit (3.7.1)). On en déduira alors que $u_{T,+}(\mathcal{E})$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module holonome (via une extension de la notion d'holonomie sans structure de Frobenius). Lorsque T est vide et $\mathcal{E}$ est muni d'une structure de Frobenius, cela signifie que $u_+(\mathcal{E})$ est holonome au sens de Berthelot.

Notons $\mathcal{E}(^\dagger Z)$ l'isocristal sur $Y \setminus T$ surconvergent le long de $Z \cup T$ induit par $\mathcal{E}$. Dans la dernière partie, nous établissons que si $\mathcal{E}$ est en fait un isocristal sur $\mathfrak{X}$ surconvergent le long de T (e.g., le coefficient constant $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$) alors le morphisme canonique $\rho_{\mathcal{E}} : u_{T,+}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}(^\dagger Z)$ est un isomorphisme (voir le théorème 6.11). La preuve utilise l'isomorphisme d'associativité du troisième chapitre. Moyennant quelques hypothèses sur les exposants le long des composantes irréductibles de Z (e.g., ils doivent être non-Liouville), on conjecture que $\rho_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme. Cette conjecture sera établie lorsque le diviseur T_0 est vide dans un prochain travail (voir le théorème [CT08, 2.2.9]). Le théorème 6.11 sera en outre utile pour valider cette conjecture (voir les explications en début du sixième chapitre). Enfin, on vérifie que le fait que $\rho_{\mathcal{E}}$ soit un isomorphisme implique que $\mathcal{E}(^\dagger Z)$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}(^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module holonome et que le complexe de de Rham logarithmique de $\mathcal{E}$ est isomorphe au complexe de de Rham de $\mathcal{E}(^\dagger Z)$, ce qui correspond à un analogue arithmétique du cas complexe du théorème [CN05, 4.1].

Conventions et notations

Nous conserverons les hypothèses concernant $\mathcal{V}$, $\mathfrak{m}$, k. De plus, soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel séparé et lisse. Un sous-$\mathcal{V}$-schéma formel fermé $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{X}$ est un diviseur si son idéal structural est localement principal. De manière analogue au § [Dej96, 2.4], on dit que $\mathcal{Z}$ est un diviseur à croisements normaux strict s'il existe des diviseurs $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_e$ de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathcal{Z} = \bigcup_{i=1,\ldots,e} \mathcal{Z}_i$ (en tant que sous-$\mathcal{V}$-schémas formels fermés), pour tout sous-ensemble non-vide $I \subset \{1, \ldots, e\}$ le sous-$\mathcal{V}$-schéma formel $\bigcap_{i \in I} \mathcal{Z}_i$ soit un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse dont la fibre spéciale est de codimension $\# I$ dans celle de $\mathfrak{X}$. Dans tout cet article, fixons $\mathcal{Z}$ un diviseur à croisements normaux strict de $\mathfrak{X}$. Pour tout point x de $\mathfrak{X}$, il existe un ouvert $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$ le contenant et muni des coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ telles que $\mathcal{Z} \cap \mathfrak{U} = V(t_1 \cdots t_s)$, avec $s \leqslant e$ (le nombre s minimal que l'on peut obtenir correspond au nombre de composantes irréductibles de $\mathcal{Z}$ contenant x). On remarque alors que le sous-monoïde $\mathcal{O}^\times_{\mathfrak{U}} t_1^{\mathbb{N}} \cdots t_s^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$ est indépendant du choix de telles $t_1, \ldots, t_d$ et ne dépend que de $\mathcal{Z}$. Comme les limites projectives de monoïdes sont bien définies, il en résulte alors par recollement (voir la proposition [Gro60, 3.3]) un faisceau de monoïdes sur $\mathfrak{X}$ noté $M(\mathcal{Z})$ et une injection canonique $M(\mathcal{Z}) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$. Notons $\mathcal{Y} := \mathfrak{X} \setminus \mathcal{Z}$ l'ouvert correspondant, $\mathfrak{X}^{\#}$ le log-$\mathcal{V}$-schéma formel lisse égal à $(\mathfrak{X}, M(\mathcal{Z}))$. De plus, soient $d = \dim X$, $\S = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ et, pour tout entier $i \geqslant 0$, $S_i := \operatorname{Spec} \mathcal{V}/\mathfrak{m}^{i+1}$, $X_i := \mathfrak{X} \times_{\S} S_i$, $X_i^{\#} := \mathfrak{X}^{\#} \times_{\S} S_i$, $Z_i := \mathcal{Z} \times_{\S} S_i$, $Y_i := \mathcal{Y} \times_{\S} S_i$. On remarque que la log structure de $X_i^{\#}$ correspond à celle définie par Nakkajima et Shiho dans les sections [NS08, 8.7–8.8].

Lorsque l'on ne voudra pas distinguer le cas formel du cas algébrique, on écrira X (respectivement $X^{\#}$, Y, Z) à la place de $\mathfrak{X}$ ou X_i (respectivement $\mathfrak{X}^{\#}$ ou $X_i^{\#}$, respectivement $\mathcal{Y}$ ou Y_i, respectivement $\mathcal{Z}$ ou Z_i). On désigne par $j : Y \subset X$ l'inclusion canonique.

Soit x un point fermé de X. Il existe des coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ sur un ouvert U contenant x telles que $Z \cap U = V(t_1 \cdots t_s)$. Quitte à rétrécir U contenant x et à ajouter 0 ou 1 à t_{s+1} ou t_d, il ne coûte rien de supposer $U = U \setminus V(t_{s+1}, \ldots, t_d)$, i.e., les $t_{s+1}, \ldots, t_d$ sont inversibles. Les $t_1, \ldots, t_d$ induisent aussi des coordonnées locales logarithmiques sur $U^{\#}$ (i.e., $\{dlog(t_1), \ldots, dlog(t_d)\}$ est une base de $\Omega^1_{U^{\#}/S}$).

Par commodité, les coordonnées locales logarithmiques $t_1, \ldots, t_d \in M(\mathcal{Z})$ de $X^{\#}$ seront toujours supposées construites comme dans le paragraphe précédent. En particulier, $t_1, \ldots, t_d \in M(\mathcal{Z})$ sont aussi des coordonnées locales de X.

Sauf mention explicite du contraire, tous les modules seront des modules à gauche et $m \geqslant 0$ sera un entier fixé. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau abélien sur un espace topologique, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ désignera le faisceau $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $\widehat{\mathcal{E}}$ le complété de $\mathcal{E}$ pour la topologie p-adique.

Soit $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux sur X. Si $*$ est l'un des symboles $\emptyset$, $+$, $-$, ou b, on note $D^*(\mathcal{A})$ la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules (à gauche) vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsque l'on souhaitera préciser entre droite et gauche, on écrira $D^*({}^g\mathcal{A})$ ou $D^*(\mathcal{A}^d)$. Conformément aux notations et définitions de [SGA6, 5.2], on désignera par $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A})$ (respectivement $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes à cohomologie cohérente et bornée (respectivement les complexes parfaits).

Le symbole $\underline{k}$ désigne le multi-indice $(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ et $|\underline{k}| = k_1 + \cdots + k_d$. Par convention, si $x_1, \ldots, x_d$ sont des éléments de l'idéal structural d'une m-PD-algèbre, on notera $\underline{x}^{\underline{k}} := x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}$, $\underline{x}^{\{\underline{k}\}_{(m)}} := x_1^{\{k_1\}_{(m)}} \cdots x_d^{\{k_d\}_{(m)}}$ où $x_i^{\{k_i\}_{(m)}}$ est la puissance divisée partielle de niveau m d'ordre k_i de l'élément x_i (voir la section [Ber96b, 1.3]).

Si D, D' sont deux anneaux, nous dirons que E est un (D, D')-bimodule (respectivement bimodule à gauche, respectivement bimodule à droite) si E est muni de deux structures compatibles de D -module à gauche (respectivement à gauche, respectivement à droite) et D'-module à droite (respectivement à gauche, respectivement à droite). Si $D = D'$, nous dirons simplement D-bimodules (respectivement bimodules à gauche, respectivement à droite).

Si $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un homomorphisme de faisceaux d'anneaux, pour tout $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ (respectivement $\mathcal{B}$-module $\mathcal{N}$), on notera $\phi^\flat(\mathcal{M}) := \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ (respectivement $\phi_*(\mathcal{N})$ désigne $\mathcal{N}$ vu comme $\mathcal{A}$-module). La convention est de travailler dans les catégories dérivées mais les foncteurs de la forme $\phi^\flat$ que nous utiliseront seront exacts.

1. Log-$\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Notations 1.1. Comme aucune confusion n'est possible, nous omettrons toujours d'indiquer la base S (munie de la structure logarithmique triviale). Notons ainsi $\mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$ le *voisinage à puissances divisées de niveau m et d'ordre n de $X^\#$* (voir la section [Mon02, 2.2] pour le cas algébrique, le cas formel est identique). En dualisant celui-ci via sa structure gauche de $\mathcal{O}_X$-algèbre, puis en prenant la réunion sur les entiers n, on obtient le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre fini sur $X^\#$* et noté $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$ (voir la section [Mon02, 2.3]).

Si $t_1, \ldots, t_d$ sont des coordonnées locales logarithmiques de $X^\#$ (avec les conventions de l'article données ci-dessus) alors, en notant $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ et $\tau_{i\#} = (1/t_i)\tau_i$, par la proposition [Mon02, 2.2.1] (et de même pour les log-$\mathcal{V}$-schémas formels), la famille $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}_{(m)}}$ (respectivement $\underline{\tau}_\#^{\{\underline{k}\}_{(m)}}$) pour $|\underline{k}| \leqslant n$ forme une base de $\mathcal{P}^n_{X(m)}$ (respectivement $\mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$) sur $\mathcal{O}_X$. La base duale de $\mathcal{D}^{(m)}_X$ (respectivement $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$) sur $\mathcal{O}_X$ est notée $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ (respectivement $\underline{\partial}_\#^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$). Lorsque $\underline{k}$ est de la forme $\underline{k} = (0, \ldots, 0, k, 0, \ldots, 0)$, où k est à la i-ième place, on pose $\partial_i^{\langle k\rangle_{(m)}}$ (respectivement $\partial_{\# i}^{\langle k\rangle_{(m)}}$) à la place de $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ (respectivement $\underline{\partial}_\#^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$). Lorsque qu'il n'y aura aucune ambiguïté sur le niveau m, nous écrirons simplement $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}$ et $\underline{\partial}_\#^{\langle \underline{k}\rangle}$. On calcule la relation : $\underline{\partial}_\#^{\langle \underline{k}\rangle} = \underline{t}^{\underline{k}} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} (= t_1^{k_1} \cdots t_d^{k_d} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle})$.

Dans la section [Mon02, 2.6], Montagnon définit les m-PD-stratifications logarithmiques et montre qu'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche prolongeant une structure de $\mathcal{O}_X$-module est équivalente à celle d'une m-PD-stratification. Nous allons maintenant étendre cette notion de m-PD-stratification en remplaçant le faisceau $\mathcal{O}_X$ par un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres de type 1.2.

Définition 1.2. De manière analogue à la section [Ber96b, 2.3], une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative $\mathcal{B}_X$ est munie d'une 'structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre' si la structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre est sous-jacente à une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module dont les isomorphismes de la m-PD-stratification induite sont des isomorphismes de $\mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$-algèbres.

De manière analogue à la formule [Ber96b, 2.3.4.1], en coordonnées locales, la seconde condition équivaut à la vérification de la formule logarithmique (i.e. avec des dièses) de Leibniz.

Exemple 1.3. Soient T un diviseur de X_0 et r un multiple de p^{m+1}. Berthelot a construit dans le § [Ber96b, 4.2.3] un faisceau de $\mathcal{O}_X$-algèbres commutatives noté $\mathcal{B}_X(T,r)$, muni d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche. La m-PD-stratification associée induit alors par extension via $\mathcal{P}^n_{X(m)} \to \mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$ une m-PD-stratification logarithmique relativement à $X^\#$. On obtient ainsi une structure canonique de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche sur $\mathcal{B}_X(T,r)$ compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre.

1.4 Fixons pour toute la suite d'une part $\mathcal{B}_X$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative munie d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre et d'autre part $\mathcal{B}'_X$ une $\mathcal{B}_X$-algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche telle que $\mathcal{B}_X \to \mathcal{B}'_X$ soit $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire.

On notera par la suite $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)}$ le faisceau de $\mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$-algèbres $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$ (par convention, vu sa position à droite, rappelons que l'on choisit la structure gauche de $\mathcal{O}_X$-algèbre de $\mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$ pour calculer $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$). Le morphisme canonique $\tilde{d}^n_0 : \mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$ munit le faisceau $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)}$ d'une structure de $\mathcal{B}_X$-algèbre que l'on appellera structure *gauche*. De plus, le morphisme de $\mathcal{B}_X$-algèbres $\tilde{d}^n_1 : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}^n_{X^\#(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \underset{\epsilon^{\mathcal{B}_X}_n}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X^\#(m)}$ induit une deuxième structure de $\mathcal{B}_X$-algèbre sur $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)}$ que l'on appellera structure *droite*.

Soit le faisceau $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X^\#(m)}$, où, pour calculer le produit tensoriel, on utilise la structure droite de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)}$ et la structure gauche de $\widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X^\#(m)}$. On introduit les homomorphismes de $\mathcal{B}_X$-algèbres suivants

$$\tilde{\delta}^{n,n'}_{(m)} := \mathcal{B}_X \otimes \delta^{n,n'}_{(m)} : \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X^\#(m)} \to \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X^\#(m)},$$

$$\tilde{q_0}^{n,n'} : \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X^\#(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X^\#(m)}, \tilde{q_1}^{n,n'} : \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X^\#(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X^\#(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X^\#(m)},$$

où $\delta^{n,n'}_{(m)} : \mathcal{P}^{n+n'}_{X^\#,(m)} \to \mathcal{P}^n_{X^\#,(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X^\#,(m)}$ désigne l'homomorphisme construit par Montagnon dans la section [Mon02, 2.3.2.A] (dans le cas algébrique, mais la construction formelle est identique).

En prenant la réunion sur les entiers n de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#,n} := \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{d}^n_{0*}\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)}, \mathcal{B}_X)$, on obtient le faisceau d'anneaux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$ des opérateurs différentiels sur $X^\#$ à coefficients dans $\mathcal{B}_X$. On dispose d'une structure d'anneau construite de manière analogue aux propositions [Ber96b, 2.3.5] ou [Car05, 1.1.13].

Enfin, si $t_1, \ldots, t_d$, sont des coordonnées logarithmiques locales, avec les notations de 1.1, si aucune confusion n'est à craindre, on notera encore $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}_{(m)}}_\#$ (respectivement $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}_\#$) l'élément de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^\#(m)}$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$) à la place de $1 \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}_{(m)}}_\#$ (respectivement $1 \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}_\#$).

Définition 1.5. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{B}_X$-module. Une *m-PD-stratification* (ou *PD-stratification de niveau m*) $\widetilde{\epsilon}$ sur $\mathcal{E}$ *relativement à* $(X^{\#}/S,\, \mathcal{B}_X)$ (ou *relativement à* $\mathcal{B}_X$ si aucune confusion n'est à craindre) est la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^{\#}(m)}$-linéaires $\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_n : \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^{\#}(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^{\#}(m)}$, où les produits tensoriels sont respectivement pris pour les structures droite et gauche de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^{\#}(m)}$, telle que $\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_0 = Id_{\mathcal{E}}$ et satisfaisant la condition de cocycle, i.e., pour tous n, n', $\widetilde{\delta}^{n,n'*}_{(m)}(\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_{n+n'}) = \widetilde{q}^{n,n'*}_0(\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_{n+n'}) \circ \widetilde{q}^{n,n'*}_1(\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_{n+n'})$.

Proposition 1.6. *Pour tout $\mathcal{B}'_X$-module $\mathcal{E}$, il y a équivalence entre les données suivantes :*

(a) *une structure de $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à gauche sur $\mathcal{E}$ prolongeant sa structure canonique de $\mathcal{B}'_X$-module ;*

(b) *une m-PD-stratification $\widetilde{\epsilon}'^{\mathcal{E}} = (\widetilde{\epsilon}'^{\mathcal{E}}_n)$ sur $\mathcal{E}$ relative à $\mathcal{B}'_X$;*

(c) *une m-PD-stratification $\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}} = (\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_n)$ sur $\mathcal{E}$ relative à $\mathcal{B}_X$ dont les isomorphismes $\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_n$ sont semi-linéaires par rapport aux isomorphismes $\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{B}'_X}_n$ de la m-PD-stratification sur $\mathcal{B}'_X$ relative à $\mathcal{B}_X$.*

De plus, un homomorphisme $\mathcal{B}'_X$-linéaire $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre deux $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-modules à gauche est $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-linéaire si et seulement s'il commute aux isomorphismes $\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{E}}_n$ et $\widetilde{\epsilon}^{\mathcal{F}}_n$ (respectivement $\widetilde{\epsilon}'^{\mathcal{E}}_n$ et $\widetilde{\epsilon}'^{\mathcal{F}}_n$). Le morphisme sera dit horizontal. Enfin, en coordonnées locales, pour toute section x de $\mathcal{E}$, on dispose de la formule de Taylor : $\widetilde{\epsilon}'^{\mathcal{E}}_n(1 \otimes x) = \sum_{|\underline{k}| \leqslant n} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}_{\#} x \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}_{\#}$.

Démonstration. Identique à celle de la proposition [Car05, 1.1.16]. □

Exemple 1.7. On munit $\mathcal{B}_X$ de la m-PD-stratification triviale, i.e., les isomorphismes de la m-PD-stratification sont les identités de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^{\#}(m)}$. La structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$ induite sur $\mathcal{B}_X$ est alors décrite de la façon suivante : si $P \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$ et $b \in \mathcal{B}_X$, l'action de P sur b est l'image de b via le morphisme composé : $\mathcal{B}_X \xrightarrow{\tilde{d}^n_1} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X^{\#}(m)} \xrightarrow{P} \mathcal{B}_X$ (on le voit par exemple par $\mathcal{B}_X$-linéarité via 1.6). On vérifie que la formule analogue à [Ber96b, 2.2.4.(iv)] ou [Ber96b, 2.3.5.1] reste valable :

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}_{\#} b = \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle}_{\#}(b) \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}_{\#}. \tag{1.7.1}$$

De manière analogue à [Ber00, 1.1.3] et [Car05, 1.2.22], on définit les m-PD-*costratifications relativement à* $\mathcal{B}_X$. La version logarithmique de la proposition [Car05, 1.1.23] (i.e. l'analogue de la proposition 1.6 avec des costratifications et des modules à droite) reste valable.

Proposition 1.8. *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-modules à gauche, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-modules à droite. La structure de $\mathcal{B}_X$-module de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ (respectivement $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{F}$, respectivement $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$) se prolonge en une structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à gauche. La structure de $\mathcal{B}_X$-module de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$) se prolonge en une structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à droite.*

Démonstration. Cela se vérifie comme dans le cas non logarithmique (voir les propositions [Car05, 1.1.18 et 1.1.24]). □

Remarques 1.9. Avec les notations de la proposition 1.8, contrairement au cas non logarithmique, le calcul de l'inverse de $\epsilon^{\mathcal{E}}_n$ à partir de la formule tautologique dit du développement de Taylor 1.6 n'est pas aisé. En particulier, la formule de [Ber96b, 2.3.2.3] est (en général) fausse si on remplace respectivement '$\underline{\tau}^{\{k\}}$' par '$\underline{\tau}_{\#}^{\{k\}}$' et '$\underline{\partial}^{\langle k\rangle}$' par '$\underline{\partial}_{\#}^{\langle k\rangle}$'. De plus, les analogues logarithmiques des formules [Ber96b, 2.3.3.2], [Ber00, 1.1.7.1-3] décrivant l'action de $\underline{\partial}_{\#}^{\langle k\rangle}$ sur $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{M})$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{N},\mathcal{M})$ sont faux (i.e., il ne suffit pas d'ajouter des dièses). Néanmoins on dispose des formules (1.17.1), et (1.17.2) ci-dessous (cette dernière nous servira pour obtenir le lemme (3.5.2) du théorème 3.1).

Remarques 1.10. Soit $\mathcal{C}_X$ (respectivement $\mathcal{C}'_X$) une $\mathcal{B}_X$-algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche telle que $\mathcal{B}_X \to \mathcal{C}_X$ (respectivement $\mathcal{B}_X \to \mathcal{C}'_X$) soit $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire. La structure produit tensoriel de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche sur la $\mathcal{B}_X$-algèbre $\mathcal{C}_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{C}'_X$ est compatible. On bénéficie de plus des morphismes d'algèbres $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéaires $\mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{C}'_X$ et $\mathcal{C}'_X \to \mathcal{C}_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{C}'_X$.

On dispose des deux propositions ci-dessous par horizontalité, i.e., via les stratifications.

PROPOSITION 1.11. *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à gauche et $\mathcal{M},\mathcal{N}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite. Les isomorphismes canoniques suivants sont $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéaires :*

$$(\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{G}), \tag{1.11.1}$$

$$(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{G}),\ \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}, \tag{1.11.2}$$

$$\mathrm{ev}\ :\ \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathcal{N}. \tag{1.11.3}$$

PROPOSITION 1.12. *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à gauche, $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche, $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite et $\mathcal{M}'$ un $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite.*

La structure canonique (voir la proposition 1.8) de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche sur $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche. De plus, les isomorphismes canoniques

$$(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{B}'_X}\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}',\ \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E},\mathcal{E}'), \tag{1.12.1}$$

$$\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E},\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F}) \tag{1.12.2}$$

sont $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéaires (et donc $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire pour le dernier). Par transport de structure, on munit ainsi $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}'$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ d'une structure canonique de $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche.

De même, on obtient une structure canonique de $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche (respectivement à droite) sur $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ (respectivement $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}'$, $\mathcal{M}'\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{M}')$).

PROPOSITION 1.13. *Soient $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite, $\mathcal{N}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-bimodule, $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche. On dispose des isomorphismes canoniques de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à droite :*

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{N})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{E} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{N}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{E}),\\ (\mathcal{M}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{N})\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E} &\xrightarrow{\sim} \mathcal{M}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}(\mathcal{N}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}).\end{aligned} \tag{1.13.1}$$

Le premier isomorphisme reste valable lorsque $\mathcal{M}$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche.

Démonstration. On se contente par analogie de vérifier le premier isomorphisme de (1.13.1). Établissons d'abord que l'isomorphisme canonique $\theta\ :\ (\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}$ est un isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à droite. Soient x, y, P des sections locales de respectivement $\mathcal{M}$, $\mathcal{E}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$. Il suffit de prouver la relation $\theta(((x\otimes 1)\otimes y)\cdot P)=(x\otimes\ y)\cdot P$. L'homomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à gauche $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}\to\mathcal{E}$ envoyant 1 sur y induit l'homomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à droite $\phi:\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}\to\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}$. Or, on vérifie par un calcul que l'image par ϕ de l'action de P pour la structure gauche de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à droite sur $(x\otimes 1)$ est égale à $\theta(((x\otimes 1)\otimes y)\cdot P)$. D'un autre côté, on obtient par $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéarité de ϕ que cette image est $(x\otimes y)\cdot P$. Il s'ensuit le cas général via les isomorphismes : $(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{N})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{E}\xleftarrow{\sim}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{N}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{N}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{E})$. □

Notations 1.14. Notons $\widetilde{\omega}_{X^\#}:=\mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_{X^\#}$, $\mathcal{B}_Y:=\mathcal{B}_X|Y$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_Y:=\mathcal{B}_Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{D}^{(m)}_Y$ et $\widetilde{\omega}_Y:=\mathcal{B}_Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\omega_Y$. Le faisceau $\widetilde{\omega}_{X^\#}$ est muni d'une structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite. En effet, Montagnon l'a déjà établi pour $\omega_{X^\#}$ de la manière suivante : on vérifie via les formules [Ber96b, 2.3.3.1] et [Ber00, 1.2.3] que $\omega_{X^\#}$ est un sous-$\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite de $j_*\omega_Y$. On en déduit alors une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite sur $\widetilde{\omega}_{X^\#}$ (voir la proposition 1.12).

Soit $\delta:\omega_Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{D}^{(m)}_Y\xrightarrow{\sim}\omega_Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{D}^{(m)}_Y$ l'isomorphisme de transposition (voir la proposition [Ber00, 1.3.3]). Par un calcul en coordonnées locales (voir la formule [Ber00, 1.3.1.1]), on obtient de plus les factorisations :

$$\begin{tikzcd}
\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#} \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, "\delta"', "\sim"] & \omega_{X^\#}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#} \arrow[r, hook] \arrow[d, dotted, "\delta_\#"', "\sim"] & j_*(\omega_Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{D}^{(m)}_Y) \arrow[d, "\delta"', "\sim"] \\
\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#} \arrow[r, hook] & \omega_{X^\#}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#} \arrow[r, hook] & j_*(\omega_Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{D}^{(m)}_Y)
\end{tikzcd} \tag{1.14.1}$$

Il découle de la proposition [Ber00, 1.3.3] que ces deux factorisations sont aussi les uniques involutions échangeant les deux structures de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-modules à droite respectives et vérifiant, pour toute section x de $\omega_{\mathfrak{X}}$ ou $\omega_{\mathfrak{X}^\#}$, $x\otimes 1\mapsto x\otimes 1$ (cela implique en particulier que ce sont bien des isomorphismes).

Si $t_1,\dots,t_d$ sont des coordonnées locales logarithmiques de $X^\#$ (avec les conventions de l'article), en identifiant ω_X et $\mathcal{O}_X$ (à $a\in\mathcal{O}_X$ correspond $a dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d$), l'isomorphisme δ induit une flèche : $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}\to\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$, envoyant un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$ sur son *adjoint* ${}^{\mathrm{t}}P$ (voir le § [Ber00, 1.2.2]). Pour tous P,Q de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$, ${}^{\mathrm{t}}(P\cdot Q)={}^{\mathrm{t}}Q\cdot{}^{\mathrm{t}}P$, ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}P)=P$ et la structure gauche (respectivement droite) de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite (via l'identification de ω_X et $\mathcal{O}_X$) sur $\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$ est donnée par la multiplication à gauche par l'adjoint (respectivement par la multiplication à droite).

De même, en identifiant $\omega_{X^\#}$ et $\mathcal{O}_X$ (via $a(dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d/t_1\cdots t_d)\leftrightarrow a\in\mathcal{O}_X$), l'isomorphisme $\delta_\#$ induit une flèche : $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}\to\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$, $P\mapsto\widetilde{P}$. Pour le différencier de l'adjoint, $\widetilde{P}$ sera appelé *adjoint logarithmique* de P. On calcule que $\widetilde{P}=t_1\cdots t_d\cdot{}^{\mathrm{t}}P\cdot(1/t_1\cdots t_d)$ (on remarque que ce dernier élément appartient bien à $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$).

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Pour tout $P=\sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}\in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$ avec $b_{\underline{k}}\in\mathcal{B}_X$, on définit plus généralement les adjoints et adjoints logarithmiques de P en posant ${}^{\mathrm{t}}P:=\sum_{\underline{k}}{}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}b_{\underline{k}}$ et $\widetilde{P}:=t_1\cdots t_d\cdot{}^{\mathrm{t}}P\cdot(1/t_1\cdots t_d)$.

1.15 Soit $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{M}$) un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche (respectivement à droite). Si $t_1,\dots,t_d$ sont des coordonnées locales logarithmiques de $X^\#$, dans l'expression $\widetilde{\omega}_{X^\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}$, en identifiant $\widetilde{\omega}_{X^\#}$ et $\mathcal{B}_X$ (à $b\in\mathcal{B}_X$ correspond $b(dt_1\wedge\cdots\wedge dt_d/t_1\cdots t_d)$), l'action à droite de $P\in\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$ sur $e\in\mathcal{E}$ est $\widetilde{P}.e$. En effet, par $\mathcal{B}_X$-linéarité, il suffit de le vérifier pour $P\in\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$. Or, via (1.12.1), $\widetilde{\omega}_{X^\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\omega_{X^\#}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}$. On utilise ensuite l'isomorphisme canonique $(\omega_{X^\#}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#})\otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\omega_{X^\#}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}$ de (1.13.1). On obtient la description analogue pour $\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}$ en échangeant $\widetilde{P}$ par ${}^{\mathrm{t}}P$.

En utilisant la formule [Ber00, 1.1.7.3], on calcule que l'isomorphisme canonique $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X,\omega_X)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_X$ est $\mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire (et donc $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire). Pour obtenir l'isomorphisme analogue avec des dièses, on utilise les inclusions $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_{X^\#},\omega_{X^\#})\hookrightarrow j_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\omega_Y,\omega_Y)$ et $\mathcal{O}_X\hookrightarrow j_*\mathcal{O}_Y$. Puis, on calcule que cela induit la $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéarité de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_{X^\#},\omega_{X^\#})\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_X$. Par (1.12.2), il en découle que l'isomorphisme canonique $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\omega}_{X^\#},\widetilde{\omega}_{X^\#})\xrightarrow{\sim}\mathcal{B}_X$ est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire.

Par (1.11.1), l'isomorphisme canonique $\widetilde{\omega}_{X^\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\omega}_{X^\#},\mathcal{M})\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}$ est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire. De plus, on dispose de l'isomorphisme canonique $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire : $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\omega}_{X^\#},\widetilde{\omega}_{X^\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}$ $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\omega}_{X^\#},\widetilde{\omega}_{X^\#})\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}$ (pour la linéarité, on vérifie que l'isomorphisme est horizontal). On bénéficie des isomorphismes similaires en remplaçant $\widetilde{\omega}_{X^\#}$ par $\widetilde{\omega}_X$. Il en dérive que les foncteurs $-\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\omega}^{-1}_{X^\#}$ et $\widetilde{\omega}_{X^\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}-$ (respectivement $-\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\omega}^{-1}_X$ et $\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}-$) induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à gauche et celle des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à droite.

On en déduit que, dans $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\omega}^{-1}_{X^\#}$, en identifiant comme précédemment $\widetilde{\omega}_{X^\#}$ et $\mathcal{B}_X$ l'action à gauche de $P\in\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$ sur $m\in\mathcal{M}$ est égale à $m\cdot\widetilde{P}$. On obtient une description analogue pour $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\omega}^{-1}_X$ en remplaçant $\widetilde{P}$ par ${}^{\mathrm{t}}P$. Ces structures sont appelées structures 'tordues'.

Lemme 1.16. *Les foncteurs quasi-inverses $-\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\omega}^{-1}_{X^\#}$ et $\widetilde{\omega}_{X^\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}-$ (respectivement $-\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\omega}^{-1}_X$ et $\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}-$) de § 1.15 sont exacts et induisent des équivalences entre la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules (respectivement cohérents, respectivement plats, respectivement localement projectifs de type fini) à gauche et celle des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules (respectivement cohérents, respectivement plats, respectivement localement projectifs de type fini) à droite.*

Démonstration. L'exactitude est triviale. En ce qui concerne la cohérence et la projectivité locale de type fini, il suffit d'utiliser les descriptions de § 1.15 sur les structures tordues (et de se rappeler que les flèches qui associent à un opérateur différentiel son adjoint ou adjoint logarithmique sont des isomorphismes). Enfin, pour la platitude, cela découle, pour tous $\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}$-module à gauche $\mathcal{E}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}$-module à droite $\mathcal{M}$, de l'isomorphisme canonique (voir la proposition [Vir00, I.2.2]) $\mathcal{M}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}(\omega_{X^\#}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega^{-1}_{X^\#})$, de même en remplaçant '$\omega_{X^\#}$' par 'ω_X'. □

Proposition 1.17. *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à gauche et $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite. Si $t_1,\dots,t_d$ sont des coordonnées locales logarithmiques de $X^\#$, pour tout $\underline{k}\in\mathbb{N}^d$, pour toutes sections $e\in\mathcal{E}$, $f\in\mathcal{F}$, $m\in\mathcal{M}$, la structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à gauche (respectivement*

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

à droite) sur $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}$) est caractérisée par la formule (1.17.1) *(respectivement* (1.17.2)*) ci-dessous :*

$$\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle}(e\otimes f)=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}e\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}f, \tag{1.17.1}$$

$$\begin{aligned}(m\otimes e)\underline{\widetilde{\partial}}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle}&=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}m\underline{\widetilde{\partial}}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}e,\ \ (m\otimes e){}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle}\\&=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}m{}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}e.\end{aligned} \tag{1.17.2}$$

Démonstration. La preuve de (1.17.1) est analogue à celle de la formule [Ber96b, 2.3.3.1]. On en déduit (1.17.2) par passage de gauche à droite (i.e., via les équivalences de catégories des notations 1.14) et via (1.11.2). □

Nous aurons besoin de la proposition suivante pour obtenir le lemme 6.2 qui nous permettra de prouver le théorème 6.3.

Proposition 1.18. *Soient $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X\#}^{(m)}$-module à gauche, $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}_{X\#}^{(m)}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}_{X\#}^{(m)}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}$ les faisceaux obtenus en calculant le produit tensoriel via respectivement la structure gauche et droite de $\mathcal{B}_X$-algèbre de $\widetilde{\mathcal{D}}_{X\#}^{(m)}$. Il existe un unique isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}_{X\#}^{(m)}$-bimodules $\gamma_{\mathcal{E}}\ :\ \widetilde{\mathcal{D}}_{X\#}^{(m)}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}_{X\#}^{(m)}$ tel que, pour toute section e de $\mathcal{E}$, $\gamma_{\mathcal{E}}(1\otimes e)=e\otimes 1$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle des propositions [Ber00, 1.3.1 et 1.3.2] : avec (l'analogue du) § [Ber00, 1.3.2.(d)], on se ramène au cas où $\mathcal{B}_X=\mathcal{O}_X$. L'homomorphisme $\gamma_{\mathcal{E}}$ est défini de manière unique via la formule $\gamma_{\mathcal{E}}(P\otimes e):=P(e\otimes 1)$, où $P\in\mathcal{D}_{X\#}^{(m)}$ et $e\in\mathcal{E}$. Vérifions à présent la $\mathcal{D}_{X\#}^{(m)}$-linéarité à droite. Il suffit d'établir, pour tout $\underline{k}\in\mathbb{N}^d$, $\gamma_{\mathcal{E}}((1\otimes e){}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle})=(e\otimes 1){}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle}(=e\otimes{}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle})$.

Par (1.17.2),

$$\gamma_{\mathcal{E}}((1\otimes e){}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle})=\gamma_{\mathcal{E}}\left(\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}{}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}e\right)=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}{}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}(\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}e\otimes 1).$$

Pour tout $\underline{h}\in\mathbb{N}^d$, on note $q_i^{(h_i)}$ le quotient de la division euclidienne de h_i par p^m et $\underline{q}^{(\underline{h})}!:=q_1^{(h_1)}!\cdots q_d^{(h_d)}!$. Grâce aux formules [Ber96b, 2.2.4.(ii) et (iv)], on calcule :

$$(-1)^{|\underline{h}|}{}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}=\underline{\partial}^{\langle\underline{h}\rangle}\underline{t}^{\underline{h}}=\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{h}}\underline{q}^{(\underline{h}-\underline{i})}!\left\{\frac{\underline{h}}{\underline{i}}\right\}\binom{\underline{h}}{\underline{i}}\underline{t}^{\underline{i}}\underline{\partial}^{\langle\underline{i}\rangle}=\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{h}}\underline{q}^{(\underline{h}-\underline{i})}!\left\{\frac{\underline{h}}{\underline{i}}\right\}\binom{\underline{h}}{\underline{i}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{i}\rangle}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathcal{E}}((1\otimes e){}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle})&=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{h}}(-1)^{|\underline{h}|}\underline{q}^{(\underline{h}-\underline{i})}!\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}\left\{\frac{\underline{h}}{\underline{i}}\right\}\binom{\underline{h}}{\underline{i}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{i}\rangle}(\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}e\otimes 1)\\&=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\sum_{\underline{i}\leqslant\underline{h}}\sum_{\underline{j}\leqslant\underline{i}}(-1)^{|\underline{h}|}\underline{q}^{(\underline{h}-\underline{i})}!\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}\left\{\frac{\underline{h}}{\underline{i}}\right\}\binom{\underline{h}}{\underline{i}}\left\{\frac{\underline{i}}{\underline{j}}\right\}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{i}-\underline{j}\rangle}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}e\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{j}\rangle}\\&=\sum_{\underline{j}\leqslant\underline{k}}\left(\sum_{\underline{j}\leqslant\underline{i}\leqslant\underline{h}\leqslant\underline{k}}(-1)^{|\underline{h}|}\underline{q}^{(\underline{h}-\underline{i})}!\left\{\frac{\underline{k}}{\underline{h}}\right\}\left\{\frac{\underline{h}}{\underline{i}}\right\}\binom{\underline{h}}{\underline{i}}\left\{\frac{\underline{i}}{\underline{j}}\right\}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{i}-\underline{j}\rangle}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}\right)e\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{j}\rangle}.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Pour conclure, il suffit alors d'établir la formule

$$\sum_{\underline{j}\leqslant\underline{i}\leqslant\underline{h}\leqslant\underline{k}}(-1)^{|\underline{h}|}\underline{q}^{(\underline{h}-\underline{i})}!\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\underline{h}\\ \underline{i}\end{matrix}\right\}\binom{\underline{h}}{\underline{i}}\left\{\begin{matrix}\underline{i}\\ \underline{j}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{i}-\underline{j}\rangle}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}=(-1)^{|\underline{k}|}\underline{q}^{(\underline{k}-\underline{j})}!\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{j}\end{matrix}\right\}\binom{\underline{k}}{\underline{j}}. \tag{1.18.1}$$

À cette fin, procédons comme suit. Lorsque $\mathcal{E}$ est égal à $\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}$ (pour éviter les confusions, on le note toujours $\mathcal{E}$), la vérification de la proposition est plus aisée car il suffit de faire un calcul local (via la formule [Ber00, 1.3.1.1]) pour constater que le morphisme de la proposition [Ber00, 1.3.1] se factorise de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E} & \hookrightarrow & j_*(\mathcal{D}_Y^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{E}|Y) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow\wr \\ \mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)} & \hookrightarrow & j_*(\mathcal{E}|Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{D}_Y^{(m)}) \end{array} \tag{1.18.2}$$

Cette factorisation envoie bien $1\otimes e$ sur $e\otimes 1$ et correspond donc (par unicité) au morphisme $\gamma_{\mathcal{E}}$ que l'on a défini en début de preuve. En reprenant les calculs déjà faits, comme $\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre, on obtient alors la formule (1.18.1) recherchée.

Il reste à vérifier que $\gamma_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme. Il suffit pour cela de construire de manière analogue l'unique morphisme de $\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}$-bimodules $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}\to\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}$ qui envoie, pour toute section e de $\mathcal{E}$, $e\otimes 1$ sur $1\otimes e$. □

PROPOSITION 1.19. *Soient $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$-module à droite, $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$ le faisceau obtenu en calculant le produit tensoriel via la structure gauche de $\mathcal{B}_X$-algèbre de $\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$. Il existe une unique involution de $\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$-bimodules à droite $\widetilde{\delta}_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$ échangeant les deux structures de $\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$-modules à droite et telle que, pour toute section m de $\mathcal{M}$, $\widetilde{\delta}_{\mathcal{M}}(m\otimes 1)=m\otimes 1$.*

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition 1.18 où on remplace la proposition [Ber00, 1.3.1] par la proposition [Ber00, 1.3.3]. □

1.20 De manière analogue à la proposition [Ber96b, 2.3.5], on bénéficie des formules caractérisant la structure d'anneau de $\mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}$: $(b\otimes 1)(1\otimes P)=b\otimes P$ pour tous $b\in\mathcal{B}_X$ et $P\in\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}$ et

$$(1\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle})(b\otimes 1)=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}b\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}. \tag{1.20.1}$$

On munit le faisceau $\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{B}_X$ d'une structure d'anneau via l'isomorphisme de transposition $\gamma_{\mathcal{B}_X}:\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{B}_X\xrightarrow{\sim}\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$. Pour tous $b\in\mathcal{B}_X$ et $P\in\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}$, on obtient les formules : $(P\otimes 1)(1\otimes b)=P\otimes b$ et

$$(1\otimes b)({}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}\rangle}\otimes 1)=\sum_{\underline{h}\leqslant\underline{k}}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}{}^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{k}-\underline{h}\rangle}\otimes\underline{\partial}_{\#}^{\langle\underline{h}\rangle}b. \tag{1.20.2}$$

Le morphisme canonique $\mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}\to\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{D}_{X^\#}^{(m)}$ est aussi un homomorphisme d'anneaux (cela se voit par exemple via la formule (1.20.1)). Soit $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{M}$) un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X^\#}^{(m)}$-module à gauche (respectivement à droite). On vérifie (e.g. via les formules (1.17.1), (1.20.1)

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

et (1.17.2) et (1.20.2)) que les homomorphismes canoniques

$$\begin{gathered}\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}' \to (\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E}', \\ \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{B}'_X \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X} (\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X)\end{gathered} \tag{1.20.3}$$

sont des isomorphismes $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéaires.

2. Cohérence et résolutions de Spencer

Le résultat principal de cette section (qui nous permettra d'obtenir le théorème 4.22) est la proposition 2.14. Cela correspond à l'analogue arithmétique du cas complexe des propositions [CN05, 1.2.3] ou [Cal99, 4.1.3, 4.2.1]. Nous procédons par analogie avec le cas complexe en utilisant des résolutions de Spencer afin d'obtenir le théorème 2.10.

2.1 Soit $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre commutative munie d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$-module à gauche compatible à sa structure de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre. Pour tout $i \geqslant 0$, on pose $\mathcal{B}_{X_i} = \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{m}^{i+1}\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$. De plus, sauf mention explicite du contraire, on supposera qu'il existe une base d'ouverts affines $\mathfrak{B}$ de X telle que :

- (a) pour tout $U \in \mathfrak{B}$, l'anneau $\Gamma(U, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}})$ est noethérien ;
- (b') pour tous $U, V \in \mathfrak{B}$ tels que $V \subset U$, l'homomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}) \to \Gamma(V, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}})$ est plat ;
- (b) pour tout $i \geqslant 0$, $\mathcal{B}_{X_i}$ est un $\mathcal{O}_{X_i}$-module quasi-cohérent et l'homomorphisme $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \to \varprojlim \mathcal{B}_{X_i}$ est un isomorphisme.

On remarque que la condition (b) implique (b'). D'après les sections [Ber96b, 3.1 et 3.3], on dispose alors de théorèmes de type A et B pour les faisceaux d'anneaux $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$. Par exemple, avec les notations de [Ber96b, 4.2.4.1], le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}(T, r)$ satisfait toutes ces conditions. Avec ces hypothèses supplémentaires, nous conservons les notations du chapitre 1.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{C}_X$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative munie d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre.*

- (i) *L'anneau gradué (associé à la filtration par l'ordre) $\mathrm{gr}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$ est un anneau commutatif. Si $X^\#$ est muni de coordonnées logarithmiques, la relation $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}_\# \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}_\# = \left\langle {\underline{k}+\underline{h} \atop \underline{k}} \right\rangle \underline{\partial}^{\langle \underline{k}+\underline{h}\rangle}_\#$ devient exacte dans $\mathrm{gr}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$.*
- (ii) *Si $X^\#$ est muni de coordonnées logarithmiques, le faisceau $\mathcal{C}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$ est engendré comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre par les opérateurs $\partial^{\langle p^j \rangle_{(m)}}_{\# i}$, où $1 \leqslant i \leqslant d$, $0 \leqslant j \leqslant m$, ces derniers commutant deux à deux.*
- (iii) *Pour tout ouvert affine $U \subset X$, l'homomorphisme canonique*

$$\Gamma(U, \mathcal{C}_X) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}) \to \Gamma(U, \mathcal{C}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}) \tag{2.2.1}$$

est un isomorphisme.
- (iv) *Si $\mathcal{C}_X$ satisfait la condition (a) de § 2.1 alors, pour tout ouvert affine $U \in \mathfrak{B}$, l'anneau $\Gamma(X^\#, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#})$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#, x}$ pour tout $x \in X^\#$) est noethérien à droite et à gauche.*
- (v) *Si $\mathcal{C}_X$ satisfait les conditions (a) et (b') de § 2.1 alors le faisceau d'anneaux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$ est cohérent à droite et à gauche.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Lorsque $\mathcal{C}_X = \mathcal{O}_X$, cela correspond à [Mon02, Propositions 2.3.1-2]. Autrement, on procède de manière identique aux preuves des propositions [Ber96b, 2.2.5], [Ber96b, 2.3.6] et [Ber96b, 3.1.2]. □

En définissant de manière analogue à la définition [Car06a, 2.2.3] la notion de bonne filtration (il suffit de rajouter des dièses et des tildes), on vérifie de manière analogue aux propositions [Car06a, 2.2.5, 6, 7, 8] le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 2.3. *Nous avons les résultats suivants.*

(i) *Un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module globalement de présentation finie admet une bonne filtration.*

(ii) *Un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module est cohérent si et seulement s'il admet localement de bonnes filtrations.*

(iii) *(Théorème A). Lorsque $X^\#$ est affine, les foncteurs $\mathcal{M} \mapsto \Gamma(X^\#, \mathcal{M})$ et $M \mapsto \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#} \otimes_{\Gamma(X^\#, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#})} M$ établissent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules globalement de présentation finie et celle des $\Gamma(X^\#, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#})$-modules de type fini.*

(iv) *(Théorème B). On suppose $X^\#$ affine et soit $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module globalement de présentation finie. Alors, pour tout entier $i \neq 0$, $H^i(X^\#, \mathcal{M}) = 0$.*

Remarques 2.4. Nous indiquons les remarques suivantes.

(i) Dans le cas où $X^\#$ est un log-schéma, les assertions (i), (iii), (iv) du théorème 2.3 restent valables en remplaçant l'hypothèse 'globalement de présentation finie' par 'cohérent'.

(ii) Ce chapitre reste valable en remplaçant les modules (à gauche) par des modules à droite.

Nous nous restreignons dans la suite de cette section au niveau 0 car les énoncés analogues ne sont plus valables pour un niveau m quelconque, e.g., les suites de Spencer ne sont plus exactes.

PROPOSITION 2.5. *Notons $\mathcal{T}_{X^\#} := (\Omega^1_{X^\#})^\vee$ le faisceau tangent de $X^\#$ et $\widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} = \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{T}_{X^\#}$. Il existe un homomorphisme canonique $\widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$ induisant un isomorphisme $\mathbb{S}(\widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$.*

Démonstration. Le cas où $X^\#$ est un log-schéma et $\mathcal{B}_X = \mathcal{O}_X$ a été vérifié par Montagnon via la proposition [Mon02, 5.1.1]. Le cas général se traite de la même façon. □

DÉFINITION 2.6. Soit $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$-module à gauche muni d'une filtration $\mathcal{E} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_s$ telle que $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#,r} \cdot \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_{r+s}$. De manière analogue à [Kas95, 1.6] ou à [Cal99, 3.1.1] dans le cas du coefficient constant, on définit un homomorphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$-linéaire

$$\epsilon \ : \ \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^r \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_{s-1} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^{r-1} \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_s. \tag{2.6.1}$$

On vérifie par un calcul que l'on obtient le complexe

$$0 \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^d \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_{s-d} \xrightarrow{\epsilon} \cdots \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^1 \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_{s-1} \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_s \to \mathcal{E} \to 0 \tag{2.6.2}$$

que l'on écrira $Sp^\bullet_{s,\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}}(\mathcal{E})$ et que l'on appellera 'première suite de Spencer de degré s de $\mathcal{E}$'.

Lorsque $\mathcal{E}$ est $\mathcal{B}_X$-cohérent, on le munit de la filtration constante et $Sp^\bullet_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}}(\mathcal{E})$ indique la première suite de Spencer associée.

Remarques 2.7. Avec les notations de la définition 2.6, on pose $\mathcal{M} := \widetilde{\omega}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$ et $\mathcal{M}_s := \widetilde{\omega}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_s$. On définit un homomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$-modules à droite $\mathcal{M}_{s-1} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^r \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \to \mathcal{M}_s \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^{r-1} \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$ en appliquant le foncteur $\widetilde{\omega}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} -$ à la définition 2.6.1 et par fonctorialité de l'isomorphisme de transposition $\delta_\# : \widetilde{\omega}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\omega}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$ (voir la proposition 1.19). On obtient alors un complexe noté $Sp^\bullet_{s,\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}}(\mathcal{M})$ et induisant par construction l'isomorphisme $\widetilde{\omega}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} Sp^\bullet_{s,\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} Sp^\bullet_{s,\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}}(\mathcal{M})$.

Théorème 2.8. *Avec les notations de la définition 2.6, supposons de plus que la filtration de $\mathcal{E}$ soit bonne. Alors, pour s suffisamment grand, $Sp^\bullet_{s,\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}}(\mathcal{E})$ est exacte.*

Démonstration. De manière analogue au début de la preuve de la proposition [Kas95, 1.6.1] (on utilise pour cela la proposition 2.2(i) pour vérifier que l'on obtient un complexe de Koszul), on établit par récurrence sur $s \geqslant 0$ l'exactitude de la suite :

$$\begin{aligned}0 \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} &\otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^d \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#,s-d} \\ &\xrightarrow{\epsilon} \cdots \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^1 \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#,s-1} \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#,s} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \to 0.\end{aligned} \tag{2.8.1}$$

On conclut alors de manière analogue à la fin de la preuve de [Kas95, 1.6.1]. □

2.9 En appliquant $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}} -$ à (2.6.2), on obtient :

$$\begin{aligned}0 \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} &\otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^d \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_{s-d} \\ &\xrightarrow{\epsilon} \cdots \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^1 \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_{s-1} \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}_s \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}} \mathcal{E} \to 0.\end{aligned} \tag{2.9.1}$$

Théorème 2.10. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$-module à gauche cohérent qui soit cohérent et plat sur $\mathcal{B}_X$. Le complexe $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}} Sp^\bullet_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}}(\mathcal{E})$ de (2.9.1) est acyclique.*

Démonstration. Il suffit de vérifier l'exactitude de la suite :

$$0 \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^d \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\epsilon} \cdots \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^1 \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}. \tag{2.10.1}$$

Comme $\mathcal{E}$ est plat sur $\mathcal{B}_X$, on obtient la filtration de (2.10.1) suivante pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X,n-d} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^d \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\epsilon} \cdots \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X,n-1} \otimes_{\mathcal{B}_X} \wedge^1 \widetilde{\mathcal{T}}_{X^\#} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X,n} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}. \tag{2.10.2}$$

D'après la preuve de la proposition [Cal99, 4.1.3], lorsque $\mathcal{E}$ est égal à $\mathcal{B}_X$, le gradué de la filtration (2.10.2) donne une suite exacte. De plus, on vérifie par un calcul immédiat que le gradué de la filtration (2.10.2) est canoniquement isomorphe au gradué de la filtration (2.10.2) lorsque $\mathcal{E}$ est égal à $\mathcal{B}_X$ tensorisé par $\mathcal{E}$ au-dessus de $\mathcal{B}_X$. Comme $\mathcal{E}$ est plat sur $\mathcal{B}_X$, ce gradué est donc une suite exacte. D'où l'exactitude de (2.10.1). □

Corollaire 2.11. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$-module à gauche cohérent qui soit cohérent et plat sur $\mathcal{B}_X$. L'homomorphisme canonique $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}} \mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}} \mathcal{E}$ est alors un isomorphisme.*

Démonstration. Cela découle des théorèmes 2.8 et 2.10. □

Remarques 2.12. D'après un contre-exemple de Noot-Huyghe, l'extension $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X}$ n'est pas plate. Le corollaire 2.11 n'est donc pas valable pour un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{X^\#}$-module à gauche cohérent quelconque.

2.13 Lorsque $X = \mathfrak{X}$, toutes les définitions et tous les résultats de cette section s'étendent en remplaçant $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$) par $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} := \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} := \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$). On obtient en particulier la proposition ci-après.

PROPOSITION 2.14. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent qui soit cohérent et plat sur $\mathcal{B}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. L'homomorphisme canonique $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}} \mathcal{E} \to \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ est alors un isomorphisme.*

3. Un isomorphisme d'associativité

Nous conservons les notations et hypothèses du chapitre 1. Nous prouvons dans cette section l'isomorphisme d' 'associativité' (3.1.1). Cela correspond à une variante p-adique du théorème [CN05, 2.3.4]. On obtient de manière analogue le théorème 3.6 (on remarque que l'appellation 'associativité' est plus adéquate pour le théorème 3.6). Enfin, on déduit de (3.1.1) l'isomorphisme (3.7.1) qui sera utilisé pour établir la proposition 5.16.

THÉORÈME 3.1. *Soient $\mathcal{E}^\#$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche et $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-module à droite. On dispose du morphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-modules à droite : $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}^\# \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E}^\#)$, envoyant, pour $m \in \mathcal{M}$ et $e \in \mathcal{E}^\#$, $m \otimes e$ sur $m \otimes (1 \otimes e)$. Le morphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-linéaire induit par extension :*

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}^\#) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E}^\#) \tag{3.1.1}$$

est un isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-modules à droite.

Démonstration. On pourra comparer avec la preuve du cas complexe donnée dans [CN05, A.1]. Le fait que la flèche (3.1.1) soit un isomorphisme est local. Supposons donc $X^\#$ muni de coordonnées locales logarithmiques $t_1, \ldots, t_d$ et conservons les notations de 1.1. Il s'agit de prouver que, pour tout $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-module à droite $\mathcal{N}$, pour tout morphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}$-linéaire $\alpha : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}^\# \to \mathcal{N}$, il existe un unique morphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-modules à droite $\beta : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E}^\#) \to \mathcal{N}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}^\# \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E}^\#) \arrow[r, dotted, "\exists!\beta"] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

Traitons d'abord l'unicité de β. Pour cela, on prouve par récurrence sur N que, pour tous $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}^\#$, $P \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,N}$, α détermine de façon unique l'élément $\beta(m \otimes (P \otimes e))$. Lorsque $N = 0$, on a forcément $\beta(m \otimes (b \otimes e)) = \alpha(mb \otimes e)$, pour $b \in \mathcal{B}_X$. Par linéarité, on peut supposer P de la forme $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$. La formule suivante que doit vérifier β (car β est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-linéaire et on utilise la formule [Car05, 1.1.24.1])

$$\beta(m \otimes (\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes e)) = (-1)^{|\underline{k}|} \left(\beta(m \otimes (1 \otimes e)) \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} - \sum_{\underline{h} \langle \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \beta(m \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle} \otimes (\underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} \otimes e)) \right)$$

nous permet de conclure la récurrence.

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Établissons à présent l'existence de β. Par récurrence sur N, on construit un morphisme de groupes $v_N : \mathcal{M} \times \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,N} \times \mathcal{E}^{\#} \to \mathcal{N}$ induisant v_{N-1} de la manière suivante : pour tous $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}^{\#}$, $b \in \mathcal{B}_X$, on pose $v_0(m, b, e) := \alpha(mb \otimes e)$. En supposant défini v_N, pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{k}| \leqslant N+1$, pour tous $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}^{\#}$, $b \in \mathcal{B}_X$, on pose

$$v_{N+1}(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}, e) := (-1)^{|\underline{k}|}\left(v_N(m, 1, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} - \sum_{\underline{h} < \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v_N(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}, e) \right). \tag{3.1.2}$$

Puis, pour tout $P = \sum_{\underline{r}} b_{\underline{r}} \underline{\partial}^{\langle \underline{r} \rangle} \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,N+1}$ où $b_{\underline{r}} \in \mathcal{B}_X$, on définit

$$v_{N+1}(m, P, e) := \sum_{\underline{r}} v_{N+1}(mb_{\underline{r}}, \underline{\partial}^{\langle \underline{r} \rangle}, e). \tag{3.1.3}$$

Si $P \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,N}$, on remarque que $v_{N+1}(m, P, e) = v_N(m, P, e)$. De plus, on vérifie que l'application v_{N+1} est un morphisme de groupes. Les morphismes v_N induisent alors le morphisme de groupes $v : \mathcal{M} \times \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X \times \mathcal{E}^{\#} \to \mathcal{N}$. Nous aurons besoin des lemmes ci-après.

Lemme 3.2. *Pour tous $b \in \mathcal{B}_X$, $P \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$, $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}^{\#}$, $v(m, P, e)b = v(mb, P, e) = v(m, bP, e)$.*

Démonstration. L'égalité de droite du lemme 3.2 résulte de (3.1.3). Par additivité, pour vérifier celle de gauche, on en déduit qu'il suffit d'établir que $\epsilon := v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}, e)b - v(mb, \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}, e)$ est nul. On procède par récurrence sur $N := |\underline{k}|$. On obtient par $\mathcal{B}_X$-linéarité de α : $v(m, 1, e)b = v(mb, 1, e)$. Supposons à présent la formule vraie pour $N-1$. Par (3.1.2) puis par hypothèse de récurrence, on calcule :

$$\begin{aligned} v(m, 1, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} b &= \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle}, e)b \\ &= (-1)^{|\underline{k}|}\epsilon + \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} b, \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle}, e). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

D'un autre côté, d'après la formule [Ber96b, 2.3.5.1], $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} b = \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \{ \begin{smallmatrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{smallmatrix} \} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}(b)\underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}$. D'où :

$$\begin{aligned} v(m, 1, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} b &= \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}(b), 1, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} \\ &= \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{h}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}(b)\underline{\partial}^{\langle \underline{h}-\underline{i} \rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle}, e) \qquad (\textit{via } (3.1.2)) \\ &= \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{h} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{k}-\underline{i} \\ \underline{k}-\underline{h} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}(b)\underline{\partial}^{\langle \underline{h}-\underline{i} \rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle}, e) \\ &= \sum_{\underline{i} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} b, \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle}, e). \qquad (\text{à nouveau via [Ber96b, 2.3.5.1]}) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

En comparant (3.2.1) et (3.2.2), on obtient $\epsilon = 0$. □

Lemme 3.3. *Pour tous $b \in \mathcal{B}_X$, $P \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$, $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}^{\#}$, $v(m, P, be) = v(m, Pb, e)$.*

Démonstration. Grâce au lemme 3.2, on se ramène au cas où P est de la forme $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}$, avec $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$. Il s'agit d'établir que $\epsilon := v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}, be) - v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} b, e)$ est nul. On procède par récurrence sur $N := |\underline{k}|$. Lorsque $N = 0$, c'est évident. Avec les formules [Car05, 1.1.24] et [Ber96b, 2.3.5.1], on calcule dans $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ (on prend par défaut la structure gauche de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite) :

$$(mb \otimes 1)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} = \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} mb\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}, \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}(m \otimes b)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} &= \sum_{\underline{r} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{r}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{r} \end{matrix} \right\} m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{r}\rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle} b \\ &= \sum_{\underline{r} \leqslant \underline{k},\, \underline{s} \leqslant \underline{r}} (-1)^{|\underline{r}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{r} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{matrix} \right\} m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{r}\rangle} \underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}(b) \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{s}\rangle}. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Comme $mb \otimes 1 = m \otimes b$ et que $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ est un $\mathcal{B}_X$-module (pour la structure gauche ou droite) libre de base les $\underline{\partial}^{\langle \underline{n}\rangle}$ avec $\underline{n}$ parcourant $\mathbb{N}^d$, il découle de (3.3.1) et (3.3.2) la relation dans $\mathcal{M} \times \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$:

$$\sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \left((-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} mb\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle} \right) = \sum_{\underline{r} \leqslant \underline{k},\, \underline{s} \leqslant \underline{r}} \left((-1)^{|\underline{r}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{r} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{matrix} \right\} m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{r}\rangle} \underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}(b), \underline{\partial}^{\langle \underline{s}\rangle} \right). \tag{3.3.3}$$

Par successivement (3.1.2), hypothèse de récurrence, la formule [Ber96b, 2.3.5.1] et le lemme 3.2, (3.3.3) puis (3.1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} v(m, 1, ae)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} &= \sum_{\underline{r} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{r}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{r} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{r}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}, be) \\ &= (-1)^{|\underline{k}|}\epsilon + \sum_{\underline{r} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{r}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{r} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{r}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle} b, e) \\ &= (-1)^{|\underline{k}|}\epsilon + \sum_{\underline{r} \leqslant \underline{k},\, \underline{s} \leqslant \underline{r}} (-1)^{|\underline{r}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{r} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{r}\rangle} \underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}(b), \underline{\partial}^{\langle \underline{s}\rangle}, e) \\ &= (-1)^{|\underline{k}|}\epsilon + \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v(mb\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}, e) \\ &= (-1)^{|\underline{k}|}\epsilon + v(mb, 1, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} \\ &= (-1)^{|\underline{k}|}\epsilon + v(m, 1, ae)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.4. *Pour tous $P \in \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$, $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}^{\#}$, $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, la formule suivante est validée :*

$$v(m, P, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} = \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle} P, e). \tag{3.4.1}$$

Démonstration. Comme P s'écrit sous la forme $\sum \underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle} b_{\underline{r}}$, où $b_{\underline{r}} \in \mathcal{B}_X$, par additivité et le lemme 3.3, on se ramène au cas où $P = \underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}$. Prouvons le lemme par récurrence sur $N := |\underline{r}|$. Pour $N = 0$, cela découle de (3.1.2). Supposons l'égalité validée pour N, prouvons-le pour $N + 1$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Par hypothèse de récurrence, on vérifie les égalités ci-dessous :

- $$\begin{aligned} v(m,1,e)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} &= (-1)^{|\underline{r}|}v(m,\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle},e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} \\ &\quad + \sum_{\underline{s}\langle \underline{r}}(-1)^{|\underline{s}|}\left\{\begin{matrix}\underline{r}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\}v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle},\underline{\partial}^{\langle \underline{s}\rangle},e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}, \\ &= (-1)^{|\underline{r}|}v(m,\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle},e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} \\ &\quad + \sum_{\underline{h}\leqslant \underline{k}}\sum_{\underline{s}\langle \underline{r}}(-1)^{|\underline{h}|+|\underline{s}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\left\langle\begin{matrix}\underline{h}+\underline{s}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\rangle\left\{\begin{matrix}\underline{r}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\}v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle},\underline{\partial}^{\langle \underline{h}+\underline{s}\rangle},e), \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

- $$\begin{aligned} v(m,1,e)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} &= \left\langle\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{k}\end{matrix}\right\rangle v(m,1,e)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}+\underline{k}\rangle} \\ &= \sum_{\underline{l}\leqslant \underline{r}+\underline{k}}(-1)^{|\underline{l}|}\left\langle\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{k}\end{matrix}\right\rangle\left\{\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{l}\end{matrix}\right\}v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}+\underline{k}-\underline{l}\rangle},\underline{\partial}^{\langle \underline{l}\rangle},e). \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

D'un autre côté, on calcule de même $(m\otimes 1)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\in \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ (on prend par défaut la structure gauche de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite) des deux différentes façons :

- $$\begin{aligned} (m\otimes 1)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} &= \sum_{\underline{s}\leqslant \underline{r}}(-1)^{|\underline{s}|}\left\{\begin{matrix}\underline{r}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\}(m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{s}\rangle})\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} \\ &= \sum_{\underline{h}\leqslant \underline{k}}\sum_{\underline{s}\leqslant \underline{r}}(-1)^{|\underline{h}|+|\underline{s}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\left\langle\begin{matrix}\underline{h}+\underline{s}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\rangle\left\{\begin{matrix}\underline{r}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\}m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{h}+\underline{s}\rangle}, \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

- $$\begin{aligned} (m\otimes 1)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} &= \left\langle\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{k}\end{matrix}\right\rangle(m\otimes 1)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}+\underline{k}\rangle} \\ &= \sum_{\underline{l}\leqslant \underline{r}+\underline{k}}(-1)^{|\underline{l}|}\left\langle\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{k}\end{matrix}\right\rangle\left\{\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{l}\end{matrix}\right\}m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}+\underline{k}-\underline{l}\rangle}\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{l}\rangle}. \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Il résulte de (3.4.4) et (3.4.5) l'égalité dans $\mathcal{M}\times\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{\underline{l}\leqslant \underline{r}+\underline{k}}\left((-1)^{|\underline{l}|}\left\langle\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{k}\end{matrix}\right\rangle\left\{\begin{matrix}\underline{r}+\underline{k}\\ \underline{l}\end{matrix}\right\}m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}+\underline{k}-\underline{l}\rangle},\underline{\partial}^{\langle \underline{l}\rangle}\right) \\ &\quad = \sum_{\underline{h}\leqslant \underline{k},\ \underline{s}\leqslant \underline{r}}\left((-1)^{|\underline{h}|+|\underline{s}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\left\langle\begin{matrix}\underline{h}+\underline{s}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\rangle\left\{\begin{matrix}\underline{r}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\}m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle},\underline{\partial}^{\langle \underline{h}+\underline{s}\rangle}\right). \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

On déduit de (3.4.6) et (3.4.3) la formule :

$$v(m,1,e)\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} = \sum_{\underline{h}\leqslant \underline{k}}\sum_{\underline{s}\leqslant \underline{r}}(-1)^{|\underline{h}|+|\underline{s}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\left\langle\begin{matrix}\underline{h}+\underline{s}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\rangle\left\{\begin{matrix}\underline{r}\\ \underline{s}\end{matrix}\right\}v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{r}-\underline{s}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle},\underline{\partial}^{\langle \underline{h}+\underline{s}\rangle},e). \tag{3.4.7}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Il résulte de (3.4.2) et (3.4.7)

$$(-1)^{|\underline{r}|} v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} = (-1)^{|\underline{r}|} \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}, e). \tag{3.4.8}$$

La formule (3.4.1) est donc vérifiée pour $P = \underline{\partial}^{\langle \underline{r}\rangle}$. □

Lemme 3.5. *Pour tous $P^{\#} \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$, $P \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$, $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}^{\#}$, $v(m, P, P^{\#}e) = v(m, PP^{\#}, e)$.*

Démonstration. Dans un premier temps, supposons $P = 1$, i.e., vérifions l'égalité $v(m, 1, P^{\#}e) = v(m, P^{\#}, e)$. Par récurrence sur $|\underline{k}|$, établissons d'abord la formule : $v(m, 1, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}e) = v(m, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}, e)$.

En multipliant dans l'égalité (3.4.1) par $t_1^{k_1} \cdots t_d^{k_d}$ et grâce au lemme 3.2, on obtient (avec $P = 1$) :

$$v(m, 1, e)^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle} = \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v(m^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{h}\rangle}, e). \tag{3.5.1}$$

Or, par $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-linéarité de α, il découle de (1.17.2) :

$$(\alpha(m \otimes e))^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle} = \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \alpha(m^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} \otimes \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{h}\rangle}e). \tag{3.5.2}$$

Par hypothèse de récurrence, pour tout $\underline{h} \langle \underline{k}$, $v(m^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{h}\rangle}, e) = v(m^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, 1, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{h}\rangle}e) = \alpha(m^{\mathrm{t}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} \otimes \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{h}\rangle}e)$. En comparant (3.5.1) et (3.5.2), on en conclut que

$$v(m, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}, e) = \alpha(m \otimes \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}e) = v(m, 1, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}e).$$

Enfin, si $P^{\#}$ est de la forme $\sum_{\underline{k}} b_{\underline{k}}\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}$, où $b_{\underline{k}} \in \mathcal{B}_X$, par linéarité de α, ce que l'on vient d'établir, puis le lemme 3.2, on obtient : $v(m, 1, P^{\#}e) = \sum_{\underline{k}} v(mb_{\underline{k}}, 1, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}e) = \sum_{\underline{k}} v(mb_{\underline{k}}, \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k}\rangle}, e) = v(m, P^{\#}, e)$.

Traitons à présent le cas général. Par le lemme 3.2, il suffit de vérifier le lemme 3.5 lorsque P est de la forme $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}$, avec $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$. Effectuons alors une récurrence sur l'entier $N := |\underline{k}|$. Pour $N = 0$, il s'agit de ce que l'on vient de prouver. Supposons le lemme vrai pour N et supposons $|\underline{k}| \leqslant N + 1$. D'après (3.1.2) :

$$v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}, P^{\#}e) = (-1)^{|\underline{k}|}\left(v(m, 1, P^{\#}e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} - \sum_{\underline{h} \langle \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}, P^{\#}e) \right). \tag{3.5.3}$$

De plus, il dérive de (3.4.1) la formule :

$$v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}P^{\#}, e) = (-1)^{|\underline{k}|}\left(v(m, P^{\#}, e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} - \sum_{\underline{h} \langle \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} v(m\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}, \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}P^{\#}, e) \right). \tag{3.5.4}$$

Via (3.5.3), (3.5.4) et par hypothèses de récurrence, on établit $v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}, P^{\#}e) = v(m, \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}P^{\#}, e)$. □

Concluons maintenant la preuve du théorème. Il dérive des lemmes 3.2 et 3.5 que le morphisme v induit un morphisme de $\mathcal{B}_X$-modules $\beta : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}} \mathcal{E}^{\#}) \to \mathcal{N}$. Enfin, il résulte des formules (3.4.1) et de [Car05, 1.1.24.1] que β est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-linéaire. □

Théorème 3.6. *Soient $\mathcal{E}^{\#}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à gauche et $\mathcal{F}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-module à gauche. On dispose du morphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-modules à gauche $\mathcal{E}^{\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F}\to(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{E}^{\#})\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F}$, envoyant $e\otimes f$ sur $(1\otimes e)\otimes f$ où $e\in\mathcal{E}^{\#}$, $f\in\mathcal{F}$. Le morphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-linéaire induit par extension :*

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}(\mathcal{E}^{\#}\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F})\to(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{E}^{\#})\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F}\tag{3.6.1}$$

est un isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-modules à gauche.

Démonstration. On procède de façon analogue au théorème 3.1. □

Remarques 3.7. Soient $\mathcal{E}^{\#}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à gauche, $\mathcal{F}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-module à gauche (respectivement un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-bimodule). Il découle du théorème 3.1 l'isomorphisme canonique $(\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}^{\#})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}\xrightarrow{\sim}\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{E}^{\#})$. En lui appliquant le foncteur $-\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}}\mathcal{F}$, cela donne : $(\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}^{\#})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{F}\xrightarrow{\sim}[\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{E}^{\#})]\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}}\mathcal{F}$. L'isomorphisme de transposition $\delta:\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}\xrightarrow{\sim}\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$, qui échange les deux structures de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-modules à droite, induit par fonctorialité $[(\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{E}^{\#}]\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}}\mathcal{F}\xrightarrow{\sim}(\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{E}^{\#}$. On obtient par composition l'isomorphisme de groupes (respectivement de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}$-modules à droite) :

$$(\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}^{\#})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{F}\xrightarrow{\sim}(\widetilde{\omega}_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{F})\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X^{\#}}}\mathcal{E}^{\#}.\tag{3.7.1}$$

Remarques 3.8. Soit $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre commutative vérifiant les hypothèses de § 2.1. Le faisceau $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$ est cohérent (voir § 4.1). Soient $\mathcal{E}^{\#}$ un $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$-module à gauche cohérent, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module à gauche cohérent (respectivement un $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-bimodule cohérent).

De manière analogue au lemme 1.16, on vérifie que les foncteurs $-\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}\widetilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}^{\#}}$ et $\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}^{\#}}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}-$ (respectivement $-\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}\widetilde{\omega}^{-1}_{\mathfrak{X}}$ et $\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}-$) induisent des équivalences quasi-inverses exactes entre la catégorie des $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$-modules (respectivement cohérents, respectivement plats, respectivement localement projectifs de type fini) à gauche et celle des $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$-modules (respectivement cohérents, respectivement plats, respectivement localement projectifs de type fini) à droite. On obtient alors par extension (comme pour le théorème 3.1) l'homomorphisme de $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents à droite :

$$(\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}^{\#})\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}}\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}\to\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}}\mathcal{E}^{\#}),$$

défini pour $x\in\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}}$, $e\in\mathcal{E}^{\#}$ par $(x\otimes e)\otimes 1\mapsto x\otimes(1\otimes e)$. Celui-ci est en fait un isomorphisme puisqu'il l'est modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$. On en déduit comme pour (3.7.1) l'isomorphisme canonique de groupes (respectivement de $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-modules à droite) :

$$(\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}^{\#})\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}}\mathcal{F}\xrightarrow{\sim}\widetilde{\omega}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}}\mathcal{E}^{\#}).\tag{3.8.1}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

4. Log-isocristaux surconvergents

4.1 On garde les notations et hypothèses de § 2.1. Nous sommes ainsi dans le contexte de la section [Ber96b, 3.3] en prenant (avec ses notations) pour anneau $\mathcal{D} := \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$. On obtient en particulier la cohérence de son complété p-adique, noté $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$ ainsi que des théorèmes de type A et B pour les $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$-modules cohérents à gauche ou à droite (pour plus de précisions, voir la section [Ber96b, 3.3]). De même, il découle de la section [Ber96b, 3.4] la cohérence de $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$ ainsi que des théorèmes de type A et B pour les $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$-modules cohérents à gauche ou à droite. Le théorème suivant correspond à l'analogue logarithmique du théorème de platitude [Ber96b, 3.5.3] de Berthelot.

THÉORÈME 4.2. *Soit $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre vérifiant les conditions de § 2.1 pour $m+1$. L'homomorphisme canonique $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \to \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$ est plat à droite et à gauche.*

Démonstration. La preuve est identique à celle de [Ber96b, 3.5.3]. Nous allons toutefois rappeler les points fondamentaux de la preuve de Berthelot. On se contentera de mettre en exergue les propriétés fondamentales des faisceaux utilisés (e.g. $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$) qui permettent de reprendre les calculs de Berthelot que nous ne referons pas (pour ceux-ci, on se reportera à la preuve de [Ber96b, 3.5.3]).

On se contente de prouver la platitude à gauche. L'assertion est locale. On peut donc supposer $\mathfrak{X}$ affine et muni de coordonnées locales logarithmiques $t_1, \ldots, t_d$. On note $D^{(m)} := \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\widehat{D}^{(m)}$ son complété p-adique et de même pour $m+1$. Il suffit de prouver que l'extension $\widehat{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}} \to \widehat{D}^{(m+1)}_{\mathbb{Q}}$ est plate. Avec les notations de 1.1 et en utilisant par exemple l'isomorphisme (2.2.1), $D^{(m)}$ est un $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}})$-module libre de base $\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ avec $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, ce qui donne aussi une description simple de son complété p-adique (de même pour $m+1$). Avec les arguments de la preuve de [Ber96b, 3.5.3] (qui fonctionne toujours grâce à la proposition 2.2), on peut en outre supposer $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ sans p-torsion.

Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, pour tout $i = 1, \ldots, d$, posons $k_i = p^m q^{(m)}_{k_i} + r^{(m)}_{k_i} = p^{m+1} q^{(m+1)}_{k_i} + r^{(m+1)}_{k_i}$, avec $0 \leqslant r^{(m)}_{k_i} \langle p^m$, $0 \leqslant r^{(m+1)}_{k_i} \langle p^{m+1}$. Alors, $\underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} = (q^{(m)}_{\underline{k}}!/q^{(m+1)}_{\underline{k}}!) \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+1)}}$. Ainsi, $\widehat{D}^{(m)}$ et $D^{(m+1)}$ sont canoniquement inclus dans $\widehat{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}$. Notons alors D' le sous-groupe de $\widehat{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ engendré par $\widehat{D}^{(m)}$ et $D^{(m+1)}$. En reprenant les calculs de Berthelot, on obtient alors que D' est en fait un sous-anneau de $\widehat{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}$, que $\widehat{D}^{(m+1)} = \widehat{D}'$ et $\widehat{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}} = D'_{\mathbb{Q}}$. Pour terminer la preuve, il suffit donc d'établir que D' est noethérien (car cela implique que $\widehat{D}'$ est plat à droite et à gauche sur D' et donc de même avec l'indice $\mathbb{Q}$).

D'après la proposition 2.2(ii), $D^{(m)}$ est engendré comme $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{B}_{\mathfrak{X}})$-algèbre par les opérateurs $\partial_{\# i}^{\langle p^j \rangle_{(m)}}$, où $1 \leqslant i \leqslant d$, $0 \leqslant j \leqslant m$, ces derniers commutant deux à deux (de même pour $m+1$). On en déduit que D' est engendré en tant que $\widehat{D}^{(m)}$-module à gauche par les éléments de la forme $(\underline{\partial}_{\#}^{\langle p^{m+1} \rangle_{(m)}})^{\underline{q}}$, pour $\underline{q} \in \mathbb{N}^d$ (cela a un sens via [Mon02, Lemme 2.3.4]). En utilisant (1.7.1), on vérifie comme Berthelot que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, pour tout $P \in \widehat{D}^{(m)}$, on a :

$$[(\partial_{\# i}^{\langle p^{m+1} \rangle_{(m)}})^r, P] \in \sum_{s \langle r} \widehat{D}^{(m)} (\partial_{\# i}^{\langle p^{m+1} \rangle_{(m)}})^s.$$

On en déduit alors de manière identique à Berthelot que D' est noethérien. □

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Théorème 4.3. *Soient T un diviseur de X_0, $m' \geqslant m$, r (respectivement r') un multiple de p^{m+1} (respectivement $p^{m'+1}$). Avec les notations du § [Ber96b, 4.2.4], $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}(T,r)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}(T,r')\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}$ est plat à droite et à gauche.*

Démonstration. Via le théorème 4.2, cela se vérifie de façon identique à la preuve du théorème [Ber96b, 4.3.5] (dont les étapes clés sont les mêmes que celle du théorème 4.2). □

4.4 Soit T un diviseur de X_0. On définit le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)$ des 'opérateurs différentiels de niveau fini sur $\mathfrak{X}^{\#}$ à singularités surconvergentes le long de T' en posant $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T) := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{X}}(T,p^{m+1})\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$. Lorsque le diviseur $\mathcal{Z}$ est vide, on retrouve $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)$ (voir la définition [Ber96b, 4.2.5.3]).

Théorème 4.5. *Soit T un diviseur de X_0. Le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ est cohérent. On bénéficie de théorèmes de type A et B pour les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à droite ou à gauche.*

Démonstration. Via la section [Ber96b, 3.6], cela découle du théorème 4.3. □

Remarques 4.6. Par contre, on ignore si $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}$ (et *a fortiori* $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)$) est cohérent.

Théorème 4.7. *Soient T un diviseur de X_0, $\mathfrak{U}^{\#}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}^{\#}$ complémentaire de T, $j : \mathfrak{U}^{\#} \subset \mathfrak{X}^{\#}$ l'inclusion canonique. L'homomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \to j_*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{U}^{\#},\mathbb{Q}}$ est fidèlement plat à droite et à gauche.*

Démonstration. Il s'agit de reprendre la preuve du théorème [Ber96b, 4.3.10.2]. □

De manière analogue aux propositions [Ber96b, 4.3.11 et 4.3.12], on déduit du théorème 4.7 la proposition ci-après.

Proposition 4.8. *Avec les notations du théorème 4.7, pour qu'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent soit nul, il faut et il suffit que sa restriction à $\mathfrak{U}^{\#}$ soit nulle.*

Par commodité, on s'intéressera dans un premier temps au cas des log-isocristaux convergents puis dans un second temps à celui des log-isocristaux surconvergents. Via l'équivalence de catégories de Berthelot ([Ber] ou le théorème [Car06b, 2.2.12] pour la version publiée), la définition suivante correspond à celle de Kedlaya dans [Ked07b, 6.3.1] (d'après la proposition [Ked07b, 6.4.1], cette notion est équivalente à celle de A. Shiho). Avec le théorème 4.15, nous retrouvons la description classique des log-isocristaux convergents en terme de log-$\mathcal{D}$-module arithmétique.

Définition 4.9. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}$-module cohérent qui soit localement projectif et de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. On dit que $\mathcal{E}$ est un log-isocristal convergent sur $\mathfrak{X}^{\#}$ si la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}|_{\mathcal{Y}}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module cohérent.

Remarques 4.10. Si on voulait calquer la définition [Ked07b, 6.3.1], on aurait dû remplacer 'la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}|_{\mathcal{Y}}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}$-module cohérent' par la condition apparemment (voir les théorèmes qui suivent) plus forte 'la structure de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent'.

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

LEMME 4.11. *On suppose $\mathfrak{X}^{\#}$ affine et muni de coordonnées logarithmiques locales $t_1, \ldots, t_d \in M(\mathcal{Z})$. On pose alors $\underline{\partial}_{\#}^{[\underline{k}]} := \underline{\partial}_{\#}^{\langle \underline{k} \rangle_{(0)}} / \underline{k}! = \underline{t}^{\underline{k}} \underline{\partial}^{[\underline{k}]}$. Soit $\mathcal{E}$ un log-isocristal convergent sur $\mathfrak{X}^{\#}$. Pour toute section $e \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{E})$, tout $0 \leqslant \eta \langle 1$, on a $\|\underline{\partial}_{\#}^{[\underline{k}]} e\| \eta^{|\underline{k}|} \to 0$ pour $|\underline{k}| \to \infty$.*

Démonstration. Via la formule [Mon02, Lemme 2.3.3.(c)], cela est une réécriture de la proposition [Ked07b, 6.3.4]. □

PROPOSITION 4.12. *Soient $\mathcal{E}$ un log-isocristal convergent sur $\mathfrak{X}^{\#}$ et $m \in \mathbb{N}$ un entier. Il existe alors un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)}$-module $\mathring{\mathcal{E}}$, cohérent sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}^{(m)}$-linéaire $\mathring{\mathcal{E}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$.*

Démonstration. Supposons $\mathfrak{X}^{\#}$ muni de coordonnées locales logarithmiques $t_1, \ldots, t_d$. Avec les notations 1.1, il suffit de reprendre les calculs de la preuve de la proposition [Ber90, 3.1.2] (ou [Ber96b, 4.4.7]) en remplaçant [Ber90, 3.0.1.1] par le lemme 4.11, $\underline{\tau}^{\underline{k}}$ par $\underline{\tau}_{\#}^{\underline{k}}$ et $\underline{\partial}^{\underline{k}}$ (respectivement $\underline{\partial}_{\#}^{\underline{k}}$). □

PROPOSITION 4.13. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)}$-module, cohérent en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module.*

(i) *Si $\mathfrak{X}$ est affine alors $\mathcal{E}$ est globalement de présentation finie sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)}$.*

(ii) *Le faisceau $\mathcal{E}$ est cohérent sur $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)}$.*

(iii) *L'homomorphisme canonique $\mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)}} \mathcal{E}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On vérifie (i) en reprenant la preuve de [Ber90, 3.1.3.(i)]. Cela implique aussitôt (ii). Traitons à présent (iii). Comme $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, il est canoniquement isomorphe à son complété p-adique. Or, comme $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)}$-module cohérent (d'après ce que l'on vient de prouver), son complété p-adique est canoniquement isomorphe à $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#}}^{(m)}} \mathcal{E}$. D'où le résultat. □

De manière analogue à la proposition [Ber90, 3.1.4], il découle des propositions 4.12 et 4.13 la proposition suivante.

PROPOSITION 4.14. *Soient $\mathcal{E}$ un log-isocristal convergent sur $\mathfrak{X}^{\#}$ et $m \in \mathbb{N}$ un entier. Les homomorphismes canoniques $\mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \to \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ sont des isomorphismes.*

THÉORÈME 4.15. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}$-module cohérent localement projectif et de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. Le faisceau $\mathcal{E}$ est un log-isocristal convergent sur $\mathfrak{X}^{\#}$ si et seulement si sa structure de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}$-module se prolonge (de façon unique) en une structure de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module cohérent.*

Démonstration. Comme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}^{\dagger}|\mathcal{Y} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}^{\dagger}$, la condition est suffisante. La réciproque découle de la proposition 4.14 et de la cohérence de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}^{\dagger}$. □

Traitons à présent le cas des log-isocristaux surconvergents. Dans la suite de cette section, T sera un diviseur de X_0.

DÉFINITION 4.16. Un log-isocristal (ou simplement isocristal) sur $\mathfrak{X}^{\#}$ surconvergent le long de T est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$, localement projectif et de type fini sur

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ et tel que $\mathcal{E}|\mathcal{Y}$ soit un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}}({}^\dagger T\cap Y)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent, i.e., $\mathcal{E}|\mathcal{Y}$ est associé à un isocristal sur $Y_0\setminus T$ surconvergent le long de $Y_0\cap T$.

4.17 Soit $\mathcal{E}$ un isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Notons $\mathcal{E}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Comme la catégorie des isocristaux sur $Y_0\setminus T$ surconvergent le long de $Y_0\cap T$ est stable par dualité, on en déduit que $\mathcal{E}^\vee$ est un isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. De même, la catégorie des isocristaux sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T est stable par le bifoncteur $-\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} -$.

Lemme 4.18. *On suppose $\mathfrak{X}^\#$ affine, muni de coordonnées logarithmiques locales $t_1,\ldots,t_d\in M(\mathcal{Z})$ et qu'il existe un relèvement $f\in\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ d'une équation locale de T dans X. Soit $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Notons $\mathfrak{X}_K$ l'espace analytique rigide de $\mathfrak{X}$ au sens de Raynaud, $\mathrm{sp}:\mathfrak{X}_K\to\mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation, $U_\lambda := \{x\in\mathfrak{X}_K \mid |f(x)|\geqslant\lambda\}$ et $E:=\mathrm{sp}^*(\mathcal{E})$. Pour tout $0\leqslant\eta<1$, il existe $0\leqslant\lambda_\eta<1$ tel que, pour tout $\lambda_\eta\leqslant\lambda<1$ et toute section $e\in\Gamma(U_\lambda,E)$, on ait*

$$\|\underline{\partial}_{\#}^{[\underline{k}]}e\|\,\eta^{|\underline{k}|}\to 0\quad \textit{pour } |\underline{k}|\to\infty. \tag{4.18.1}$$

Démonstration. Par hypothèse, $E|\mathcal{Y}_K$ est un isocristal sur $Y_0\setminus T$ surconvergent le long de $Y_0\cap T$, i.e., (4.18.1) est vrai sans dièses en remplaçant U_λ par $U_\lambda\cap\mathcal{Y}_K$. On procède alors de manière analogue à [Ked07b, 6.3.4]. □

Théorème 4.19. *Soit $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Alors $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent.*

Démonstration. Via la formule (4.18.1), il s'agit de reprendre la preuve du théorème [Ber96b, 4.4.12]. □

Remarques 4.20. D'après le théorème 4.19, un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent, localement projectif et de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$.

Proposition 4.21. *Soient $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. L'homomorphisme canonique $\mathcal{E}\to\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. En reprenant les arguments de la preuve de [Ber90, 3.1.3.(i)] (en effet, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est à section noethérienne sur les ouverts affines et on dispose de théorèmes de type A et B pour les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents), on vérifie que $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent. Ainsi, $\mathcal{E}\to\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$ est un homomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Par la proposition 4.14, cet homomorphisme est un isomorphisme en dehors de T. On conclut ensuite via la proposition 4.8. □

Théorème 4.22. *Soit $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Le morphisme canonique*

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\to\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E} \tag{4.22.1}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Par la proposition 4.8, il suffit de le vérifier lorsque T est vide. Il résulte de la proposition 2.14 que le morphisme canonique

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\to\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}}\mathcal{E} \tag{4.22.2}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

est un isomorphisme. Puisque les extensions $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}$ sont plates, il en résulte que le morphisme canonique

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}} (\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}} (\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \tag{4.22.3}$$

est un isomorphisme. On conclut via l'isomorphisme de droite de la proposition 4.14. □

5. Sur l'holonomie des log-isocristaux surconvergents

Le but de cette section est d'établir le théorème 5.24. La première partie du théorème est une conséquence du théorème 4.22 (qui découle de la proposition 2.14). La seconde partie du théorème 5.24 (ou aussi la proposition 5.16) correspond en quelque sorte (modulo le twist '$(\mathcal{Z})$') à un isomorphisme de dualité relative (logarithmique) au morphisme canonique $\mathfrak{X}^{\#} \to \mathfrak{X}$. Il se prouve de façon analogue au cas complexe de la proposition [CN05, 3.1.2] en utilisant l'isomorphisme d'associativité du théorème 3.1 (ou plus précisément l'isomorphisme (3.7.1) induit).

Notations 5.1. On définit des $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-modules à gauche en posant :

$$\mathcal{O}_X(Z) := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \omega_{X^{\#}}), \quad \mathcal{O}_X(-Z) := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega^{\#}_X, \omega_X). \tag{5.1.1}$$

En tant que $\mathcal{O}_X$-module, le faisceau $\mathcal{O}_X(Z)$ correspond à l'$\mathcal{O}_X$-module localement engendré par les inverses d'une équation locale de Z dans X, ce qui justifie la notation. On aurait aussi pu remarquer $\mathcal{O}_X(Z)$ est un sous-$\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à gauche de $j_*\mathcal{O}_Y$. Via la formule [Ber00, 1.1.7.3], on calcule que ces deux structures de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-module sur $\mathcal{O}_X(Z)$ sont identiques.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on en déduit des $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-modules à gauche en posant :

$$\mathcal{O}_X(nZ) := \mathcal{O}_X(Z)^{\otimes n} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_X(-nZ) := \mathcal{O}_X(-Z)^{\otimes n},$$

où $\otimes n$ signifie que l'on tensorise n-fois en tant que $\mathcal{O}_X$-module. En évaluant deux fois, on obtient (voir (1.11.1)) l'isomorphisme $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-linéaire :

$$\omega_{X^{\#}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-Z) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(Z) \xrightarrow{\sim} \omega_{X^{\#}}.$$

D'où : $\mathcal{O}_X(-Z) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$. Pour tous $n, n' \in \mathbb{Z}$, les isomorphismes canoniques $\mathcal{O}_X(nZ) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n'Z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X((n+n')Z)$ sont donc $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-linéaires.

Si $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{M}$) est un $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à gauche (respectivement à droite) et $n \in \mathbb{Z}$, on définit un $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-module à gauche (respectivement à droite) en posant $\mathcal{E}(nZ) := \mathcal{O}_X(nZ) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{M}(nZ) := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nZ)$).

D'après § 1.20, on dispose de l'isomorphe de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$-bimodules dit de transposition $\gamma_{\mathcal{O}_X(Z)}$: $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nZ) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(nZ) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$. Par (1.17.1), on vérifie alors la formule

$$\gamma_{\mathcal{O}_X(nZ)}(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}_{\#} \otimes e) = \sum_{\underline{h} \leqslant \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h} \rangle}_{\#} e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}_{\#}.$$

Avec la proposition [Ber96b, 2.2.4.(iv)], il en résulte que le composé

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nZ) \underset{\gamma_{\mathcal{O}_X(nZ)}}{\xrightarrow{\sim}} \mathcal{O}_X(nZ) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}} \subset j_*\mathcal{D}^{(m)}_Y$$

est égal à l'inclusion canonique $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nZ) \subset j_*\mathcal{D}^{(m)}_Y$. On notera alors sans ambiguïté $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}(nZ)$ pour $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(nZ)$ ou $\mathcal{O}_X(nZ) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X^{\#}}$. On remarque que ni $\mathcal{O}_X(nZ)$ ni

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}(nZ)$ sont des faisceaux d'anneaux. Par la proposition 1.13, on bénéficie de l'isomorphisme canonique : $\mathcal{E}(nZ) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}(nZ) \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E}$ et $\mathcal{M}(nZ) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}(nZ)$. Il en découle les isomorphismes :

$$\mathcal{M}(nZ) \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}(nZ) \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}} \mathcal{E}(nZ). \tag{5.1.2}$$

Lemme 5.2. *Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à gauche et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-module à droite. On dispose des isomorphismes canoniques $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéaires suivants :*

$$\mathrm{ev} \;:\; \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(Z) \xrightarrow{\sim} \omega_{X^\#}, \quad \mathrm{ev} \;:\; \omega_{X^\#} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-Z) \xrightarrow{\sim} \omega_X, \tag{5.2.1}$$

$$\mathrm{ev}\otimes \mathrm{Id} \;:\; \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}(Z) \xrightarrow{\sim} \omega_{X^\#} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E},$$

$$\mathrm{ev}\otimes \mathrm{Id} \;:\; \omega_{X^\#} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}(-Z) \xrightarrow{\sim} \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}, \tag{5.2.2}$$

$$\mathcal{E}(Z) \xrightarrow{\sim} (\omega_{X^\#} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, \quad \mathcal{E}(-Z) \xrightarrow{\sim} (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X^\#}^{-1}, \tag{5.2.3}$$

$$\mathcal{M}(Z) \xrightarrow{\sim} \omega_{X^\#} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}), \quad \mathcal{M}(-Z) \xrightarrow{\sim} \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X^\#}^{-1}). \tag{5.2.4}$$

Démonstration. La $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-linéarité de (5.2.1) découle de (1.11.3). Par la proposition 1.11, il en dérive (5.2.2). Via § 1.15, il en résulte les autres isomorphismes de $\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$-modules. □

Notations 5.3. On désigne par $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$ l'un des faisceaux d'anneaux $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$. De même en enlevant les dièses.

5.4 On dispose pour tout entier n de l'isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}$-bimodules dit de transposition $\gamma_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})} : \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(n\mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(n\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$. En effet, on le sait déjà lorsque $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} = \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}$. Les autres cas s'en déduisent par tensorisation par $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z}$, complétion p-adique et passage à la limite inductive sur le niveau. Soient $\mathcal{E}$ (respectivement $\mathcal{M}$) un $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$-module à gauche (respectivement à droite). Avec les notations analogues aux notations 5.1, en reprenant la construction de (5.1.2), on obtient l'isomorphisme canonique fonctoriel $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}(n\mathcal{Z}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}(n\mathcal{Z}). \tag{5.4.1}$$

De même, le lemme 5.2 s'étend naturellement en remplaçant '$\mathcal{D}^{(m)}_{X^\#}$' par '$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$'. Les références relatives au lemme 5.2 pourront abusivement concerner ces extensions.

5.5 Par la proposition 2.5, on vérifie avec les arguments habituels (e.g. [Ber00, 4.4.3]) que $\mathcal{D}^{(0)}_{X_0^\#}$, $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$ sont de dimension homologique finie. De plus, en reprenant le début de la preuve de [Ber00, 4.4.4] et en y remplaçant [Ber00, 4.4.3] par [Mon02, 5.3.1], on vérifie que si $\mathfrak{X}$ est affine alors l'anneau $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#})$ est de dimension homologique finie. Il en résulte que $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}})$ et $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}})$ sont de dimension homologique finie lorsque $\mathfrak{X}$ est affine (car un $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}})$-module cohérent provient par extension d'un $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}})$-module cohérent qui lui provient d'un $\Gamma(\mathfrak{X}, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#})$-module cohérent, de plus ces extensions sont plates). Via les théorèmes de type A, il

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

en résulte que les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$ sont de dimension homologique finie. Comme $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$ est en outre cohérent, on obtient ainsi $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}) = D_{\mathrm{parf}}({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$.

Lorsque $i \geqslant 1$, comme S_i n'est pas régulier, les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i^\#}$ ne sont pas de dimension homologique finie. J'ignore ce qu'il en est lorsque $m \neq 0$ de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$ et, lorsque $\mathcal{Z}$ et T sont non vides, de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ (lorsque $\mathcal{Z}$ est vide, c'est bien le cas d'après [Noo07]).

DÉFINITION 5.6. Soient $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$. On définit *les duaux $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$-linéaires* de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{M}$ en posant

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{E}) &= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}[d_X],\\ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{M}) &= \omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\mathcal{M}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})[d_X].\end{aligned} \tag{5.6.1}$$

Par § 5.5, ces foncteurs duaux stabilisent donc $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$. De plus, on vérifie comme Virrion (voir [Vir00]) l'isomorphisme de bidualité $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ (de même pour $\mathcal{M}$). Nous verrons cependant que l'isomorphisme de dualité relative au morphisme canonique $\mathfrak{X}^\# \to \mathfrak{X}$ nécessite d'utiliser un twist (voir la proposition 5.16).

5.7 Il résulte des équivalences de catégories de § 1.15 que, pour tous $\mathcal{E} \in D({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\mathcal{M} \in D^+(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$, on a

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\mathcal{E}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}), \tag{5.7.1}$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\mathcal{M}, \omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}). \tag{5.7.2}$$

D'où : $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{E})$ et $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}$. On dispose de même des isomorphismes (5.7.1) et (5.7.2) où '$\omega_{\mathfrak{X}^\#}$' est remplacé par '$\omega_{\mathfrak{X}}$'.

Notations 5.8. On note $u : \mathfrak{X}^\# \to \mathfrak{X}$ le morphisme canonique et $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}^\#} := \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$ vu comme $(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$-bimodule. Par (5.2.4), $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}^\#}$ est canoniquement isomorphe à $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \overset{\mathrm{d}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}})$, ce qui justifie la notation. On pourrait aussi désigner par $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\# \to \mathfrak{X}} := \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}$ vu comme $(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})$-bimodule, mais cela ne sert qu'à alourdir les notations.

DÉFINITION 5.9. Pour tous $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$, on définit respectivement l'*image directe* par u de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ en posant :

$$u^{\mathrm{g}}_+(\mathcal{E}) := \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}^\#} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}, \quad u^{\mathrm{d}}_+(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}. \tag{5.9.1}$$

Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira u_+ pour u^{g}_+ ou u^{d}_+.

LEMME 5.10. *Soient $\mathcal{E} \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\mathcal{M} \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$. On dispose d'un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}).$$

Démonstration. Avec § 1.15, on vérifie que l'on est bien dans le contexte de [Vir00, I.2.2]. □

PROPOSITION 5.11. *Pour tous $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$, on bénéficie des isomorphismes canoniques :*

$$u^{\mathrm{d}}_+(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} u^{\mathrm{g}}_+(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}), \quad \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} u^{\mathrm{g}}_+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u^{\mathrm{d}}_+(\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}). \tag{5.11.1}$$

De plus, $u^{\mathrm{g}}_+(\mathcal{E}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$ et $u^{\mathrm{d}}_+(\mathcal{M}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On construit l'isomorphisme de gauche de (5.11.1) comme suit :

$$u_+^{\mathrm{d}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1} \xrightarrow[5.10]{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}^\#} \overset{\mathrm{g}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}^\#}^{-1})$$
$$\xrightarrow[\delta]{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}^\#} \overset{\mathrm{d}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}^\#}^{-1}) \xrightarrow[(5.2.4)]{\sim} u_+^{\mathrm{g}}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}^\#}^{-1}),$$

les symboles 'g' et 'd' signifiant respectivement que pour calculer le produit tensoriel on choisit la structure gauche et droite de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}$-module à gauche de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1}$. On en déduit par passage de gauche à droite (i.e., via les équivalences de catégories de § 1.15) l'isomorphisme de droite de (5.11.1). Concernant la dernière assertion, il s'agit d'établir la préservation de la perfection (voir § 5.5). Le cas des modules à droite est immédiat. Comme les structures tordues préservent l'exactitude et la projectivité locale de type fini (cela découle du lemme 1.16), elles préservent aussi les complexes parfaits. Le cas à gauche résulte alors de (5.11.1). □

Définition 5.12. Grâce à la proposition 5.11, pour tout $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, l'*image directe extraordinaire* par u de $\mathcal{G}$ est définie en posant : $u_!(\mathcal{G}) := \mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ u_+ \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{G}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$. Pour préciser qu'il s'agit de module à gauche ou à droite, on écrira $u_!^{\mathrm{g}}$ ou $u_!^{\mathrm{d}}$ pour $u_!$.

Proposition 5.13. *Pour tous $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$, on bénéficie des isomorphismes canoniques :*

$$u_!^{\mathrm{g}}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}^\#}^{-1}) \xrightarrow{\sim} u_!^{\mathrm{d}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1}, \quad \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} u_!^{\mathrm{g}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u_!^{\mathrm{d}}(\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}). \tag{5.13.1}$$

Démonstration. Cela provient par composition de § 5.7 et la proposition 5.11. □

Proposition 5.14. *Pour tous $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$, on dispose des isomorphismes canoniques :*

$$u_!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}, \quad u_!(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}). \tag{5.14.1}$$

Démonstration. Par définition, $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ u_+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}((\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1})[d]$. En notant δ l'isomorphisme de transposition $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1}$ (voir la section [Ber00, 1.3]), on obtient les isomorphismes de $(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$-bimodules :

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z}) \xrightarrow[(5.2.4)]{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes^{\mathrm{d}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1}) \xrightarrow[\delta]{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1}, \tag{5.14.2}$$

le symbole 'd' signifiant que pour calculer le produit tensoriel on choisit la structure droite de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}$-module à gauche de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1}$. Via la version sans dièse de (5.7.2), on en déduit le premier isomorphisme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ u_+(\mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}((\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}) \overset{\mathrm{g}}{\otimes}{}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}, \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1})[d] \\
&\xrightarrow[\delta]{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}((\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}) \overset{\mathrm{g}}{\otimes}{}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})[d] \\
&\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}((\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}) \overset{\mathrm{g}}{\otimes}{}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})[d] \\
&\xrightarrow[\delta_\#]{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})[d] \\
&\xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}}(\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})[d] \\
&\xrightarrow[\delta \circ (5.7.1)]{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

D'où, par bidualité, le premier isomorphisme de (5.14.1). Afin d'établir le second, on peut supposer $\mathcal{M} = \omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}$. On obtient :

$$\begin{aligned} u_!(\mathcal{M}) &\xrightarrow[(5.13.1)]{\sim} \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} u_!(\mathcal{E}) \xrightarrow[(5.14.1)]{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E} \xrightarrow[\delta]{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}) \overset{\mathrm{g}}{\otimes}{}^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E} \\ &\xrightarrow[5.10]{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} ((\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}) \overset{\mathrm{g}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}^\#}) \\ &\xrightarrow[(5.2.3)]{\sim} \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(-\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}). \end{aligned} \tag{5.14.3}$$

□

LEMME 5.15. *Soient $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$ et $\mathcal{M} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}{}^d)$. On dispose des isomorphismes canoniques :*

$$u_+(\mathcal{M}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} u_+(\mathcal{M} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}),\ \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} u_+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u_+(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}). \tag{5.15.1}$$

De même en remplaçant l'image directe par l'image directe extraordinaire.

Démonstration. Comme le foncteur dual commute à l'extension des scalaires (voir par exemple [Vir00]), il suffit de traiter le cas de l'image directe. Le premier isomorphisme (5.15.1) est immédiat tandis que le seconde se construit comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} u_+(\mathcal{E}) &= \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} ((\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}) \\ &\xrightarrow[(1.13.1)]{\sim} (\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E} \\ &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E} \\ &= u_+(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}). \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 5.16. *On dispose, pour tout $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#})$, de l'isomorphisme canonique :*

$$u_+(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u_!(\mathcal{E}(\mathcal{Z})). \tag{5.16.1}$$

Démonstration. D'après la proposition [Ber96b, 3.6.2.(ii)] (respectivement [Ber96b, 3.4.5]), un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$-module cohérent (respectivement $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$-module cohérent) provient par extension d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$-module cohérent (respectivement $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$-module cohérent). Par le lemme 5.15, il suffit alors de traiter le cas où $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^{(0)}$ ou celui où $\widetilde{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$. La preuve du second cas étant la même (on remplace (3.7.1) par (3.8.1)), contentons-nous d'étudier le premier. Avec (5.11.1) et (5.13.1), il suffit de traiter le cas à gauche (i.e. $* = g$). Soient $\mathcal{P}$ une résolution de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ par des $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-bimodules plats et $\mathcal{P}^\#$ une résolution de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}$-modules à gauche plats. On dispose alors des isomorphismes :

$$\begin{aligned} (\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}} \xleftarrow{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{P}^\#) \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{P} &\xrightarrow[\sim]{(3.7.1)} (\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{P}) \overset{\mathrm{g}}{\otimes}_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{P}^\# \\ &\xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}) \overset{\mathrm{g}}{\otimes}_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{P}^\# \xrightarrow[\sim]{\delta} \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{P}^\#) \\ &\xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{E}). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Ainsi, $u_+(\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} u_!(\mathcal{E})$. En lui appliquant $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1}$, il en résulte, via lemme 5.2, (5.11.1), l'isomorphisme : $u_+(\mathcal{E}(-\mathcal{Z})) \xrightarrow{\sim} u_!(\mathcal{E})$. □

Notations 5.17. Soit T un diviseur de X_0. De manière analogue à la définition 5.6, on définit le dual $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire (respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire) des complexes parfaits de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules (respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules) que l'on notera $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}$ (respectivement $\mathbb{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,T}$ ou si aucune confusion n'est à craindre $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}$).

Remarquons que comme on ne sait pas *a priori* si $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est de dimension homologique finie, pour utiliser les isomorphismes standards concernant les faisceaux d'homomorphismes, il faut travailler avec des complexes parfaits à la place de complexes à cohomologie bornée et cohérente. Par exemple, pour obtenir le premier isomorphisme (5.14.1), nous avons utilisé la perfection de $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}$. La proposition suivante donne un exemple de tels complexes.

Proposition 5.18. *Soient T un diviseur de X_0, $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Alors $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. Nous avons vu au cours de la preuve de la proposition 4.21 que $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent. D'après la proposition [Ber96b, 3.6.2], il existe un entier m_0 suffisamment grand tel que $\mathcal{E}$ provienne par extension d'un $\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}^{(m_0)}$. La proposition étant locale, on peut supposer $\mathcal{E}^{(m_0)}$ muni d'une bonne filtration. D'après le théorème 2.8 et § 2.13, pour s assez grand, la première suite de Spencer $Sp^\bullet_{s,\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m_0)})$ est exacte. Comme l'extension $\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est plate, il en résulte que la suite $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}} Sp^\bullet_{s,\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(m_0)})$ est exacte. Comme $\mathcal{E}$ est localement projectif de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$, on remarque que cette suite donne une résolution finie de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules localement projectifs de type fini. Donc, $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Puisque l'extension $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ est plate, avec la proposition 4.21, on en déduit que $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. □

Définition 5.19. Soit T un diviseur de X_0. En s'inspirant de [Vir00, III.4.2], si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent, on dira que $\mathcal{E}$ est '$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonome' si, pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E})) = 0$. De même pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules à droite cohérents.

Lorsque la log-structure est triviale, T est vide et $\mathcal{E}$ est muni d'une structure de Frobenius, nous retrouvons la notion d'holonomie de Berthelot (d'après le théorème [Vir00, III.4.2]).

Lemme 5.20. *Soit T un diviseur de X_0. On désigne par $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$ l'un des faisceaux d'anneaux $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}$ (respectivement $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, respectivement $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$). Notons $\omega_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T) := \omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)$.*

(i) *Le morphisme canonique $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \to \omega_{\mathfrak{X}^\#}$ (respectivement $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \to \omega_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, respectivement $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \to \omega_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$) induit un quasi-isomorphisme $\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}[d] \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#}$ (respectivement $\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}[d] \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$, respectivement $\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}[d] \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$).*

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

(ii) *On dispose des isomorphismes canoniques :* $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Traitons d'abord le cas non-respectif. De manière analogue à la proposition [Ber00, 4.1.1], on obtient un quasi-isomorphisme : $\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}[d] \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#}$. En lui appliquant le foncteur exact $- \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}$, on en déduit (i) via l'isomorphisme canonique $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#}$.

Il découle du théorème 2.8 que la suite de Spencer

$$0 \to \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \wedge^d \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^\#} \xrightarrow{\epsilon} \cdots \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \wedge^1 \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^\#} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to 0 \tag{5.20.1}$$

est exacte. En lui appliquant le foncteur exact $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} -$, on obtient la suite exacte :

$$0 \to \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \wedge^d \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^\#} \xrightarrow{\epsilon} \cdots \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \wedge^1 \mathcal{T}_{\mathfrak{X}^\#} \xrightarrow{\epsilon} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \to 0. \tag{5.20.2}$$

Cela implique : $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}})[d] \xrightarrow{\sim} \Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}^\#}[d] \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#}$. On conclut par passage de gauche à droite.

Abordons à présent les autres cas. On déduit des isomorphismes $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#}$ pour m variable le suivant $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$. De même pour les autres anneaux. On traite alors les autres cas de même que le premier. □

Théorème 5.21. *Soient T un diviseur de X_0, $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Avec les notations de 4.17, on dispose des isomorphismes $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire et respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire : $\mathcal{E}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E})$. Le faisceau $\mathcal{E}$ est donc $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonome (voir la définition 5.19).*

Démonstration. Avec le lemme 5.20(ii), on établit le premier isomorphisme de manière analogue à [Car05, 2.2.1]. Or, $\mathcal{E}^\vee$ est toujours un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Comme le foncteur dual commute à l'extension des scalaires (e.g. voir [Vir00]), l'isomorphisme canonique $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ est le même où $\mathcal{E}$ est remplacé par $\mathcal{E}^\vee$ (la proposition 4.21) nous permettent de conclure. □

Définition 5.22. Soient T un diviseur de X_0 et $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. On définit l'image directe (à singularités surconvergentes le long de T) de $\mathcal{F}$ par u en posant $u_{T,+}(\mathcal{F}) := \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F}$, où $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X} \leftarrow \mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} := \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$ vu comme $(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$-bimodule.

On définit l'image directe extraordinaire (à singularités surconvergentes le long de T) de $\mathcal{F}$ par u en posant $u_{T,!}(\mathcal{F}) := \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ u_{T,+} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{F})$. Lorsque le diviseur T est vide, on omet de l'indiquer dans les opérations cohomologiques.

Lemme 5.23. *Soient T un diviseur de X_0 et $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Alors, $u_{T,+}(\mathcal{F}) \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, $u_{T,!}(\mathcal{F}) \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Comme la perfection est stable par dualité, il suffit de traiter le cas de l'image directe. De manière analogue à la proposition 5.11, on établit l'isomorphisme canonique :

$$u_{T,+}(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} ((\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}}.$$

On déduit de § 1.15 que le foncteur $\omega_{\mathfrak{X}^\#} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} -$ (respectivement $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}}$) préserve la $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-perfection (respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-perfection). D'où $u_{T,+}(\mathcal{F}) \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. □

Théorème 5.24. *Soient T un diviseur de X_0, $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T.*

(i) *Pour tout $l \neq 0$,*

$$\mathcal{H}^l(u_{T,+}(\mathcal{E})) = 0, \quad \mathcal{H}^l(u_{T,!}(\mathcal{E})) = 0. \tag{5.24.1}$$

(ii) *On dispose des isomorphismes $u_{T,+}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u_{T,!}(\mathcal{E}(\mathcal{Z})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z})$.*

(iii) *Les faisceaux $u_{T,+}(\mathcal{E})$ et $u_{T,!}(\mathcal{E})$ sont $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonomes (voir la définition 5.19).*

Démonstration. Par la proposition 4.8 et le lemme 5.23, pour établir (5.24.1), il suffit de traiter le cas où T est vide. Pour éviter les confusions, notons $\mathcal{G}$ le faisceau $\mathcal{E}$ vu comme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}$-module à gauche. Par (5.14.1) et la proposition 2.14, pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(u_!(\mathcal{G})) = 0$. Il en résulte via la proposition 5.16 que, pour tout $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(u_+(\mathcal{G})) = 0$. On conclut alors la première assertion grâce à la proposition 4.14 et le lemme 5.15.

Comme $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ (voir la proposition 5.18), en reprenant la preuve de la proposition 5.14, on obtient l'isomorphisme : $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ u_{T,+}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E})$. Comme celui-ci est encore valable pour $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E})$ à la place de $\mathcal{E}$ et que $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$, il en découle : $u_{T,!}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ (et donc pour $\mathcal{E}(\mathcal{Z})$ à la place de $\mathcal{E}$). D'où le deuxième isomorphisme de ii via (5.24.1). Le premier s'établit de manière analogue à celle de la proposition 5.16.

Passons à la dernière assertion. Il découle de (5.24.1) et du théorème 5.21 que, pour tout entier $l \neq 0$, $\mathcal{H}^l(u_{T,!}\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{E})) = 0$. Comme $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}} \circ u_{T,+}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} u_{T,!} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#}(\mathcal{E})$, il en résulte que $u_{T,+}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-holonome. L'holonomie se préservant par dualité (voir [Vir00] lorsque T est vide mais le cas général s'en déduit grâce à la proposition [Ber96b, 4.3.12.(ii)]), il en dérive celle de $u_{T,!}(\mathcal{E})$. □

6. Comparaison entre complexes de de Rham non logarithmique et logarithmique

Le but de cette section est d'abord de comparer les complexes de de Rham non logarithmique et logarithmique via le théorème 6.3 et son corollaire 6.7, ce qui correspond à l'analogue arithmétique du théorème [CN05, 4.1]. Puis, nous établissons le théorème 6.11 : pour tout isocristal $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{X}$ surconvergent le long d'un diviseur T de X_0, le morphisme canonique $\rho_{\mathcal{E}} : u_{T,+}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}({}^\dagger Z)$ est un isomorphisme. Notons que ce morphisme est une variante arithmétique de celui de la section [CN05, 4]. Enfin, lorsque $\mathcal{E}$ est un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T, nous conjecturons (voir la conjecture 6.14) que ce morphisme canonique est encore un isomorphisme modulo quelques conditions sur les exposants de la connexion. Cette conjecture sera établie via le théorème [CT08, 2.2.9] lorsque le diviseur T_0 est vide. Notons qu'un ingrédient clé de la preuve de [CT08, 2.2.9] est le théorème 6.11 (ou plus exactement la version [CT08, 2.5]) qui permet de jouer sur le diviseur. Le théorème 6.11 (via la proposition

[CT08, 2.5]) et le théorème 5.24 sont aussi des points techniques utilisés dans la preuve de la surholonomie des F-isocristaux surconvergents sur les variétés lisses du théorème [CT08, 2.3.12] (voir respectivement l'étape I.2 et l'étape II de la preuve du théorème [CT08, 2.3.12]).

Notations 6.1. Soient T un diviseur de X_0, $\mathfrak{U}^\#$ l'ouvert de $\mathfrak{X}^\#$ complémentaire de T, $\mathcal{E}$ un log-isocristal sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergent le long de T. Dans cette section, Z désigne Z_0 et f le morphisme structural $\mathfrak{X} \to \S$.

Lemme 6.2. *Soient $\mathcal{M} \in D^-(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}{}^d)$, $\mathcal{F} \in D^-({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. On dispose de l'isomorphisme canonique*

$$\mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} (\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathcal{Z})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{F}. \tag{6.2.1}$$

Démonstration. De manière analogue à § 5.4, on dispose de l'isomorphisme de transposition $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$. En résolvant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ platement, on construit l'isomorphisme (6.2.1) comme celui de (5.4.1). □

Théorème 6.3. *On bénéficie de l'isomorphisme canonique dans $D(f^{-1}\mathcal{O}_\S)$:*

$$\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \Omega^\bullet_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} u_{T,+}(\mathcal{E}).$$

Démonstration. On dispose des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E} &\xrightarrow{\sim} (\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E} \\
&\underset{5.20(\mathrm{i})}{\xrightarrow{\sim}} \omega_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}({}^\dagger T) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}[-d] \\
&\underset{(5.2.2)}{\xrightarrow{\sim}} (\omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathcal{Z})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}[-d] \\
&\underset{(6.2.1)}{\xrightarrow{\sim}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z})[-d] \\
&\underset{5.24(\mathrm{ii})}{\xrightarrow{\sim}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger T) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} u_{T,+}(\mathcal{E})[-d] \\
&\underset{5.20(\mathrm{i})}{\xrightarrow{\sim}} \Omega^\bullet_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} u_{T,+}(\mathcal{E}).
\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

□

Remarques 6.4. On obtient une seconde preuve du théorème 6.3 via les isomorphismes ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}, \mathcal{E}) \\
&\quad\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E}), \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})) \\
&\quad\underset{5.20(\mathrm{ii})}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \\
&\quad\underset{5.24(\mathrm{ii})}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(u_{T,!} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \\
&\quad\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}), \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ u_{T,!} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E})) \\
&\quad\underset{5.20(\mathrm{ii})}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}, \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T} \circ u_{T,!} \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}^\#,T}(\mathcal{E})) \\
&\quad\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}, u_{T,+}(\mathcal{E})),
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme résultant de l'isomorphisme de bidualité.

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Lemme 6.5. *Le morphisme canonique* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\to\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$ *est un isomorphisme. Ainsi,* $\mathcal{E}({}^\dagger Z):=\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$ *est l'isocristal sur* $Y_0\cap U_0$ *surconvergent le long de* $T\cup Z$ *associé à* $\mathcal{E}$ *(via l'équivalence de catégories de Berthelot énoncée dans [Car06b, 2.2.12]).*

Démonstration. L'isocristal sur $Y_0\cap U_0$ surconvergent le long de $T\cup Z$ associé à $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$. De plus, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent dont la restriction sur $\mathcal{Y}\cap\mathfrak{U}$ est isomorphe à $\mathcal{E}|\mathcal{Y}\cap\mathfrak{U}$, qui est $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}\cap\mathfrak{U},\mathbb{Q}}$-cohérent. D'après un théorème de Berthelot (voir [Car06b, 2.2.12]), il en résulte que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$ est $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}$-cohérent. Comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\to\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z\cup T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents qui est un isomorphisme sur $\mathcal{Y}\cap\mathfrak{U}$, il dérive de la proposition [Ber96b, 4.3.12] que celui-ci est un isomorphisme. □

6.6 De manière analogue à (5.4.1), on dispose de l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}(\mathcal{Z})\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z})\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}.$$

Il en résulte ensuite par extension l'homomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}\mathcal{E}(\mathcal{Z})\to\mathcal{E}({}^\dagger Z)$. Par le théorème 5.24(ii), ce dernier est canoniquement isomorphe à un homomorphisme de la forme $\rho_{\mathcal{E}}:u_{T,+}(\mathcal{E})\to\mathcal{E}({}^\dagger Z)$.

Lorsque $\mathcal{Z}$ est vide, on remarque que $\rho_{\mathcal{E}}$ est l'identité de $\mathcal{E}$. Plus généralement, le théorème 6.11 et la remarque 6.13 ci-dessous donnent des exemples de cas où l'homomorphisme $\rho_{\mathcal{E}}$ est un isomorphisme. Énonçons d'abord les conséquences immédiates du fait que $\rho_{\mathcal{E}}$ soit un isomorphisme via la proposition suivante.

Proposition 6.7. *Si l'homomorphisme* $\rho_{\mathcal{E}}:u_{T,+}(\mathcal{E})\to\mathcal{E}({}^\dagger Z)$ *est un isomorphisme, alors* $\mathcal{E}({}^\dagger Z)$ *est un* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$*-module holonome et on dispose de l'isomorphisme canonique dans* $D(f^{-1}\mathcal{O}_{\S})$ *:*

$$\Omega^\bullet_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\Omega^\bullet_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}({}^\dagger Z).$$

Avant d'établir le théorème 6.11, nous aurons besoin des trois lemmes suivants.

Lemme 6.8. *Le morphisme canonique* $\rho_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}:u_{T,+}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}})\to\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T\cup Z)_{\mathbb{Q}}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme $\rho_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}}$ est un morphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents (pour le second terme, voir [Ber96a]), par la proposition [Ber96b, 4.3.12], on se ramène à supposer T vide. L'assertion étant locale, supposons qu'il existe des coordonnées locales logarithmiques $t_1,\dots,t_d$ telles que $\mathcal{Z}=V(t_1\cdots t_s)$ (rappelons que par convention, $t_{s+1},\dots,t_d$ sont inversibles). Avec les notations de 1.1, on obtient la suite exacte :

$$(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}})^d\xrightarrow{\psi}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}\xrightarrow{\phi}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})_{\mathbb{Q}}\to 0,\tag{6.8.1}$$

où $\phi(P)=P\cdot(1/t_1\cdots t_s)$ et $\psi(P_1,\dots,P_d)=\sum_{i=1}^s P_i\partial_i t_i+\sum_{i=s+1}^d P_i\partial_i$. Il résulte alors de la suite exacte [Ber90, 4.3.2.1] que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$. On conclut grâce à la proposition 4.14. □

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Lemme 6.9. *Soit* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ *une* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$*-algèbre commutative munie d'une structure de* $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$*-module à gauche compatible à sa structure de* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$*-algèbre vérifiant les conditions de* § 2.1*. On pose* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z}) = \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$.

Le faisceau $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$ *est alors* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$*-cohérent. Plus précisément, s'il existe des coordonnées locales logarithmiques* $t_1, \ldots, t_d$ *telles que* $\mathcal{Z} = V(t_1 \cdots t_s)$*, alors* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$*, où* $\mathcal{I}$ *est l'idéal à gauche engendré par* ${}^{\mathrm{t}}\partial^{\langle p^j \rangle_{(m)}}_{\#,i}$*, avec* $i = 1, \ldots, s$*,* $j = 1, \ldots, m$ *et par* $\partial^{\langle p^j \rangle_{(m)}}_{i}$*, avec* $i = s+1, \ldots, d$*,* $j = 1, \ldots, m$.

Démonstration. L'assertion étant locale, supposons qu'il existe des coordonnées locales logarithmiques $t_1, \ldots, t_d$ telles que $\mathcal{Z} = V(t_1 \cdots t_s)$. Le morphisme $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#} \to \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$ défini par $P \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#} \mapsto P \cdot (1/t_1 \cdots t_s)$ induit l'isomorphisme $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$. En effet, un élément P de $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{\underline{k} \geqslant 0} b_{\underline{k}}\, {}^{\mathrm{t}}\partial^{\langle k_1 \rangle}_{\#,1} \cdots {}^{\mathrm{t}}\partial^{\langle k_s \rangle}_{\#,s} \partial^{\langle k_{s+1} \rangle}_{s+1} \cdots \partial^{\langle k_d \rangle}_{d}$, où $b_{\underline{k}} \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ tend vers 0 lorsque $|\underline{k}|$ tend vers l'infini. On calcule que $P \cdot (1/t_1 \cdots t_s) = 0$ si et seulement si $b_0 = 0$. Enfin, de manière analogue à la proposition 2.2(ii)), on vérifie que cet idéal est engendré par les éléments décrits ci-dessous. □

Lemme 6.10. *Avec les notations et hypothèses du lemme* 6.9*, soient* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$*-module qui soit cohérent sur* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$ *et* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent. Le faisceau* $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F}$ *est alors muni d'une structure de* $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent.*

Démonstration. On dispose des isomorphismes $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-linéaires :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F} &\underset{(1.13.1)}{\xrightarrow{\sim}} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})) \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F} \\
&\xrightarrow{\sim} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})) \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F} \\
&\underset{(1.13.1)}{\xrightarrow{\sim}} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})) \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F}. \qquad (6.10.1)
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ (respectivement $(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}$) est un $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module à droite (respectivement à gauche) cohérent, il est p-adiquement séparé et complet. On en déduit par complétion l'isomorphisme de $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-bimodules de transposition : $(\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$. Cela implique que $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ est un $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module à gauche cohérent. Via les théorèmes de type A pour les $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, on en déduit que $(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}}} (\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})) \otimes_{\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F}$ est un $\mathcal{B}_{\mathfrak{X}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. On conclut alors avec (6.10.1). □

Théorème 6.11. *On suppose que* $\mathcal{E}$ *est en fait un isocristal sur* $\mathfrak{X}$ *surconvergent le long de* T*, i.e., un* $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$*-module cohérent* $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T \cup Z)_{\mathbb{Q}}$*-cohérent.*

Le morphisme canonique $\rho_{\mathcal{E}} : u_{T,+}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}({}^{\dagger}Z)$ *est alors un isomorphisme. Par le théorème* 5.24*, l'isocristal* $\mathcal{E}({}^{\dagger}Z)$ *sur* $\mathfrak{X}$ *surconvergent le long de* $T \cup Z$ *est donc un* $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$*-module holonome.*

Démonstration. D'après le théorème [Ber96b, 4.4.5] (et avec la remarque [Ber96b, 4.4.6]), on peut construire une suite croissante d'entiers $(n_m)_{m \in \mathbb{N}}$ avec $n_m \geqslant m$ telle qu'il existe

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

un $\widehat{\mathcal{B}}^{(n_0)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}^{(0)}$ tel que $\mathcal{E}^{(m)} := \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_0)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$ soit muni d'une structure canonique de $\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module topologiquement nilpotent induisant l'isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-linéaire : $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{m} \mathcal{E}^{(m)}$.

Par la proposition [Ber96b, 4.4.7], il existe un $\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$, $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)$-cohérent tel que $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(m)}$. Posons : $\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z}) := \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{Z})$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T) := \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T) := \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$. Comme $\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$ est $\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)$-cohérent, avec l'aide des lemmes 6.9 et 6.10, on vérifie que le faisceau $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)} \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z})) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$ est muni d'une structure canonique de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)$-module cohérent. On obtient alors par extension le morphisme canonique :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)} (\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)})&\\ \to (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)} \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z})) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)},&\end{aligned} \tag{6.11.1}$$

qui vérifie $1\otimes(x\otimes y)\mapsto(1\otimes x)\otimes y$, où $x\in\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z})$, $y\in\mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$. De même que pour la proposition 4.13 (ou [Ber96b, 3.1.3]), on vérifie que $\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$ est $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)$-cohérent. Le terme de gauche de (6.11.1) est donc, comme celui de droite, p-adiquement séparé et complet. Or, par le théorème 3.6, (6.11.1) est un isomorphisme modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout entier $i \geqslant 0$. Cela implique que (6.11.1) est un isomorphisme. D'où en tensorisant par $\mathbb{Q}$:

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)_{\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z})_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}. \tag{6.11.2}$$

Pour terminer la preuve, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.12. *L'homomorphisme canonique* $\mathcal{E}^{(m)}(\mathcal{Z}) \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^{\#}}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}(\mathcal{Z})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. On procède comme pour le corollaire [Ber96b, 4.4.10] : de manière analogue à la proposition [Ber96b, 4.4.9], l'homomorphisme canonique :

$$\mathring{\mathcal{E}}^{(m)} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(m)}$$

est un isomorphisme et de même en remplaçant '$\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$' par '$\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}^{\#}}$'. Il en résulte l'isomorphisme :

$$\mathcal{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^{\#},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)} \tag{6.12.1}$$

On établit comme dans la preuve du corollaire [Ber96b, 4.4.8] que l'homomorphisme canonique

$$\mathring{\mathcal{E}}^{(m)} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^{\#}} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_0)}_{\mathfrak{X}}(T)\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^{\#}}} \mathring{\mathcal{E}}^{(0)} \tag{6.12.2}$$

est un isomorphisme. En tensorisant (6.12.2) par $\mathbb{Q}$, on conclut avec (6.12.1). □

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

Revenons à présent à la preuve du théorème. On déduit du lemme 6.12 les isomorphismes suivants :

$$\varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}(\mathcal{Z}) \xrightarrow[6.12]{\sim} \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}(\mathcal{Z})$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}^\#}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}(\mathcal{Z}) \xrightarrow[6.12]{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z}). \tag{6.12.3}$$

De même, comme $\mathcal{E}^{(m)} = \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_0)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$ et en utilisant (6.12.3) dans le cas où $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$, on obtient l'isomorphisme :

$$\varinjlim_m (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}^\#}(T)_{\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T,\mathcal{Z})_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\widehat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(m)}$$
$$\xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z})) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}. \tag{6.12.4}$$

Il résulte de (6.11.2), (6.12.3), (6.12.4) l'isomorphisme :

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z})) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}. \tag{6.12.5}$$

Or, d'après le lemme 6.8, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} u_{T,+}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T \cup Z)_{\mathbb{Q}}$. D'où le résultat. □

Remarques 6.13. Soit $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ une suite exacte de log-isocristaux sur $\mathfrak{X}^\#$ surconvergents le long de T. Via le lemme des cinq, si $\rho_{\mathcal{E}'}$ et $\rho_{\mathcal{E}''}$ sont des isomorphismes alors $\rho_{\mathcal{E}}$ l'est aussi.

Conjecture 6.14. *On suppose que :*

- *toutes les différences des exposants le long des composantes irréductibles de Z ne sont pas des entiers p-adiques de Liouville ;*
- *tous les exposants le long des composantes irréductibles de Z ne sont pas des entiers p-adiques de Liouville et ne sont pas strictement positifs.*

Le morphisme $\rho_{\mathcal{E}} : u_{T,+}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}({}^\dagger Z)$ est alors un isomorphisme.

Remarques 6.15. Cette conjecture sera établie via le théorème [CT08, 2.2.9] lorsque le diviseur T_0 est vide. De plus, si on ne fait aucune hypothèse sur les exposants, l'homomorphisme ρ n'est pas toujours un isomorphisme. Voici deux contre-exemples :

• Lorsque $\mathcal{Z}$ est non vide, on vérifie que $\rho_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}(-\mathcal{Z})}$ n'est pas un isomorphisme. En effet, via le théorème [Ber96b, 4.3.12], on se ramène au cas où T est vide. Supposons qu'il existe des coordonnées locales logarithmiques $t_1, \dots, t_d$ telles que $\mathcal{Z} = V(t_1 \cdots t_s)$ (rappelons que par convention, $t_{s+1}, \dots, t_d$ sont inversibles). On calcule $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}/\mathcal{D}_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}(\partial_{\#,1}, \dots, \partial_{\#,d}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. Par la proposition 4.14, on en déduit : $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}/\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(t_1\partial_1, \dots, t_d\partial_d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\#,\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} u_{T,+}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(-\mathcal{Z}))$. Or, on déduit de la proposition [Ber90, 4.3.2.1] le premier isomorphisme :

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}/\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\partial_1 t_1, \dots, \partial_s t_s, \partial_{s+1}, \dots, \partial_d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(-\mathcal{Z}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(-\mathcal{Z}))({}^\dagger Z).$$

Lorsque $s \geqslant 1$, on conclut alors en remarquant

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(t_1\partial_1, \dots, t_d\partial_d) \neq \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\partial_1 t_1, \dots, \partial_s t_s, \partial_{s+1}, \dots, \partial_d).$$

• Lorsque $\mathfrak{X}$ est propre et T est vide, le fait que $\rho_{\mathcal{E}}$ soit un isomorphisme implique que la cohomologie rigide de l'isocristal surconvergent $\mathcal{E}({}^\dagger Z)$ serait toujours de dimension finie. Il suffit

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press

alors de regarder l'isocristal surconvergent (qui provient d'un log-isocristal convergent) décrit par Berthelot dans la dernière remarque de [Ber96b] pour constater que ce n'est pas toujours le cas.

Remerciements

Je remercie Y. Nakkajima et A. Shiho pour la suggestion de considérer des diviseurs de $\mathfrak{X}$ à la place de X. Je remercie N. Tsuzuki pour les discussions qui m'ont aidées à formuler une bonne version de la conjecture 6.14 et qui ont suscitées l'idée d'étendre au cas des log-isocristaux surconvergents ce qui avait été traité dans une première version. Je remercie C. Noot-Huyghe pour une erreur décelée dans une précédente version.

References

Ber90 P. Berthelot, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, in *p-adic analysis (Trento, 1989)* (Springer, Berlin, 1990), 80–124.

Ber96a P. Berthelot, *Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), 35–40.

Ber96b P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), 185–272.

Ber00 P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (81) (2000), vi+136.

Ber P. Berthelot, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. IV. Variété caractéristique*, en préparation.

Cal99 F. J. Calderón-Moreno, *Logarithmic differential operators and logarithmic de Rham complexes relative to a free divisor*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **32** (1999), 701–714.

CN05 F. J. Calderón Moreno and L. Narváez Macarro, *Dualité et comparaison sur les complexes de de Rham logarithmiques par rapport aux diviseurs libres*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), 47–75.

Car04 D. Caro, *Cohérence différentielle des F-isocristaux unités*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), 145–150.

Car05 D. Caro, *Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergents*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **114** (2005), 131–211.

Car06a D. Caro, *Dévissages des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en F-isocristaux surconvergents*, Invent. Math. **166** (2006), 397–456.

Car06b D. Caro, *Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes*, Compositio Math. **142** (2006), 169–206.

Car07 D. Caro, *Overconvergent F-isocrystals and differential overcoherence*, Invent. Math. **170** (2007), 507–539.

Car09 D. Caro, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **42** (2009), 141–192.

CT08 D. Caro and N. Tsuzuki, *Overholonomicity of overconvergent F-isocrystals over smooth varieties*, ArXiv Mathematics e-prints (2008).

Dej96 A. J. de Jong, *Smoothness, semi-stability and alterations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **83** (1996), 51–93.

Gro60 A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (4) (1960), 228.

Kas95 M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial differential equations*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) (63) (1995), xiv+72.

Ked03 K. S. Kedlaya, *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals on a curve*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 151–159.

Ked07a K. S. Kedlaya, *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, IV : Local semistable reduction at nonmonomial valuations*, ArXiv Mathematics e-print (2007).

Ked07b K. S. Kedlaya, *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals. I. Unipotence and logarithmic extensions*, Compositio Math. **143** (2007), 1164–1212.

Ked08 K. S. Kedlaya, *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals. II. A valuation-theoretic approach*, Compositio Math. **144** (2008), 657–672.

Ked09 K. S. Kedlaya, *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, III : Local semistable reduction at monomial valuations*, Compositio Math. **145** (2009), 143–172.

Mon02 C. Montagnon, *Généralisation de la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules à la géométrie logarithmique*, Thèse, Université de Rennes I, 2002.

Noo07 C. Noot-Huyghe, *Finitude de la dimension homologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes et à coefficients surconvergents*, J. Algebra **307** (2007), 499–540.

NS08 Y. Nakkajima and A. Shiho, *Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of open smooth varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1959 (Springer, Berlin, 2008).

SGA6 P. Berthelot, A. Grothendieck and L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch*, in *Séminaire de Géométrie Algégrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6), Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 225 (Springer, Berlin, 1971).

Shi02 A. Shiho, *Crystalline fundamental groups. II. Log convergent cohomology and rigid cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9** (2002), 1–163.

Tsu02 N. Tsuzuki, *Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals*, Duke Math. J. **111** (2002), 385–418.

Vir00 A. Virrion, *Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), 1–68.

Daniel Caro daniel.caro@math.unicaen.fr
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen, Campus 2,
14032 Caen Cedex, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X09004199 Published online by Cambridge University Press