

Groupe de Chow de dimension zéro des fibrations en variétés de Severi–Brauer

EMMANUELLE FROSSARD

Université de Paris-Sud, Département des mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France
e-mail: frossard@matups.matups.fr

Received: 12 September 1996, accepted in final form 7 October 1996

Abstract. We study here the 0-dimension Chow group of some particular smooth varieties which are fibrations over curves (i.e. are equipped with a proper, surjective morphism over a smooth curve). We obtain finiteness results for fibrations, whose generic fibres are Severi–Brauer varieties of squarefree index, when the ground field is a number field (or in some particular cases a finitely generated field over \mathbf{Q}).

Mathematics Subject Classifications (1991): 14C25 algebraic cycles, 14G25 global ground field, 14G27 non algebraic closed ground field, 12G05 Galois cohomology.

Key words: Chow groups, algebraic cycles, arithmetic finiteness theorem, Galois cohomology.

Introduction

Le but de cet article est d’obtenir des résultats de finitude sur le groupe de Chow de dimension zéro de certaines variétés. Le principal résultat obtenu est le suivant (voir Th. 4.7):

THÉORÈME. *Soit k un corps. Soient X une k -variété et C une k -courbe, lisses, projectives, géométriquement intègres, munies d’un k -morphisme $p: X \rightarrow C$, propre, dominant, dont la fibre générique est une variété de Severi–Brauer d’indice sans facteurs carrés. Le groupe $CH_0(X/C) = \text{Ker}(p_*: CH_0(X) \rightarrow CH_0(C))$ est fini dans les deux situations suivantes:*

- (i) *Le corps k est un corps de nombres.*
- (ii) *Le corps k est un corps de type fini sur \mathbf{Q} , la courbe C est la droite projective et la variété X possède un zéro-cycle de degré 1.*

Donc dans chacun de ces cas, le groupe $CH_0(X)$ est un groupe de type fini.

La résolution de ce genre de problème provient d’un article originel de Bloch ([Bl]), qui étudie le cas des fibrations en coniques au-dessus de la droite projective au moyen d’une application dite ‘caractéristique’. Le théorème ci-dessus généralise différents résultats antérieurs, inspirés de la méthode de Bloch en ce qui concerne du moins l’étude du noyau de l’application caractéristique. Le cas des fibrations en

coniques au-dessus de la droite projective a d'abord été obtenu par Bloch ([BI]), travaux repris par Colliot-Thélène et Sansuc ([CT-Sa2]), qui y ajoutent la situation (ii) du théorème ci-dessus; puis le cas des fibrations en variétés de Severi–Brauer d'indice premier au-dessus de la droite projective a été traité par Salberger ([Sa1] et [Sa2]); et le cas des fibrations en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque, a été obtenu indépendamment, par Gros ([G]) et Ōkochi ([Ō]).

Pour contrôler le groupe $CH_0(X/C)$, nous définissons, dans le paragraphe 1, une application caractéristique de $CH_0(X/C)$ dans $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\text{Pic } \bar{X} / \text{Pic}^0 \bar{C}, \bar{k}^*)$, où \mathcal{G} désigne le groupe de Galois absolu du corps k . Nous adoptons pour définir cette application une approche semblable à celle de [CT-Sa2]. Nous étudions par des méthodes différentes l'image et le noyau de cette application caractéristique. La finitude de l'image est obtenue, dans un cadre général, par un procédé inspiré de la démonstration du théorème de Mordell–Weil faible, ce qui fait l'objet du paragraphe 2. Pour étudier le noyau de l'application caractéristique, nous utilisons une formule explicite du groupe $CH_0(X/C)$ faisant intervenir le groupe des normes de la fibre générique et les groupes de Chow des zéros-cycles des fibres spéciales, formule établie par Salberger pour les fibrations en variétés de Severi–Brauer (voir [Sa2], Chap. [b] et [c]) et énoncée sous une forme plus générale par Colliot-Thélène et Skorobogatov (voir [CT-Sk]) dans une étude des fibrations en quadriques au-dessus d'une courbe de genre quelconque. Le paragraphe 3 consiste alors à ramener, par le biais d'un diagramme commutatif, le noyau de l'application caractéristique au noyau d'une application d'évaluation de fonctions. Ce noyau est alors contrôlé, dans le paragraphe 4, par un groupe de cohomologie non ramifiée. Ce contrôle est obtenu par un résultat de Merkuriev et Suslin, méthode déjà utilisée par Salberger. Dans la situation (i) du théorème ci-dessus, le résultat est ensuite obtenu par un théorème de Kato sur la cohomologie non ramifiée des courbes, théorème déjà utilisé chez Gros. Dans la situation (ii) du théorème, le résultat, déjà connu par les travaux de Salberger, est obtenu, de même que dans [CT-Sa2], grâce à la trivialité de la cohomologie non ramifiée sur \mathbb{P}^1 .

Notations et définitions

Soit k un corps parfait; fixons \bar{k} une clôture algébrique de k .

Si X est une k -variété géométriquement intègre, $k(X)$ désigne le corps des fonctions de la variété X ; nous notons \bar{X} le produit fibré $X \times_k \bar{k}$ et $\bar{k}(X)$ son corps des fonctions. Si ϕ est un k -morphisme d'une k -variété X dans une k -variété Y , nous noterons encore ϕ le morphisme induit de \bar{X} dans \bar{Y} .

Nous notons X_i (resp. X^i) l'ensemble des points de dimension i (resp. de codimension i) d'une variété X . Nous notons $Z_i(X)$ le groupe des i -cycles de X , c'est-à-dire le groupe abélien libre engendré par les éléments de X_i , et $CH_i(X)$ le groupe de Chow de dimension i de X , c'est-à-dire le quotient de $Z_i(X)$ par l'équivalence rationnelle (voir [Fu], 1.3). Si $p: X \rightarrow Y$ est un k -morphisme propre, le morphisme p induit sur les groupes de Chow un morphisme

$p_* : CH_i(X) \rightarrow CH_i(Y)$ (voir [Fu], 1.4) et nous notons $CH_i(X/Y)$ le noyau de p_* . Si X est une k -variété propre, nous notons $A_0(X)$ le sous-groupe des éléments de $CH_0(X)$ de degré 0, c'est-à-dire le noyau du morphisme degré $\pi_* : CH_0(X) \rightarrow CH_0(\text{Spec } k) = \mathbb{Z}$, où π est la projection de X sur k .

Nous notons $\text{Div}^0 X$ le sous-groupe de $\text{Div } X$ formé des diviseurs algébriquement équivalents à zéro et $\text{Pic}^0 X$ son quotient par l'équivalence rationnelle (voir [Fu], Chap. 10); quand X est une k -courbe projective lisse géométriquement intègre, le groupe $\text{Pic}^0 X$ s'identifie au groupe $A_0(X)$. Si X et Y sont deux k -variétés propres, géométriquement intègres, munies d'un k -morphisme plat $p : X \rightarrow Y$, le morphisme p induit sur les groupes de diviseurs un morphisme $p^* : \text{Div } Y \rightarrow \text{Div } X$ compatible avec l'équivalence algébrique et avec l'équivalence rationnelle; nous noterons $\text{Pic } X / \text{Pic}^0 Y$ le quotient $\text{Pic } X / p^*(\text{Pic}^0 Y)$.

DÉFINITIONS 0.1. Nous appelons k -fibration admissible, et notons $p : X \rightarrow Y$, tout triplet (p, X, Y) où X et Y sont des k -variétés lisses, projectives, géométriquement intègres et où p est un k -morphisme de X sur Y , propre, plat dont la fibre générique est géométriquement intègre.

Pour une k -fibration admissible $p : X \rightarrow C$, où C est une k -courbe, nous notons X_η (resp. $X_{\bar{k}(\eta)}$) la fibre générique de X sur C (resp. \bar{X} sur \bar{C}). Nous posons $\widehat{S} = \text{Pic } \bar{X} / \text{Pic}^0 \bar{C}$ et $\widehat{S}_0 = \text{Ker}(\widehat{S} \rightarrow \text{Pic } X_{\bar{k}(\eta)})$. Le groupe \widehat{S}_0 , décrit dans le paragraphe 3, est un groupe abélien de type fini engendré par les composantes irréductibles des fibres réductibles au-dessus de C et par une fibre non dégénérée.

1. Définition de l'application caractéristique

Soit k un corps

parfait, \bar{k} une clôture algébrique de k et \mathcal{G} le groupe de Galois de \bar{k}/k . Soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible (Définition 0.1), au-dessus d'une k -courbe C lisse, projective, géométriquement intègre; nous définissons dans ce paragraphe, un homomorphisme dit 'caractéristique' Φ de $CH_0(X/C)$ dans $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\text{Pic } \bar{X} / \text{Pic}^0 \bar{C}, \bar{k}^*)$, suivant une idée de Colliot-Thélène et Sansuc (voir [CT-Sa2] où l'homomorphisme caractéristique est défini pour une fibration au-dessus de \mathbb{P}_k^1).

DÉFINITIONS 1.1. Soit X une k -variété géométriquement intègre. Soit \mathcal{A} un ensemble fini de points fermés de X . Nous notons $\text{Div } X_{\setminus \mathcal{A}}$ (resp. $\text{Div}^0 X_{\setminus \mathcal{A}}$), le sous-groupe des éléments de $\text{Div } X$ (resp. $\text{Div}^0 X$), dont le support ne contient pas d'éléments de \mathcal{A} et $O_{X, \mathcal{A}}^*$ le sous-groupe de $k(X)^*$ constitué des fonctions inversibles aux points de \mathcal{A} .

Soit $z = \sum_{i=1}^r n_i x_i$ un zéro-cycle de X , où les x_i sont des points fermés de X . Nous notons $|z|$ le support de z . Pour toute fonction f de $O_{X, |z|}^*$, nous définissons l'évaluation de f en z , à valeur dans k^* , en posant

$$[z, f]_X = \prod_{i=1}^r N_{k(x_i)/k}(f(x_i))^{n_i} \in k^*,$$

où $k(x_i)$ est le corps résiduel en x et $f(x_i)$ est la classe de f dans $k(x_i)$. En particulier si z est un zéro-cycle de degré zéro de X , cette évaluation induit un homomorphisme $[z, \cdot]_X$ de $O_{X,|z|}^*/k^*$ dans k^* .

LEMME 1.2. *Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C lisse, projective, géométriquement intègre. Si \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) est un ensemble fini, stable par \mathcal{G} , de points \bar{k} -rationnels de \bar{X} (resp. \bar{C}) avec $p(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, on a une suite exacte de \mathcal{G} -modules discrets*

$$0 \longrightarrow (\text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \mathcal{B}} \oplus O_{\bar{X}, \mathcal{A}}^*) / O_{\bar{C}, \mathcal{B}}^* \longrightarrow \text{Div } \bar{X}_{\setminus \mathcal{A}} \longrightarrow \text{Pic } \bar{X} / \text{Pic}^0 \bar{C} \rightarrow 0 \tag{1.1}$$

$$(D, h) \longmapsto p^*(D) - \text{div}_{\bar{X}} h$$

Démonstration. Le quotient de $\text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \mathcal{B}} \oplus O_{\bar{X}, \mathcal{A}}^*$ par $O_{\bar{C}, \mathcal{B}}^*$ est donné par l'application

$$O_{\bar{C}, \mathcal{B}}^* \longrightarrow \text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \mathcal{B}} \oplus O_{\bar{X}, \mathcal{A}}^*$$

$$f \longmapsto (\text{div}_{\bar{C}} f, p^*(f))$$

Les variétés X et C étant projectives et lisses, les groupes $\text{Div } \bar{X}_{\setminus \mathcal{A}}$ et $\text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \mathcal{B}}$ engendrent les quotients $\text{Pic } \bar{X}$ et $\text{Pic}^0 \bar{C}$, ce qui prouve la surjectivité et l'exactitude de cette suite au milieu. Prouvons l'injectivité: soient $D \in \text{Div}^0 \bar{C}$ et $h \in \bar{k}(X)^*$ qui vérifient $p^*(D) = \text{div}_{\bar{X}} h$, la fonction h est alors inversible sur la fibre générique du morphisme p , qui est une variété projective, géométriquement intègre, au dessus de $\bar{k}(C)$, donc $h \in \bar{k}(C)^*$ et nécessairement $D = \text{div}_{\bar{C}} h$. Si de plus D appartient à $\text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \mathcal{B}}$, on a bien $h \in O_{\bar{C}, \mathcal{B}}^*$. \square

DÉFINITION 1.3. *Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C lisse, projective, géométriquement intègre. Pour chaque zéro-cycle z de $Z_0(X)$ d'image nulle dans $CH_0(C)$, nous définissons un \mathcal{G} -homomorphisme ϕ_z comme suit:*

$$\phi_z : (\text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus p_*(|z|)} \oplus O_{\bar{X}, |z|}^*) / O_{\bar{C}, p_*(|z|)}^* \longrightarrow \bar{k}^*$$

$$(D, f) \longmapsto [D, g_z]_{\bar{C}} / [\bar{z}, f]_{\bar{X}},$$

où $g_z \in k(C)^*$ est une fonction, définie à une constante près, telle que $\text{div}_C g_z = p_*(z)$. Le fait que l'homomorphisme ϕ_z passe au quotient par $O_{\bar{C}, p_*(|z|)}^*$, est une conséquence de la loi de réciprocité de Weil. En effet, pour toute fonction $h \in O_{\bar{C}, p_*(|z|)}^*$, nous avons

$$[\bar{z}, p^*(h)]_{\bar{X}} = [p_*(\bar{z}), h]_{\bar{C}} = [\text{div}_{\bar{C}} g_z, h]_{\bar{C}}$$

et d’après la loi de réciprocité de Weil (voir [Ba], Part II, Chapitre VI, Proposition 8.2)

$$[\operatorname{div}_{\bar{C}} g_z, h]_{\bar{C}} = [\operatorname{div}_{\bar{C}} h, g_z]_{\bar{C}}$$

d’où

$$\phi_z(\operatorname{div}_{\bar{C}} h, p^*(h)) = 1.$$

Nous construisons ensuite une \mathcal{G} -extension E_z de $\operatorname{Pic} \bar{X} / \operatorname{Pic}^0 \bar{C}$ par \bar{k}^* en poussant la suite exacte (1.1) par le \mathcal{G} -homomorphisme ϕ_z . On définit alors un homomorphisme $\tilde{\Phi}$ de $\operatorname{Ker}(Z_0(X) \rightarrow CH_0(C))$ dans $\operatorname{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\operatorname{Pic} \bar{X} / \operatorname{Pic}^0 \bar{C}, \bar{k}^*)$, en associant à tout zéro-cycle z la classe de l’extension E_z (en laissant croître de façon finie les ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} dans la suite (1.1), on voit que cette application est bien un homomorphisme).

PROPOSITION–DÉFINITION 1.4. *Soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d’une k -courbe C lisse, projective, géométriquement intègre. L’homomorphisme $\tilde{\Phi}$ défini ci-dessus passe au quotient par l’équivalence rationnelle sur X . On appelle homomorphisme caractéristique l’homomorphisme induit*

$$\Phi : CH_0(X/C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\operatorname{Pic} \bar{X} / \operatorname{Pic}^0 \bar{C}, \bar{k}^*)$$

Démonstration. Nous devons montrer que pour toute k -courbe V lisse projective intègre, munie d’un morphisme $\pi : V \rightarrow X$ propre non constant, et pour toute fonction g non constante de $k(V)^*$, l’extension $\Phi(\pi_*(\operatorname{div}_V g))$ est triviale.

Fixons V une telle courbe et $g \in k(V)^*$ une fonction non constante. Posons $y = \operatorname{div}_V g \in Z_0(V)$ et $z = \pi_*(y) \in Z_0(X)$. Notons $\rho = p \circ \pi$ qui est un k -morphisme propre de V dans C . Nous avons alors un diagramme commutatif de \mathcal{G} -modules:

$$\begin{array}{ccc} (D, f) \longmapsto p^*(D) - \operatorname{div}_{\bar{X}} f & & \\ \operatorname{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \rho^*(|y|)} \oplus O_{\bar{X}, \pi^*(|y|)}^* & \longrightarrow & \operatorname{Div} \bar{X}_{\setminus \pi^*(|y|)} \\ \downarrow \phi_z & & \downarrow \pi^* \\ \bar{k}^* & \xleftarrow{[\cdot, g]_{\bar{V}}} & \operatorname{Div} \bar{V}_{\setminus |y|} \end{array}$$

En effet, d’après la loi de réciprocité de Weil, pour $f \in O_{\bar{X}, \pi^*(|y|)}^*$, nous avons

$$\begin{aligned} [z, f]_{\bar{X}} &= [\operatorname{div}_{\bar{V}} g, \pi^*(f)]_{\bar{V}} \\ &= [\operatorname{div}_{\bar{V}} \pi^*(f), g]_{\bar{V}} \\ &= [\pi^*(\operatorname{div}_{\bar{X}} f), g]_{\bar{V}}. \end{aligned}$$

Si le morphisme ρ est non constant, c'est un morphisme plat de V sur C et nous avons $p_*(z) = \rho_*(\text{div}_V g) = \text{div}_C N_{k(V)/k(C)}(g)$ (voir [Fu], Proposition 1.4). De plus, pour $D \in \text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \rho^*(|y|)}$, nous avons $[\rho^*(D), g]_{\bar{V}} = [D, N_{k(V)/k(C)}(g)]_{\bar{C}}$. En effet soit x un point fermé de \bar{C} avec $\rho^*(x) = \sum_{i=1}^n e_i x_i \in Z_0(\bar{V})$, appelons A l'anneau local de \bar{C} en x , appelons B l'anneau semi-local de \bar{V} en les x_i et $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses idéaux maximaux, pour tout $g \in B^*$ nous avons $(N_{\bar{k}(V)/\bar{k}(C)}(f))(x) = (N_{B/A}(f))(x) = \prod_{i=1}^n f(x_i)^{e_i}$ (voir Bourbaki, Algèbre Chapitre 8, par. 12, Proposition 6). Ainsi, pour tout $f \in O_{\bar{X}, \pi^*(|y|)}^*$ et tout $D \in \text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \rho^*(|y|)}$, nous avons

$$\begin{aligned} \phi_z(D, f) &= [D, N_{k(V)/k(C)}(g)]_{\bar{C}} / [z, f]_{\bar{X}} \\ &= [\rho^*(D), g]_{\bar{V}} / [\pi^*(\text{div}_{\bar{X}} f), g]_{\bar{V}} \\ &= [\pi^*(p^*(D) - \text{div}_{\bar{X}} f), g]_{\bar{V}}. \end{aligned}$$

Si le morphisme ρ est constant, nous avons $p_*(z) = 0$ dans $Z_0(C)$ et pour tout $D \in \text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \rho^*(|y|)}$, nous avons $\pi^*(p^*(D)) = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \phi_z(D, f) &= 1/[z, f]_{\bar{X}} \\ &= [\pi^*(p^*(D) - \text{div}_{\bar{X}} f), g]_{\bar{V}} \end{aligned}$$

pour tout $f \in O_{\bar{X}, \pi^*(|y|)}^*$ et tout $D \in \text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \rho^*(|y|)}$.

Ce diagramme nous fournit une rétraction de ϕ_z qui va de $\text{Div } \bar{X}_{\setminus \pi^*(|y|)}$ dans \bar{k}^* :

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow (\text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus \rho^*(|y|)} \oplus O_{\bar{X}, \pi^*(|y|)}^* / O_{\bar{C}, \rho^*(|y|)}^*) & \longrightarrow & \text{Div } \bar{X}_{\setminus \pi^*(|y|)} \rightarrow \text{Pic } \bar{X} / \text{Pic}^0 \bar{C} \rightarrow 0 \\ \Phi_z \downarrow & \nearrow [\cdot, g]_{\bar{V}} \circ \pi_* & \\ & \bar{k}^* & \end{array} \tag{1.1}$$

ce qui prouve que l'extension $\Phi(\pi_*(\text{div}_V g))$ obtenue en poussant la suite (1.1) par ϕ_z est triviale. \square

Remarque 1.5. Dans le cas d'une fibration au-dessus d'une base de dimension quelconque, on peut aussi définir une 'application caractéristique' qui généralise celle construite ci-dessus. Soit X et Y deux k -variétés lisses, projectives, géométriquement intègres, munies d'un k -morphisme propre et plat $p: X \rightarrow Y$, dont la fibre générique est géométriquement intègre. J'établis dans ma thèse ([Fr1], paragraphe 1) l'existence d'un morphisme $\Phi: CH_0(X/Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\text{Pic } \bar{X} / \text{Pic}^0 \bar{Y}, \bar{k}^*)$ qui coïncide avec celui défini ci-dessus quand Y est de dimension 1. Il est beaucoup plus difficile de construire cette application dans le cas d'une base de dimension quelconque que dans le cas où la base est une courbe. Les difficultés que l'on rencontre alors sont liées d'une part au fait qu'il n'y a pas un choix naturel de fonctions pour représenter un cycle rationnellement équivalent à zéro dans $Z_0(Y)$,

d’autre part à la complexité du groupe $\text{Div}^0(\bar{Y})$ si Y est de dimension supérieure ou égale à 2. Les démonstrations s’appuient alors sur la théorie de l’intersection développée par Fulton (voir [Fu]).

2. Finitude de l’image de l’application caractéristique

Ce paragraphe est entièrement consacré à la démonstration de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. *Soit k un corps de type fini sur \mathbb{Q} , de groupe de Galois absolu \mathcal{G} . Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible (Définition 0.1), au-dessus d’une k -courbe C lisse, projective, géométriquement intègre. Si le groupe $\text{Pic } X_{\bar{k}(\eta)}$ est de type fini (ce qui revient à dire que le groupe $\hat{S} = \text{Pic } \bar{X} / \text{Pic}^0 \bar{C}$ est de type fini), l’homomorphisme caractéristique Φ (défini en 1.4), de $CH_0(X/C)$ dans $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, \bar{k}^*)$, a une image finie.*

Démonstration. Elle est constituée de trois étapes.

(a) Réduction du problème à un niveau fini au-dessus de k

Soit C une k -courbe lisse, projective, géométriquement intègre. Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible telle que \hat{S} est un \mathbb{Z} -module de type fini. Nous pouvons trouver L une extension finie galoisienne de k telle que $\hat{S} = \text{Pic } X_L / \text{Pic}^0 C_L$. Il suffit pour cela de choisir L de telle sorte que \hat{S} soit engendré par des diviseurs de $X_L = X \times_k L$ et que C_L possède un point rationnel. Notons $\mathcal{H} = \text{Gal}(\bar{k}/L)$ et $G = \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Le \mathcal{G} -module \hat{S} est stable par \mathcal{H} , de plus, puisque $H^1(\mathcal{H}, \bar{k}^*) = 0$, nous avons $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, \bar{k}^*) = \text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*)$.

L’homomorphisme caractéristique Φ de $CH_0(X/C)$ dans $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, \bar{k}^*)$ se décrit alors au niveau de L , de la manière suivante. Soit $z \in \text{Ker}(Z_0(X) \rightarrow CH_0(C))$. L’extension $\Phi(z) \in \text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*)$ est obtenue en poussant la suite exacte de G -modules

$$0 \rightarrow (O_{X_L, |z|}^* \oplus \text{Div}^0 C_L \setminus p(|z|)) / O_{C_L, p(|z|)}^* \rightarrow \text{Div } X_L \setminus |z| \rightarrow \hat{S} \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

par le G -homomorphisme ϕ_z

$$\begin{array}{ccc} (O_{X_L, |z|}^* \oplus \text{Div}^0 C_L \setminus p_*(|z|)) / O_{C_L, p_*(|z|)}^* & \xrightarrow{\phi_z} & L^* \\ (f, D) & \mapsto & [D, g_z]_{C_L} / [z, f]_{X_L}, \end{array}$$

où $g_z \in k(C)^*$ est la fonction, définie à une constante près, telle que $p_*(z) = \text{div}_C g_z$, et où les évaluations de f et g_z sur des zéro-cycles sont telles que nous les avons définies en 1.1.

(b) Analyse de la situation aux places de bonne réduction

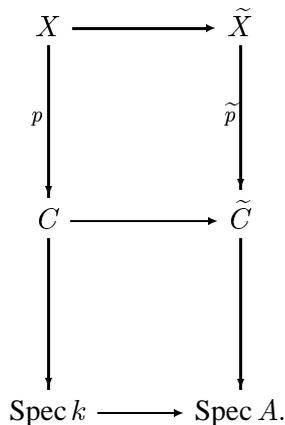
DÉFINITION. Soient k un corps parfait et $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. Soit A un anneau muni d'une valuation discrète v , de corps des fractions k . On dit que $p: X \rightarrow C$ a bonne réduction par rapport à A s'il existe des variétés \tilde{X} et \tilde{C} lisses, propres au-dessus de $\text{Spec } A$, de fibres génériques X et C , munies d'un morphisme \tilde{p} de \tilde{X} sur \tilde{C} , propre, plat, qui relève p .

LEMME 2.2. Soient k un corps parfait et soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre, telle que \hat{S} est un groupe abélien de type fini. Soit A un anneau muni d'une valuation discrète v , de corps des fractions k . Soit L une extension finie galoisienne de k , de groupe de Galois G , telle que $\hat{S} = \text{Pic } X_L / \text{Pic}^0 C_L$. Soit w une valuation discrète de L divisant v , d'anneau des entiers B ; on note G_w son groupe de décomposition et Φ_w le composé de Φ par l'application de restriction $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*) \rightarrow \text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, L^*)$.

Si $p: X \rightarrow C$ a bonne réduction par rapport à A , comme cela est défini ci-dessus, alors l'image de Φ_w dans $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, L^*)$ provient de $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, B^*)$.

Démonstration du Lemme 2.2. Soit A un anneau muni d'une valuation discrète v , de corps des fractions k , pour lequel $p: X \rightarrow C$ a bonne réduction. Soit w une valuation discrète de L divisant v d'anneau des entiers B , on note G_w son groupe de décomposition dans G . Fixons $z \in CH_0(X/C)$ et choisissons $g_z \in k(C)^*$ telle que $p_*(z) = \text{div}_C g_z$. Nous voulons prouver que l'extension $\Phi_w(z)$ de $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, L^*)$ provient d'une extension de $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, B^*)$.

Puisque $p: X \rightarrow C$ a bonne réduction pour A , il existe des variétés \tilde{X} et \tilde{C} lisses, propres au-dessus de $\text{Spec } A$, de fibres génériques X et C , munies d'un morphisme \tilde{p} de \tilde{X} sur \tilde{C} propre, plat, qui relève p .



Notons $\tilde{X}_B = \tilde{X} \times_A B$ et $\tilde{C}_B = \tilde{C} \times_A B$. Si Z est une sous-variété irréductible de X_L (resp. C_L), nous notons \tilde{Z} son adhérence schématique dans \tilde{X}_B (resp. \tilde{C}_B). Nous notons ensuite z_w (resp. $p(z_w)$) l'ensemble fini de points fermés de \tilde{X}_B

(resp. \tilde{C}_B) qui constituent l'intersection des adhérences schématiques des points de $|z|$ (resp. des points de $p(|z|)$) avec la fibre spéciale de \tilde{X}_B (resp. \tilde{C}_B) au-dessus de $\text{Spec } B$, et nous appelons \mathcal{D}_z (resp. \mathcal{P}_z) l'ensemble des sous-variétés irréductibles de codimension 1 de X_L (resp. C_L) dont l'adhérence schématique dans \tilde{X}_B (resp. \tilde{C}_B) rencontre z_w (resp. $p(z_w)$). Puis nous désignons par O_{X_L, z_w}^* l'ensemble des fonctions de $L(X)^*$ dont le diviseur dans \tilde{X}_B est à support étranger à z_w , et nous désignons par $\text{Div } X_{L \setminus \mathcal{D}_z}$ (resp. $\text{Div}^0 C_{L \setminus \mathcal{P}_z}$) le sous-groupe des éléments de $\text{Div } X_L$ (resp. $\text{Div}^0 C_L$) dont le support ne contient aucune des sous-variétés irréductibles de codimension 1 de \mathcal{D}_z (resp. \mathcal{P}_z). La variété \tilde{X}_B est lisse, propre au dessus de $\text{Spec } B$, et z_w est un ensemble fini de points fermés de \tilde{X}_B , le groupe $\text{Pic } \tilde{X}_B$ est donc engendré modulo l'équivalence rationnelle par le groupe $\text{Div } \tilde{X}_{B \setminus z_w}$. Il y a de plus une surjection naturelle de $\text{Pic } \tilde{X}_B$ dans $\text{Pic } X_L$ et de $\text{Div } \tilde{X}_{B \setminus z_w}$ dans $\text{Div } X_{L \setminus \mathcal{D}_z}$, ce qui prouve que le groupe $\text{Pic } X_L$ est engendré modulo l'équivalence rationnelle par le groupe $\text{Div } X_{L \setminus \mathcal{D}_z}$. Nous avons donc une suite exacte (2.2) analogue à la suite (2.1) et un diagramme commutatif de G_w -modules:

$$\begin{array}{ccccccc}
 O_{X_L, z_w}^* \oplus \text{Div}^0 C_{L \setminus \mathcal{P}_z} & \longrightarrow & \text{Div } X_{L \setminus \mathcal{D}_z} & \longrightarrow & \text{Pic } X_L / \text{Pic}^0 C_L & \longrightarrow & 0 & (2.2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \wr & & & \\
 O_{X_L, |z|}^* \oplus \text{Div}^0 C_{L \setminus p(|z|)} & \longrightarrow & \text{Div } X_{L \setminus |z|} & \longrightarrow & \text{Pic } X_L / \text{Pic}^0 C_L & \longrightarrow & 0 & (2.1)
 \end{array}$$

Soit P un point fermé de X_L contenu dans le support de z et $f \in O_{X_L, z_w}^*$, la restriction $[f]_{\tilde{P}}$ de f à la sous-variété \tilde{P} de \tilde{X} est inversible sur les points de \tilde{P} contenus dans la fibre spéciale de \tilde{X}_B au-dessus de $\text{Spec } B$, donc nous avons $w([P, f]_{X_L}) = w(N_{k(P)/L}([f]_{\tilde{P}})) = 0$. Ainsi pour tout $f \in O_{X_L, z_w}^*$ nous avons $[P, f]_{X_L} \in B^*$. De plus, quitte à multiplier g_z par un élément de L^* , nous pouvons supposer que $\text{div}_{\tilde{C}} g_z$ a son support dans \tilde{C}_B en dehors de la fibre spéciale, et alors l'intersection de son support avec la fibre spéciale est contenu dans $p(z_w)$, ce qui fait que pour tout point fermé P de C n'appartenant pas à \mathcal{P}_z nous avons de même $[P, g_z]_{C_L} \in B^*$. La restriction du morphisme ϕ_z à $O_{X_L, |z|}^* \oplus \text{Div}^0 C_{L \setminus \mathcal{P}_z}$ donne alors le diagramme commutatif de G_w -modules suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 O_{X_L, z_w}^* \oplus \text{Div}^0 C_{L \setminus \mathcal{P}_z} & \xrightarrow{\phi_z} & B^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 O_{X_L, |z|}^* \oplus \text{Div}^0 C_{L \setminus p(|z|)} & \xrightarrow{\phi_z} & L^*
 \end{array}$$

Comme le morphisme ϕ_z passe au quotient par le noyau de la flèche gauche de (2.1), il passe aussi au quotient par le noyau de la flèche gauche de (2.2). Nous obtenons ainsi l'extension $\Phi(z)$ en poussant la suite (2.2) dans B^* par ϕ_z , et donc l'extension $\Phi(z)$ provient bien de $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, B^*)$. \square

(c) Fin de la démonstration de la Proposition 2.1

Soit k un corps de type fini sur \mathbb{Q} , soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre, telle que \hat{S} est de type fini. Fixons L une extension finie galoisienne de k de groupe de Galois G telle que $\hat{S} = \text{Pic } X_L / \text{Pic}^0 C_L$. Nous allons montrer, grâce au lemme 2.2, qu'il existe un sous-anneau R de L dont le groupe des unités R^* est un groupe abélien de type fini et tel que tout élément de $\text{Im } \Phi$ dans $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*)$ provienne du groupe fini $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, R^*)$.

Soit A un anneau intègre, de type fini comme \mathbb{Z} -algèbre, de corps des fractions k . Soient \tilde{X} et \tilde{C} deux variétés au dessus de $\text{Spec } A$, de fibres génériques X et C . Soit $U = \text{Spec } R$ un ouvert régulier de $\text{Spec } A$ au dessus duquel \tilde{X} et \tilde{C} sont lisses, propres, munies d'un morphisme \tilde{p} propre et plat de \tilde{X} sur \tilde{C} , qui relève p . Nous pouvons de plus choisir l'anneau R de telle sorte que $\text{Pic } R_L = 0$, où R_L est l'anneau des entiers de L au-dessus de R . L'existence d'un tel anneau (voir [CT-Sa1] p.192), utilise un résultat de Roquette (voir [Ro] ou [L], Chapitre 2, Théorème 7.6), à savoir qu'un anneau normal de type fini sur \mathbb{Z} a un groupe de Picard fini, résultat lui-même conséquence du théorème des unités de Dirichlet et des théorèmes de Mordell–Weil–Néron. Posons $U_L = \text{Spec } R_L$. Nous avons alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow R_L^* \longrightarrow L^* \longrightarrow \bigoplus_{y \in U_L^1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

où U_L^1 désigne l'ensemble des points de codimension 1 de l'ouvert U_L . Pour tout point x de codimension 1 de U nous fixons un point y_x de codimension 1 de U_L au-dessus de x et nous notons G_x le sous-groupe de décomposition de G correspondant à la valuation discrète v_x induite par y_x sur L . La suite (2.3) vue comme une suite de G -modules s'écrit alors

$$0 \longrightarrow R_L^* \longrightarrow L^* \xrightarrow{\sum v_x} \bigoplus_{x \in U^1} \mathbb{Z}[G/G_x] \longrightarrow 0. \tag{2.3}$$

Par le lemme de Shapiro, nous avons $\text{Ext}_G^i(\hat{S}, \mathbb{Z}[G/G_x]) \simeq \text{Ext}_{G_x}^i(\hat{S}, \mathbb{Z})$. La suite (2.3) nous donne ainsi par passage à la cohomologie la suite exacte

$$\text{Ext}_G^1(\hat{S}, R_L^*) \longrightarrow \text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*) \xrightarrow{\sum v_x} \bigoplus_{x \in U^1} \text{Ext}_{G_x}^1(\hat{S}, \mathbb{Z}). \tag{2.4}$$

Pour tout x dans U^1 , notons R_x l'anneau local de R en x . Nous avons choisi l'ou-

vert U de telle sorte que pour tout point x de U^1 , la fibration $p : X \rightarrow C$ a bonne réduction au-dessus de l’anneau R_x . D’après le Lemme 2.2, l’image par v_x de $\text{Im } \Phi$ est donc nulle pour tout point x de U^1 . Ainsi d’après la suite exacte (2.4) l’image de Φ dans $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*)$ est incluse dans $\text{Im}(\text{Ext}_G^1(\hat{S}, R_L^*) \rightarrow \text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*))$. D’autre part R_L étant un anneau réduct de type fini sur \mathbb{Z} , le groupe des unités R_L^* est un groupe abélien de type fini (voir [Ro] ou [L], Chapitre 2, Corollaire 7.5), et comme \hat{S} est aussi un groupe abélien de type fini, le groupe $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, R_L^*)$ est fini. Ceci prouve que $\text{Im } \Phi$ est fini. \square

Remarque 2.3. Si k est un corps de nombres, pour toute place w de L , notons $\Phi_{\tilde{w}}$ le composé de Φ par l’application de restriction de $\text{Ext}_G^1(\hat{S}, L^*) \rightarrow \text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, L_w^*)$, où L_w est le complété de L pour la valuation w . Alors le Lemme 2.2 prouve que: *si le \mathbb{Z} -module \hat{S} est sans torsion, pour presque toute place w de L l’image de $\Phi_{\tilde{w}}$ est nulle.* En effet, appelons R l’anneau des entiers de k , choisissons v une place de k d’anneau de valuation R_v telle que L soit non ramifiée au-dessus de v et telle que $p : X \rightarrow C$ ait bonne réduction par rapport à R_v . Soit w une place de L divisant v , d’après le Lemme 2.2 l’image de $\Phi_{\tilde{w}}$ dans $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, L_w^*)$ provient de $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, U_w^*)$, où U_w^* est l’anneau de la valuation de L_w^* . Puisque \hat{S} est sans torsion, nous avons $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\hat{S}, U_w^*) = 0$; alors comme U_w^* est cohomologiquement trivial, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{S}, U_w^*)$ l’est aussi ([Se], Chapitre 9, Théorème 9). La suite spectrale $\text{Ext}_{G_w}^i(\mathbb{Z}, \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^j(\hat{S}, U_w^*)) \Rightarrow \text{Ext}_{G_w}^{i+j}(\hat{S}, U_w^*)$, donne alors un isomorphisme $H^1(G_w, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{S}, U_w^*)) \simeq \text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, U_w^*)$, ce qui prouve que $\text{Ext}_{G_w}^1(\hat{S}, U_w^*) = 0$ et donc que $\Phi_{\tilde{w}}$ a une image nulle.

3. Noyau de l’application caractéristique

Soit k un corps parfait. Fixons \bar{k} une clôture algébrique de k , et notons \mathcal{G} le groupe de Galois de \bar{k}/k . Soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible (Définition 0.1), au-dessus d’une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. Si P est un point fermé de la courbe C , nous notons $k(P)$ le corps résiduel en P et $X_P = X \times_C k(P)$ la fibre de p en P . La courbe C ne possède qu’un nombre fini de points au-dessus desquels les fibres sont dégénérées, c’est-à-dire au-dessus desquels les fibres ne sont pas géométriquement intègres. Nous appelons Φ_0 le morphisme de $CH_0(X/C)$ dans $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*)$ composé de l’application caractéristique $\Phi : CH_0(X/C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}, \bar{k}^*)$ et du morphisme naturel $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}, \bar{k}^*) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*)$ déduit de l’injection $\hat{S}_0 \hookrightarrow \hat{S}$. Le noyau $\text{Ker } \Phi$ est un sous-groupe de $\text{Ker } \Phi_0$, et ces deux noyaux sont égaux quand $\text{Pic } X_{\bar{k}(\eta)} \simeq \mathbb{Z}$ car $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\mathbb{Z}, \bar{k}^*) = H^1(\mathcal{G}, \bar{k}^*) = 0$ (ce sera le cas pour les fibrés en variétés de Severi–Brauer).

En supposant que l’image par Φ_0 du groupe $A_0(X_P)$ est nulle pour tout point P de C au-dessus duquel la fibre X_P est dégénérée, nous allons prouver l’existence

d'un diagramme commutatif (Prop. 3.8)

$$\begin{array}{ccc}
 CH_0(X/C) & \xrightarrow{\Phi} & k(C)_{\text{dn}}^*/k^* \cdot N_{X_\eta}(k(C)) \\
 \Phi_0 \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*) & \xleftarrow{\sim \delta} & \left(\prod_{1 \leq i \leq r} k(P_i)^*/N_{P_i}(k(P_i)) \right) / k^*
 \end{array} \tag{3.1}$$

où les termes du diagramme sont explicités ci-dessous. Nous en déduisons une suite exacte (Cor. 3.9)

$$\bigoplus_{P \in C_0} A_0(X_P) \longrightarrow \text{Ker } \Phi_0 \longrightarrow \text{Ker } \gamma \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

(a) **Le morphisme Ψ**

Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. La suite élémentaire (3.3) ci-dessous, a été établie, sous une forme plus précise, par Salberger en 1984 (non publié). Elle apparaît dans la littérature écrite, dans l'article [CT-Sk] (Prop. 1.1), sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
 \bigoplus_{P \in C_0} A_0(X_P) &\longrightarrow CH_0(X/C) \xrightarrow{\Psi} k(C)^*/k^* \cdot N_{X_\eta}(k(C)) \\
 &\xrightarrow{\sum v_P} \bigoplus_{P \in C_0} \mathbb{Z}/p_*(CH_0(X_P)), \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

où $N_{X_\eta}(k(C))$ désigne le sous-groupe de $k(C)^*$ engendré par les groupes de normes $N_{k(x)/k(C)}(k(x)^*)$ quand x parcourt l'ensemble des points de dimension 0 de la fibre générique X_η , et où le morphisme Ψ se déduit par passage au quotient du morphisme $\tilde{\Psi}: \text{Ker}(Z_0(X) \rightarrow CH_0(C)) \rightarrow k(C)^*/k^*$ qui à tout $z \in \text{Ker}(Z_0(X) \rightarrow CH_0(C))$ associe la fonction g_z (définie à une constante près) de $k(C)^*$ qui vérifie $\text{div}_C g_z = p_*(z)$.

C'est Salberger qui souligna l'importance du groupe $k(C)_{\text{dn}}^*$ de $k(C)^*$, appelé par lui 'groupe des normes divisorielles'; la définition suivante lui est due dans le cas des fibrations en variétés de Severi–Brauer (voir [Sa1], Définition 2.7).

DÉFINITION. On appelle groupe des normes divisorielles, et on note $k(C)_{\text{dn}}^*$, le sous-groupe des éléments de $k(C)^*$ qui en tout point P de la courbe C s'écrivent comme le produit d'une unité en P par un élément du groupe des normes $N_{X_\eta}(k(C))$.

Salberger établit à la même époque (non publié), dans le cas des fibrations en variétés de Severi–Brauer, l’équivalence de cette première définition du groupe $k(C)_{\text{dn}}^*$ avec la seconde définition ci-dessous

$$k(C)_{\text{dn}}^* = \{f \in k(C)^* \mid \forall P \in C_0, v_P(f) \in p_*(CH_0(X_P))\}.$$

et il établit, toujours dans le même cas, la suite exacte (3.4) ci-dessous.

PROPOSITION 3.1. *Soient X une k -variété et C une k -courbe qui sont lisses, intègres, projectives au-dessus de k , munies d’un k -morphisme $p: X \rightarrow C$ propre dominant, on a alors la suite exacte*

$$\bigoplus_{P \in C_0} A_0(X_P) \rightarrow CH_0(X/C) \xrightarrow{\Psi} k(C)_{\text{dn}}^*/k^* \cdot N_{X_\eta}(k(C)) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Sous la forme générale énoncée ci-dessus, la suite (3.4) fut établie par Colliot-Thélène et Skorobogatov (voir [CT-Sk], Proposition 1.2), qui l’appliquèrent aux fibrations en quadriques. L’existence de cette suite (3.4) découle, à partir de la suite (3.3), de l’équivalence des deux définitions du groupe $k(C)_{\text{dn}}^*$ données avant la Proposition 3.1. L’équivalence de ces deux définitions se démontre en utilisant le lemme de déplacement suivant:

LEMME 3.2. *Soit k un corps. Soit Y une k -variété, régulière, quasi-projective; soit (V_1, \dots, V_r) un ensemble fini de sous-variétés irréductibles de codimension 1 de Y . Tout cycle de $CH_0(Y)$ possède un représentant dans $Z_0(Y)$ dont le support est en dehors de chacun des V_i .*

Démonstration du Lemme 3.2. Soit Y une k -variété lisse quasi-projective; soient (V_1, \dots, V_r) des sous-variétés irréductibles de codimension 1 de Y . Pour tout point fermé M de Y , nous allons prouver qu’il existe une courbe intègre C_M de Y , régulière en M , et qui n’est contenue dans aucune des V_i . En procédant par itération, il suffit pour cela de prouver que si Y est de dimension supérieure ou égale à 2, il existe une sous-variété V de Y , irréductible, de codimension 1, régulière en M et différente de chacune des V_i . Supposons que $\dim(Y) \geq 2$, soit M un point fermé de Y , notons $I = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid M \in V_i\}$, appelons A l’anneau local de Y au point M d’idéal maximal \mathcal{M} et appelons $(\mathfrak{P}_i)_{i \in I}$ les idéaux de A qui définissent les V_i au voisinage de M . Comme $\dim(Y) \geq 2$, nous avons $\mathcal{M}/\mathfrak{P}_i \neq 0$ pour tout $i \in I$, donc chaque idéal \mathfrak{P}_i engendre dans le A/\mathcal{M} -module $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ un sous-espace vectoriel strict. Si le corps k est infini, l’union de ces sous-espaces est différente de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$, il existe donc un élément $x \in \mathcal{M}$, $x \notin \mathcal{M}^2$ tel que x n’appartienne à aucun des P_i (si le corps k est fini, on se ramène au cas précédent par une extension algébrique). De plus comme A est régulier et que $x \notin \mathcal{M}^2$ l’anneau $A/(x)$ est intègre régulier. Appelons V l’adhérence schématique dans Y de la sous-variété définie localement par l’idéal (x) , alors V est bien une sous-variété

de Y , irréductible, de codimension 1, régulière en M et différente de chacun des V_i pour tout $i \in [1, r]$. Ainsi si M est un point fermé de Y , il existe une courbe $C_M \subset Y$, régulière en M et qui ne rencontre les V_i qu'en un nombre fini de points. Comme le groupe de Picard d'un anneau semi-local est nul, il existe une fonction f de $k(C_M)^*$ telle que le cycle $M - \text{div}_{C_M} f$ a son support en dehors des V_i . Ceci prouve que tout cycle de $Z_0(Y)$ est rationnellement équivalent à un cycle dont le support est en dehors des V_i . \square

Ce Lemme 3.2 permet d'énoncer le lemme ci-dessous, utile dans la suite de la construction du diagramme (3.1).

LEMME 3.3. *Soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. Soit \mathcal{A} un ensemble fini de points fermés de C , appelons \mathcal{B} l'ensemble des sous-variétés irréductibles de codimension 1 de X contenues dans les fibres au-dessus des points de \mathcal{A} . On a alors un diagramme commutatif de suites exactes*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bigoplus_{P \notin \mathcal{A}} Z_0^0(X_P) & \longrightarrow & \text{Ker}(Z_0(X) \setminus \mathcal{B} \rightarrow CH_0(C)) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & k(C)_{\text{dn}, \mathcal{A}}^*/k^* & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \bigoplus_{P \in C} A_0(X_P) & \longrightarrow & CH_0(X/C) & \xrightarrow{\Psi} & k(C)_{\text{dn}}^*/k^* \cdot N_{X_\eta}(k(C)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}
 \tag{3.5}$$

où $Z_0^0(X_P)$ désigne le groupe des zéro-cycles de degré zéro de la variété X_P , où $Z_0(X) \setminus \mathcal{B}$ désigne le sous-groupe des cycles de $Z_0(X)$ dont le support ne rencontre pas les points génériques de \mathcal{B} , et où $k(C)_{\text{dn}, \mathcal{A}}^*$ désigne le sous-groupe des fonctions de $k(C)_{\text{dn}}^*$ qui sont inversibles en les points de \mathcal{A} .

Démonstration. Grâce à la seconde description de $k(C)_{\text{dn}}^*$, l'exactitude de la première suite horizontale du diagramme (3.5) est évidente. La surjectivité de la seconde flèche verticale découle directement du lemme 3.2 et elle implique la surjectivité de la troisième flèche verticale. \square

(b) Autre expression de \hat{S}_0

Soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. Appelons P_1, \dots, P_r les points de C au-dessus desquels les fibres sont dégénérées, c'est-à-dire non géométriquement intègres.

Fixons y_1, \dots, y_r des points fermés de \bar{C} au-dessus de P_1, \dots, P_r qui identifient $k(P_i)$ à une sous-extension de \bar{k}/k . Notons $\mathcal{H}_i = \text{Gal}(\bar{k}/k(P_i)) = \text{Stab}(y_i)$. Dans la fibre \bar{X}_{y_i} , les composantes irréductibles se décomposent en n_i orbites sous l’action de \mathcal{H}_i . Fixons $(d_{i,\alpha})_{1 \leq \alpha \leq n_i}$ une composante irréductible de \bar{X}_{y_i} dans chaque orbite, $\mathcal{H}_{i,\alpha} = \text{Stab}(d_{i,\alpha})$, $L_{i,\alpha} = \bar{k}^{\mathcal{H}_{i,\alpha}}$. Alors

$$\bar{X}_{y_i} = \sum_{1 \leq \alpha \leq n_i} e_{i,\alpha} \cdot \left(\sum_{\tau \in \mathcal{H}_i/\mathcal{H}_{i,\alpha}} \tau \cdot d_{i,\alpha} \right)$$

où $e_{i,\alpha} \in \mathbb{N}$ est la multiplicité de $d_{i,\alpha}$ dans \bar{X}_{y_i} . Choisissons z_0 un point fermé de \bar{C} au-dessus duquel la fibre est non dégénérée (ou plus généralement un zéro-cycle de degré 1 de $Z_0(\bar{C})$ supporté par des points fermés au-dessus desquels la fibre est non dégénérée). Posons $d_0 = p^*(z_0) \in \text{Div } \bar{X}$. Alors pour toute fibre non dégénérée d au dessus d’un point $y \in \bar{C}$, nous avons $d - d_0 = p^*(y - z_0)$ soit $d = d_0$ dans $\text{Pic } \bar{X}/\text{Pic}^0 \bar{C}$, ce qui montre en particulier que la classe de d_0 dans $\text{Pic } \bar{X}/\text{Pic}^0 \bar{C}$ est stable par \mathcal{G} . Nous voyons ainsi que \hat{S}_0 est engendré par d_0 et par l’ensemble des composantes irréductibles des fibres dégénérées, et nous pouvons décrire \hat{S}_0 par la suite exacte de \mathcal{G} -modules suivante:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]y_i \longrightarrow \mathbb{Z}d_0 \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq \alpha \leq n_i}} \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_{i,\alpha}]d_{i,\alpha} \longrightarrow \hat{S}_0 \longrightarrow 0$$

$$y_i \longmapsto (-d_0, \bar{X}_{y_i}). \tag{3.6}$$

DÉFINITION 3.4. Soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d’une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. Pour chaque point fermé P de C , nous fixons comme ci-dessus un point géométrique y de \bar{C} au-dessus de P et des composantes irréductibles $(d_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n}$ de \bar{X}_y dans chaque orbite sous l’action de $\text{Gal}(\bar{k}/k(P))$; nous notons e_α leur multiplicité et L_α l’extension de $k(P)$ fixée par leur stabilisateur. Nous notons alors $N_P(k(P))$, le sous-groupe de $k(P)^*$ engendré par les éléments de la forme $N_{L_\alpha/k(P)}(x^{e_\alpha})$ quand x parcourt L_α^* et α parcourt $\{1, \dots, n\}$.

LEMME–DÉFINITION 3.5. Soit $p : X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d’une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. Il existe un isomorphisme δ :

$$\left(\prod_{P \in \mathcal{P}} k(P)^*/N_P(k(P)) \right) / k^* \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*),$$

où \mathcal{P} désigne l’ensemble des points de C au-dessus desquels les fibres sont dégénérées, où $N_P(k(P))$ est le sous-groupe de $k(P)^*$ défini ci-dessus, et où le quotient par k^* est diagonal.

Démonstration. Nous notons P_1, \dots, P_r les points de C au-dessus desquels les fibres sont dégénérées. Par passage à la cohomologie, la suite (3.6) donne la suite exacte suivante

$$k^* \times \prod_{i,\alpha} L_{i,\alpha}^* \longrightarrow \prod_i k(P_i)^* \xrightarrow{\tilde{\delta}} \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1\left(\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i,\alpha} \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_{i,\alpha}], \bar{k}^*\right)$$

où la flèche de gauche associe à un élément x de k^* , l'élément diagonal (x^{-1}, \dots, x^{-1}) , et associe à un élément y de $L_{i,\alpha}^*$, l'élément $N_{L_{i,\alpha}/k(P_i)}(y^{e_{i,\alpha}})$ de $k(P_i)^*$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1\left(\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i,\alpha} \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_{i,\alpha}], \bar{k}^*\right) &\simeq H^1\left(k, \bar{k}^* \times \prod_{i,\alpha} \text{Hom}(\mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_{i,\alpha}], \bar{k}^*)\right) \\ &= H^1(k, \bar{k}^*) \times \prod_{i,\alpha} H^1(L_{i,\alpha}, \bar{k}^*) = 0. \end{aligned}$$

ce qui prouve que l'homomorphisme $\tilde{\delta}$ induit par passage au quotient un isomorphisme entre $(\prod_{P \in \mathcal{P}} k(P)^*/N_P(k(P)))/k^*$ et $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*)$. □

(c) Définition de l'homomorphisme γ et commutativité du diagramme

Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. Nous notons \mathcal{P} l'ensemble des points de C au-dessus desquels les fibres sont dégénérées. D'après le Lemme 3.3 le groupe $k(C)_{\text{dn} \setminus \mathcal{P}}^*/k^*$ se surjecte le groupe $k(C)_{\text{dn}}^*/k^* \cdot N_{X_\eta}(k(C))$. Pour compléter le diagramme (3.1), nous définissons une application d'évaluation Γ de la manière suivante

DÉFINITION 3.6. Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible comme ci-dessus. Nous appelons Γ l'homomorphisme défini comme suit:

$$\begin{aligned} \Gamma: k(C)_{\text{dn} \setminus \mathcal{P}}^*/k^* &\rightarrow \left(\prod_{P \in \mathcal{P}} k(P)^*/N_P(k(P)) \right) / k^* \\ f &\mapsto (f(P))_{P \in \mathcal{P}} \end{aligned}$$

où $f(P) \in k(P)^*$ est la classe de f dans le corps résiduel $k(P)$.

PROPOSITION 3.7. Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. On note \mathcal{P} l'ensemble des points de C au-dessus desquels les fibres X_P sont dégénérées.

L'homomorphisme Γ , défini en 3.6, passe au quotient par le groupe des normes et induit un homomorphisme

$$\gamma: k(C)_{\text{dn}}^*/k^* \cdot N_{X_\eta}(k(C)) \rightarrow \left(\prod_{P \in \mathcal{P}} k(P)^*/N_P(k(P)) \right) / k^*$$

si et seulement si l'image par Φ_0 du groupe $A_0(X_P)$ est nulle pour tout point P de \mathcal{P} .

PROPOSITION 3.8. Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. On note \mathcal{P} l'ensemble des points de C au-dessus desquels les fibres X_P sont dégénérées. Quand l'image par Φ_0 de l'image du groupe $A_0(X_P)$ est nulle pour tout point P de \mathcal{P} (en particulier quand ces groupes $A_0(X_P)$ sont nuls), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH_0(X/C) & \xrightarrow{\Psi} & k(C)_{\text{dn}}^*/k^* \cdot N_{X_\eta}(k(C)) \\ \Phi_0 \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*) & \xleftarrow{\sim \delta} & \left(\prod_{P \in \mathcal{P}} k(P)^*/N_P(k(P)) \right) / k^* \end{array} \tag{3.1}$$

où Ψ est le morphisme décrit dans le paragraphe (a), où γ est le morphisme défini dans la Proposition 3.7, et où δ est l'isomorphisme défini dans le Lemme 3.5.

De cette proposition et de la Proposition 3.1, on déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.9. Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible comme dans la Proposition 3.8. Quand l'image par Φ_0 de l'image du groupe $A_0(X_P)$ est nulle pour tout point P de \mathcal{P} (en particulier quand ces groupes $A_0(X_P)$ sont nuls), il y a une suite exacte

$$\bigoplus_{P \in \mathcal{C}_0} A_0(X_P) \longrightarrow \text{Ker } \Phi_0 \longrightarrow \text{Ker } \gamma \longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

□

La démonstration des Propositions 3.7 et 3.8 découle directement du lemme suivant

LEMME 3.10. Soit $p: X \rightarrow C$ une k -fibration admissible au-dessus d'une k -courbe C , lisse, projective, géométriquement intègre. On note \mathcal{P} l'ensemble des

points de C au-dessus desquels les fibres X_P sont dégénérées, et \mathcal{D} l'ensemble des composantes irréductibles de ces fibres. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Ker}(Z_0(X) \setminus_{\mathcal{D}} \rightarrow CH_0(C)) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & k(C)_{\text{dn}, \mathcal{P}}^* / k^* \\
 \downarrow & & \downarrow \Gamma \\
 CH_0(X/C) & & \\
 \downarrow \Phi_0 & & \\
 \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*) & \xleftarrow{\tilde{\delta}} & \left(\prod_{P \in \mathcal{P}} k(P)^* / N_P(k(P)) \right) / k^*
 \end{array} \tag{3.7}$$

Démonstration des Propositions 3.7 et 3.8. La commutativité du diagramme (3.7) prouve déjà que pour tout point P de C n'appartenant pas à \mathcal{P} , l'image par Φ_0 du groupe $A_0(X_P)$ est nulle. Puis par une chasse au diagramme, en utilisant le diagramme (3.5), elle prouve que le morphisme Γ passe au quotient par le groupe des normes si et seulement si l'image par Φ_0 du groupe $A_0(X_P)$ est nulle pour tout point P de \mathcal{P} . Ce qui démontre la Proposition 3.7.

Ainsi sous l'hypothèse que l'image par Φ_0 du groupe $A_0(X_P)$ est nulle pour tout point P de \mathcal{P} , le morphisme γ est défini par passage au quotient du morphisme Γ , et la surjectivité des deux flèches verticales de gauche du diagramme (3.5) implique que le diagramme (3.1) est nécessairement commutatif. \square

Démonstration du Lemme 3.10. Pour simplifier la démonstration, nous supposons l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 dans $Z_0(C)$. J'établis dans ma thèse la commutativité du diagramme (3.7) sans supposer l'existence d'un tel cycle (voir [Fr1], Lemme 5.9).

Fixons $z \in \text{Ker}(Z_0(X) \setminus_{\mathcal{D}} \rightarrow CH_0(C))$. Soit $z_0 \in Z_0(C)$ un zéro-cycle de degré 1. Puisque C est lisse, nous pouvons supposer que z_0 a son support en dehors de $p_*(|z|) \cap \mathcal{P}$. Notons \bar{z}_0 le relevé de z_0 dans $Z_0(\bar{C})$ et $d_0 = p^*(\bar{z}_0) \in \text{Div } \bar{X}$. Appelons P_1, \dots, P_r les points de C au-dessus desquels les fibres sont dégénérées; nous reprenons les notations du paragraphe (b). Choisissons $g_z \in k(C)_{\text{dn}, \mathcal{P}}^*$ telle que $p_*(z) = \text{div}_C g_z$, alors $\tilde{\Psi}(z)$ est la classe de g_z dans $k(C)_{\text{dn}, \mathcal{P}}^* / k^*$. L'extension $\delta(\Gamma(g_z))$ est obtenue en poussant la suite (3.6) par le \mathcal{G} -homomorphisme $\varepsilon_z : \oplus_i \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i] \cdot y_i \rightarrow \bar{k}^*$ défini par $\varepsilon_z(y_i) = g_z(P_i) = [y_i, g_z]_{\bar{C}}$. Par ailleurs, puisque

\bar{z}_0 et d_0 sont stables par \mathcal{G} , nous avons un diagramme commutatif de suites exactes de \mathcal{G} -modules

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i]y_i & \longrightarrow & \mathbb{Z}d_0 \oplus \bigoplus_{i,\alpha} \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_{i,\alpha}]d_{i,\alpha} & \longrightarrow & \hat{S}_0 \longrightarrow 0 & (3.6) \\
 & & \downarrow y_i & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & (y_i - \bar{z}_0, 1) & & & & & \\
 0 & \longrightarrow & (\text{Div}^0 \bar{C}_{\setminus p_*(\{z\})} \oplus O_{\bar{X},z}^*/O_{\bar{C},p_*(\{z\})}^*) & \longrightarrow & \text{Div} \bar{X}_{\setminus z} & \longrightarrow & \hat{S} \longrightarrow 0 & (1.1)
 \end{array}$$

où la flèche du milieu associe à un générateur le diviseur qui lui correspond dans $\text{Div} \bar{X}$ et où la flèche de droite est l’injection naturelle de \hat{S}_0 dans \hat{S} . Ainsi, l’extension $\Phi_0(z) \in \text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*)$ est obtenue en poussant la suite (3.6) par le \mathcal{G} -homomorphisme $\varepsilon'_z : \bigoplus_i \mathbb{Z}[\mathcal{G}/\mathcal{H}_i].y_i \longrightarrow \bar{k}^*$ défini par $\varepsilon'_z(y_i) = \phi_z(y_i - \bar{z}_0, 1) = [y_i, g_z]_{\bar{C}}/[z_0, g_z]_{\bar{C}}$, où ϕ_z est l’homomorphisme défini en 1.3. Les homomorphismes ε_z et ε'_z étant égaux à un élément de \bar{k}^* près, ils définissent la même extension dans $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\hat{S}_0, \bar{k}^*)$. Ceci prouve que $\Phi_0(z) = \delta \circ \Gamma \circ \tilde{\Psi}(z)$, c’est-à-dire que le diagramme (3.7) est commutatif. \square

4. Application au cas des fibrations en variétés de Severi–Brauer et résultats de finitude sur le groupe $CH_0(X/C)$

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux fibrations dont la fibre générique est une variété de Severi–Brauer. Pour étudier le groupe $CH_0(X/C)$ de telles fibrations, nous appliquons les résultats des paragraphes précédents (Proposition 2.1 et Corollaire 3.9) à des modèles particuliers construits à partir de schémas de Severi–Brauer d’ordres héréditaires au-dessus d’ouverts affines de la courbe considérée. La construction de ces modèles et les résultats utilisés sur leurs fibres spéciales sont donnés ci-dessous. On peut les trouver détaillés dans ma thèse ([Fr1], par. 3 et 4), et ils feront l’objet d’une publication séparée ([Fr2]).

La finitude du groupe $CH_0(X/C)$ se ramène alors à la finitude du noyau de $\tilde{\gamma}_A$ (Définition 4.2). Cette dernière méthode a déjà été utilisée par Salberger et la plupart des résultats de ce paragraphe sur $\text{Ker} \tilde{\gamma}_A$ lui sont dus (Proposition 4.4, Corollaire 4.6 et partie (ii) du Théorème 4.7).

NOTATIONS. Si K est un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel k de caractéristique 0, la suite spectrale de Hochschild–Serre relative au groupe d’inertie I de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ définit pour tout entier i un morphisme résidu, que nous noterons r^i , de $H^{i+1}(K, \mu_n^{\otimes j})$ dans $H^i(k, H^1(I, \mu_n^{\otimes j})) = H^i(k, \mu_n^{\otimes(j-1)})$, pour tout entier j .

Soit C une courbe lisse au-dessus d’un corps k de caractéristique 0, de corps des fonctions $K = k(C)$. Désignons par C_0 l’ensemble des points de C de dimension 0. Soit $P \in C_0$; comme C est lisse, le corps K est muni d’une valuation discrète

correspondant à l'anneau local $O_{C,P}$. Notons \widehat{K}_P le complété de K pour cette valuation. En composant les applications de restrictions de $H^j(K, \cdot)$ dans $H^j(\widehat{K}_P, \cdot)$ avec les morphismes définis ci-dessus, nous obtenons des morphismes résidus r_P^i de $H^{i+1}(K, \mu_n^{\otimes j})$ dans $H^i(k(P), \mu_n^{\otimes(j-1)})$, où $k(P)$ est le corps résiduel en P . Ces morphismes sont égaux aux résidus définis par la suite de localisation en cohomologie étale. On désigne ensuite par $H_{nr}^{i+1}(K/C, \mu_n^{\otimes j})$ le noyau de l'application $\bigoplus_{P \in C_0} r_P^i : H^{i+1}(K, \mu_n^{\otimes j}) \rightarrow \bigoplus_{P \in C_0} H^i(k(P), \mu_n^{\otimes(j-1)})$.

Soit A une K -algèbre simple centrale d'indice n . L'algèbre A définit un élément de $H^2(K, \mu_n)$. Pour tout point $P \in C_0$, nous notons L_P l'extension cyclique de $k(P)$ déterminée par le résidu $r_P^1(A)$, c'est-à-dire que L_P est l'extension de $k(P)$ fixée par le noyau de $r_P^1(A)$ vu comme un élément de $\text{Hom}(\text{Gal}(\bar{k}/k(P)), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^1(k(P), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Pour presque tout point fermé P de C , l'extension $L_P/k(P)$ est triviale.

DÉFINITION. Soient k un corps, C une k -courbe lisse, projective, géométriquement intègre et A une $k(C)$ -algèbre simple centrale. Nous dirons qu'une k -variété X est un modèle d'Artin au-dessus de C associé à l'algèbre A , s'il existe un recouvrement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ d'ouverts affines de C tels que $X|_{U_i}$ est la composante connexe contenant la fibre générique d'un schéma de Severi–Brauer d'ordre associé à un ordre héréditaire de la $k(C)$ -algèbre simple centrale A (pour la définition des schémas de Severi–Brauer d'ordres voir [A] et [Br]). De tels modèles existent. On peut en construire en considérant des modèles obtenus, sur un recouvrement fini $\{U_i = \text{Spec } R_i\}_{i \in I}$ d'ouverts affines de C , à partir de R_i -ordres maximaux de l'algèbre A (pour l'existence d'un tel ordre voir [Re] 10.4). Les modèles construits sur ce recouvrement ayant tous la même fibre générique, on peut les recoller au-dessus de C .

Soit X un modèle d'Artin au-dessus de C , associé à une $k(C)$ -algèbre simple centrale A . La variété X est lisse, projective, géométriquement intègre, munie d'un morphisme propre, dominant de X sur C , dont la fibre générique est la variété de Severi–Brauer associée à l'algèbre A . Ses fibres spéciales au-dessus de C sont décrites dans [Fr2], paragraphe 2. Pour tout point fermé P de C , les composantes irréductibles géométriques de la fibre X_P se groupent, sous l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k(P))$, en orbites qui ont toutes pour stabilisateur $\text{Gal}(\bar{k}/L_P)$. En particulier pour un point P de C au-dessus duquel la fibre spéciale n'est pas dégénérée, l'extension $L_P/k(P)$ est triviale. Les groupes $N_P(k(P))$ définis en 3.4, correspondent alors aux groupes $N_{L_P/k(P)}(L_P^*)$. Le principal résultat obtenu par l'étude de ces fibres spéciales, est le suivant (voir [Fr2], Théorème 2.6):

PROPOSITION 4.1. *Soit k un corps parfait. Soit C une k -courbe lisse, projective, géométriquement intègre. Soit X un modèle d'Artin au-dessus de C associé à une $k(C)$ -algèbre simple centrale A . Alors, dans chacune des deux situations suivantes*

- (i) Si l’algèbre A est d’indice sans facteur carré.
- (ii) Si le corps k est de dimension cohomologique égale à 1.

le groupe $A_0(X_P)$ est nul pour tout point fermé P de C . □

Rappelons la définition du groupe des normes divisorielles de C (voir [Sa1]), que nous avons donnée dans le paragraphe 3 pour une fibration admissible $p: X \rightarrow C$ et que nous donnons ici pour une $k(C)$ -algèbre simple centrale A (les deux définitions sont équivalentes quand la fibre générique du morphisme p est la variété de Severi–Brauer associée à l’algèbre A). Soit A une $k(C)$ -algèbre simple centrale, le groupe des normes réduites de l’algèbre A , noté $\text{Nrd } A^*$, est le sous-groupe de $k(C)^*$ engendré par les normes de toutes les extensions finies de corps de $k(C)$ qui déploient A . On appelle ensuite groupe des normes divisorielles, et on note $k(C)_{\text{dn}}^*$, le sous groupe des éléments de $k(C)^*$ qui en tout point P de la courbe C s’écrivent comme le produit d’une unité en P par un élément du groupe des normes réduites.

DÉFINITION 4.2. Soit k un corps de caractéristique 0. Soit C une k -courbe lisse, de corps des fonctions $k(C)$. Soit A une $k(C)$ -algèbre simple centrale. Nous appelons $\tilde{\gamma}_A$ l’homomorphisme défini comme suit (voir aussi [Sa1], Définition 2.12)

$$\tilde{\gamma}_A : k(C)_{\text{dn}}^* / \text{Nrd } A^* \rightarrow \prod_{P \in C_0} k(P)^* / N_{L_P/k(P)}(L_P^*)$$

$$f \mapsto (f(P))_{P \in C_0},$$

où pour $f \in k(C)_{\text{dn}}^* / \text{Nrd } A^*$ et pour un point P de C , $f(P)$ désigne la classe dans $k(P)$ d’un représentant de f inversible en P . Le fait que cette application est bien définie est une conséquence du Lemme 4.3 ci-dessous (voir aussi [Sa1], 2.11). Nous appelons ensuite γ_A l’homomorphisme obtenu en quotientant $\tilde{\gamma}_A$ par k^*

$$\gamma_A : k(C)_{\text{dn}}^* / k^* \cdot \text{Nrd } A^* \rightarrow \left(\prod_{P \in C_0} k(P)^* / N_{L_P/k(P)}(L_P^*) \right) / k^*$$

où le quotient par k^* dans le second terme est diagonal. Si X est un modèle d’Artin au-dessus de C , associé à l’algèbre A , cet homomorphisme s’identifie à celui de la Proposition 3.7.

LEMME 4.3. Soit K un corps muni d’une valuation discrète, de corps résiduel k de caractéristique zéro et d’anneau des entiers O_K . Soit A une K -algèbre simple centrale d’indice n ; soit L l’extension cyclique de k définie par le résidu $r^1(A) \in H^1(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. La classe dans k de tout élément de $O_K^* \cap \text{Nrd } A^*$ appartient au groupe $N_{L/k}(L^*)$.

Démonstration. Pour démontrer le lemme, nous pouvons nous restreindre au cas d’un corps complet. Soit alors $x \in O_K^* \cap \text{Nrd } A^*$. Il existe une extension finie M/K déployant A et une unité y de M^* telles que $x = N_{M/K}(y)$. Appelons e

l'indice de ramification de M/K et M' le corps résiduel de M . Les applications de restriction et les morphismes résidus induisent le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^2(K, \mu_n) & \xrightarrow{r^1} & H^1(k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ \downarrow \text{res}_{M/K} & & \downarrow e \times \text{res}_{M'/k} \\ H^2(M, \mu_n) & \xrightarrow{r^1} & H^1(M', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \end{array}$$

Ainsi $e \times \text{res}_{M'/k}(r^1(A)) = 0$, ce qui revient à dire que le noyau de l'homomorphisme $r^1(A)$ restreint à $\text{Gal}(\bar{k}/M')$ définit une extension cyclique E/M' de degré e' divisant e . Nous avons nécessairement $L \subset E$. Alors nous avons $\overline{N_{M/K}(x)} = N_{M'/k}(\bar{y}^e) = N_{E/k}(\bar{x}^{e/e'})$ qui est bien une norme pour l'extension L/k . \square

DÉFINITION. Soient K un corps parfait et $A \in H^2(K, \mu_n)$ une K -algèbre simple centrale. On désigne par χ l'application bord de K^* dans $H^1(K, \mu_n)$. On associe à tout élément $x \in K^*$ l'élément $A \cup \chi_x \in H^3(K, \mu_n^{\otimes 2})$. Si $x \in \text{Nrd } A^*$, alors $x = N_{L/K}(y)$ où L est une extension finie de K qui déploie A et $y \in L^*$, et on prouve en utilisant la formule $a \cup \text{cor}(b) = \text{cor}(\text{res}(a) \cup b)$ que $A \cup \chi_x = 0$. On définit ainsi un homomorphisme c_A :

$$\begin{aligned} c_A: K^*/\text{Nrd } A^* &\rightarrow H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \\ x &\mapsto A \cup \chi_x. \end{aligned}$$

De même, soient $\delta \in H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{Hom}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ et L l'extension cyclique de K associée à δ , on définit un homomorphisme c_δ :

$$\begin{aligned} c_\delta: K^*/N_{L/K}(L^*) &\rightarrow H^2(K, \mu_n) \\ x &\mapsto \delta \cup \chi_x. \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.4. Soit k un corps de caractéristique 0. Soit C une k -courbe lisse, de corps des fonctions $k(C)$. Soit A une $k(C)$ -algèbre simple centrale d'indice n sans facteur carré. L'homomorphisme c_A induit une injection

$$\text{Ker } \tilde{\gamma}_A \hookrightarrow H_{\text{nr}}^3(k(C)/C, \mu_n^{\otimes 2}).$$

Démonstration de la Proposition 4.4. Ce résultat a déjà été obtenu par Salberger ([Sa1], 4.3, 4.5 et 4.8). Il est d'abord nécessaire de montrer que l'homomorphisme c_A envoie $\text{Ker } \tilde{\gamma}_A$ sur $H_{\text{nr}}^3(k(C)/C, \mu_n^{\otimes 2})$. Puis le résultat suivant est dû à Merkuriev et Suslin (voir [M-S], Th 12.2). Soit F un corps et soit D une F -algèbre simple centrale d'indice n sans facteur carré, premier à la caractéristique de F . Soit

x dans F^* , alors $x \in \text{Nrd } D^*$ si et seulement si $\chi_x \cup D = 0$ dans $H^3(F, \mu_n^{\otimes 2})$. On en déduit l’injectivité annoncée.

Pour montrer que c_A envoie $\text{Ker } \tilde{\gamma}_A$ sur $H_{\text{nr}}^3(k(C)/C, \mu_n^{\otimes 2})$ (voir aussi [Sa1], Lemme 4.5), il suffit d’établir la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 K_{\text{dn}}^*/\text{Nrd } A^* & \xrightarrow{c_A} & H^3(K, \mu_n^{\otimes 2}) \\
 \downarrow & & \downarrow r^2 \\
 \kappa^*/N_{L/\kappa}(L^*) & \xrightarrow{c_{r^1(A)}} & H^2(\kappa, \mu_n)
 \end{array}$$

où K est un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel κ de caractéristique 0, où A est une K -algèbre simple centrale d’indice n et où L/κ est l’extension cyclique associée à $r^1(A)$. C’est-à-dire montrer que si α est un élément de $H^2(K, \mu_n^{\otimes 2})$, pour toute unité x de K^* nous avons $r^2(\alpha \cup \chi_x) = r^1(\alpha) \cup \chi_{\bar{x}}$ où \bar{x} désigne la classe de x dans κ . Puisque x est une unité de K^* , l’élément $\chi_x \in H^1(K, \mu_n)$ provient par inflation de $H^1(\kappa, \mu_n)$ et nous avons en fait $\chi_x = \text{inf}_{K/\kappa}(\chi_{\bar{x}})$. Il suffit donc de vérifier que pour tout $\beta \in H^1(\kappa, \mu_n)$, nous avons $r^2(\alpha \cup \text{inf}_{K/\kappa}(\beta)) = r^1(\alpha) \cup \beta$. Cette formule est prouvée dans le cours de J.-P. Serre donné au collège de France en 1991–92. Elle utilise la description explicite suivante des morphismes résidus en termes de cocycles. Soit G un groupe pro-fini. Soit I un sous-groupe distingué de G , de dimension cohomologique égale à 1. Soit M un G -module de torsion. Tout $i+1$ -cocycle à valeur dans M est cohomologue à un cocycle normalisé $a_{g_1, g_2, \dots, g_{i+1}}$, où $a_{g_1, g_2, \dots, g_{i+1}}$ ne dépend que de la classe de g_2, \dots, g_{i+1} dans G/I et le résidu r^i de $H^{i+1}(G, M)$ dans $H^i(G/I, H^1(I, M))$ est défini par $r^i(a)_{\sigma_1, \dots, \sigma_i}(h) = a_{h, g_1, \dots, g_i}$ où $h \in I, \sigma_1, \dots, \sigma_i \in G/I$ et g_1, \dots, g_i sont des relevés de $\sigma_1, \dots, \sigma_i$ dans G . \square

COROLLAIRE 4.5. *Soit k un corps de nombres, soit C une k -courbe lisse projective géométriquement intègre. Si A est une $k(C)$ -algèbre simple centrale d’indice sans facteur carré, alors le noyau de l’application*

$$\tilde{\gamma}_A : k(C)_{\text{dn}}^*/\text{Nrd } A^* \rightarrow \prod_{P \in C_0} k(P)^*/N_{L_P/k(P)}(L_P^*)$$

est fini. De plus, pour presque toute place v de k , l’application $\tilde{\gamma}_{A_v}$ est injective, où $A_v = A \otimes_{k(C)} \widehat{k(C)}_P$.

Démonstration. Ce corollaire découle directement de la Proposition 4.4 et du résultat suivant dû à Kato (voir [K] Théorème 0.6). Soit C une courbe lisse projective géométriquement intègre au-dessus d’un corps de nombres k , de corps

des fonctions K . On désigne par $P(k)$ l'ensemble des places de k ; on note $C_v = C \times_k k_v$ et $K_v = k_v(C_v)$ le corps des fonctions de C_v , alors

$$H_{\text{nr}}^3(K/C, \mu_n^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{v \in P(k)} H_{\text{nr}}^3(K_v/C_v, \mu_n^{\otimes 2}).$$

De plus le groupe $H_{\text{nr}}^3(K_v/C_v, \mu_n^{\otimes 2})$ est nul si C a bonne réduction en v et sinon il est fini (voir [K], Corollaire 2.9). □

Le corollaire suivant de la Proposition 4.4 a déjà été obtenu par Salberger ([Sa1], Proposition 4.10) et est inspiré de [CT-Sa2], Th. 4.

COROLLAIRE 4.6. *Soit k un corps de caractéristique 0. Soit A une $k(t)$ -algèbre simple centrale d'indice sans facteurs carrés. Soit X un modèle d'Artin au-dessus de \mathbb{P}_k^1 associé à l'algèbre A . Si la variété X possède un zéro-cycle de degré 1, alors l'application*

$$\tilde{\gamma}_A : k(t)_{\text{dn}}^* / \text{Nrd } A^* \rightarrow \prod_{P \in \mathbb{P}_k^1} k(P)^* / N_{L_P/k(P)}(L_P^*)$$

est injective.

Démonstration. Supposons d'abord que la variété X possède un point k -rationnel dans une fibre spéciale non dégénérée au-dessus d'un point k -rationnel P de \mathbb{P}_k^1 . Notons $\widehat{k(t)}_P$ le complété de $k(t)$ pour la valuation discrète induite par le point P . La classe de l'algèbre $A \otimes_{k(t)} \widehat{k(t)}_P$ est nulle dans $H^2(\widehat{k(t)}_P, \mu_n)$. Ainsi, pour tout $f \in k(t)_{\text{dn}}^* / \text{Nrd } A^*$, la restriction de $c_A(f)$ à $H^3(\widehat{k(t)}_P, \mu_n^{\otimes 2})$ est nulle. Or si $f \in \text{Ker } \tilde{\gamma}_A$, d'après la Proposition 4.4, $c_A(f) \in H_{\text{nr}}^3(k(C)/C, \mu_n^{\otimes 2}) = H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$. L'inflation de $H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$ dans $H^3(\widehat{k(t)}_P, \mu_n^{\otimes 2})$ étant injective, nous avons alors $c_A(f) = 0 \in H^3(k(t), \mu_n^{\otimes 2})$. L'injectivité de l'homomorphisme c_A prouve alors que l'homomorphisme $\tilde{\gamma}_A$ est injectif si l'algèbre A est d'indice sans facteur carré.

Quand la variété X possède un zéro-cycle de degré 1, par un argument de norme nous pouvons nous ramener au cas ci-dessus. En effet, soit $z = \sum_{i=1}^s a_i M_i$ un zéro-cycle de degré 1 de $Z_0(X)$, nous pouvons supposer que ce cycle a son support en dehors des fibres dégénérées. Notons $K_i = k(C) \otimes_k k(M_i)$ et $m_i = [k(M_i) : k]$. Soit $f \in k(t)_{\text{dn}}^* / \text{Nrd } A^*$ telle que $\tilde{\gamma}_A(f) = 1$. Puisque $X \times_k k(M_i)$ possède un point rationnel dans une fibre non dégénérée, nous avons $N_{K_i/k(C)}(f) = f^{m_i} = 1$ dans $k(t)_{\text{dn}}^* / \text{Nrd } A^*$. D'où $f = 1$ dans $k(t)_{\text{dn}}^* / \text{Nrd } A^*$, car $\sum_{i=1}^s a_i m_i = 1$. □

THÉORÈME 4.7. *Soit k un corps. Soient X une k -variété et C une k -courbe, lisses, projectives, géométriquement intègres, munies d'un k -morphisme $p: X \rightarrow C$, propre, dominant, dont la fibre générique est une variété de Severi–Brauer d'indice sans facteurs carrés. Dans les deux situations suivantes:*

- (i) *Le corps k est un corps de nombres,*
- (ii) *Le corps k est un corps de type fini sur \mathbb{Q} , la courbe C est la droite projective et la variété X possède un zéro-cycle de degré 1,*

le groupe $CH_0(X/C)$ est fini.

Notons que la partie (ii) de ce théorème, conséquence du Corollaire 4.6, a déjà été obtenu par Salberger ([Sa1], Théorème 5.2b).

Démonstration. Appelons A la $k(C)$ -algèbre simple centrale associée à la fibre générique de $p: X \rightarrow C$. Pour connaître le groupe $CH_0(X/C)$, nous pouvons nous ramener à n’importe quel modèle d’Artin associé à A au-dessus de C . En effet, si X' est un tel modèle, les fibres génériques de X/C et de X'/C étant isomorphes, les variétés X et X' sont birationnellement équivalentes au-dessus de C (voir E.G.A IV.8.8.2.5). De plus les variétés X et X' sont projectives et lisses, les groupes $CH_0(X/C)$ et $CH_0(X'/C)$ sont donc isomorphes. En effet, le groupe de Chow de dimension 0 est un invariant birationnel pour les variétés lisses projectives (voir [Fu], 16.1.11, où ce théorème est énoncé pour un corps algébriquement clos mais démontré pour un corps quelconque, ou voir [CT-C] par. 6); la démonstration donnée par Fulton permet d’énoncer cette invariance birationnelle, sous la forme plus générale ci-dessus.

Fixons X' un modèle d’Artin au-dessus de C associé à l’algèbre A . Si le corps k est un corps de type fini sur \mathbb{Q} , d’après la Proposition 2.1, l’application caractéristique Φ de $CH_0(X'/C)$ dans $\text{Ext}_{\mathcal{G}}^1(\text{Pic}\bar{X}'/\text{Pic}^0\bar{C}, \bar{k}^*)$ a une image finie. De plus la variété X'_η étant une variété de Severi–Brauer, nous avons $\text{Pic} X'_{\bar{k}(\eta)} \simeq \mathbb{Z}$, ce qui implique que les homomorphismes Φ et Φ_0 ont même noyau. Si de plus l’indice de l’algèbre A est sans facteur carré, d’après la Proposition 4.1, pour chaque point fermé P de C , le groupe $A_0(X'_P)$ est nul. D’après le Corollaire 3.9, le noyau de l’application caractéristique est alors isomorphe au noyau de l’homomorphisme γ_A défini en 4.2. Par une chasse au diagramme, on montre que $\text{Ker } \gamma_A$ est un quotient de $\text{Ker } \tilde{\gamma}_A$. Or, d’après les Corollaires 4.5 et 4.6, le groupe $\text{Ker } \tilde{\gamma}_A$ est fini dans les situations (i) et (ii) du Théorème 4.7, ce qui achève la démonstration. \square

THÉORÈME 4.8. *Soit k un corps de nombres. Soient X une k -variété et C une k -courbe, lisses, projectives, géométriquement intègres, munies d’un k -morphisme $p: X \rightarrow C$, propre dominant dont la fibre générique est une variété de Severi–Brauer d’indice sans facteurs carrés. Alors, pour presque toute place v de k , le groupe $CH_0(X_v/C_v)$ est nul, où $X_v = X \times_k k_v$ (resp. $C_v = C \times_k k_v$).*

Démonstration. La démonstration est identique à celle du théorème précédent. Le résultat découle alors du Lemme 2.2 (voir Remarque 2.3), et de la seconde partie du Corollaire 4.5. \square

THÉORÈME 4.9. *Soit k un corps de caractéristique 0 et de dimension cohomologique égale à 1. Soient X une k -variété et C une k -courbe, lisses, projectives,*

géométriquement intègres, munies d'un k -morphisme $p: X \rightarrow C$, propre, dominant et dont la fibre générique est une variété de Severi–Brauer d'indice quelconque. Alors le groupe $CH_0(X/C)$ est nul.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il est inutile de considérer l'application caractéristique. Appelons A la $k(C)$ -algèbre simple centrale associée à la fibre générique de X/C . Nous pouvons considérer, comme dans les démonstrations précédentes, que X est un modèle d'Artin au-dessus de C associé à l'algèbre A . Nous avons d'après la Proposition 3.1, la suite exacte suivante

$$\bigoplus_{P \in C_0} A_0(X_P) \rightarrow CH_0(X/C) \rightarrow k(C)^*/k^* \cdot \text{Nrd } A^*.$$

Puisque k est un corps de caractéristique 0 et de dimension cohomologique égale à 1, le corps $k(C)$ est parfait et de dimension cohomologique égale à 2 et le groupe $k(C)^*/\text{Nrd } A^*$ est alors nul (voir [Su] Théorème 24.8). De plus, d'après la Proposition 4.1, le groupe $A_0(X_P)$ est nul pour tout point fermé P de C . Le groupe $CH_0(X/C)$ est donc nul. \square

Remerciements

Je remercie vivement Jean-Louis Colliot-Thélène pour ses remarques très utiles sur l'élaboration de ce texte.

Bibliographie

- [A] Artin, M.: *Left Ideals in Maximal Orders*, in *Brauer Groups in Ring Theory and Algebraic Geometry*, L. N. M. 917, Springer, 1982, pp. 182–193.
- [Ba] Bass, H.: *Algebraic K-Theory*, Mathematics Lecture Note Series, New-York, W.A. Benjamin Inc., 1968.
- [Bl] Bloch, S.: On the Chow groups of certain rational surfaces, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 14(4) (1981), 41–59.
- [Br] Brzezinski, J.: Brauer–Severi Schemes of Orders, in *Orders and their applications*, L. N. M. 1142, Springer, 1984, pp. 18–49.
- [CT-C] Colliot-Thélène, J.-L. et Coray, D.: L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, *Compositio Math.* 39 (1979), 301–332.
- [CT-Sa1] Colliot-Thélène, J.-L. et Sansuc, J.-J.: La R-équivalence sur les tores, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 10(4) (1977), 175–230.
- [CT-Sa2] Colliot-Thélène, J.-L. et Sansuc, J.-J.: On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch, *Duke Math. J.* 48 (1981), 421–447.
- [CT-Sk] Colliot-Thélène, J.-L. et Skorobogatov, A.-N.: Groupes de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques, *K-Theory* 7 (1993), 477–500.
- [Fr1] Frossard, E.: *Arithmétique des Variétés Fibrées en Variétés de Severi–Brauer au-dessus d'une Courbe de Genre Quelconque*, Thèse, Université de Paris-Sud, 1995.
- [Fr2] Frossard, E.: Fibres dégénérées des schémas de Severi–Brauer d'ordres, to appear in *Journal of Algebra*.
- [Fu] Fulton, W.: *Intersection Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer, 1984.

- [G] Gros, M.: 0-cycles de degré zéro sur les surfaces fibrées en coniques, *J. für die reine und ang. Math.* 373 (1987), 166–184.
- [K] Kato, K.: A Hasse principle for two dimensional global fields, *J. für die reine und ang. Math.* 366 (1986), 142–181.
- [L] Lang, S.: *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.
- [M-S] Merkuriev, A. S. et Sulsin, A. A.: K -cohomology of Severi–Brauer varieties and the norm residue homomorphism, *Math. USSR Izvestiya* 21(2) (1983), 306–339.
- [\tilde{O}] Ōkochi, T.: *On the Chow Group of a Conic Bundle Surface*, Master Thesis, Tokyo, 1984.
- [Re] Reiner, I.: *Maximal Orders*, Academic Press, London, 1975.
- [Ro] Roquette, P.: Einheiten und Divisorenklassen in endlich erzeugbaren Körpern, *Jahresbericht d. Deutschen Math.-Verein.* 60 (1958), 1–27.
- [Sa1] Salberger, P.: Galois descent and class group of orders, in *Orders and their applications*, L. N. M. 1142, Springer, 1984, pp. 239–255.
- [Sa2] Salberger, P.: *K -theory of Orders and their Brauer–Severi Schemes*, Thèse, Université de Göteborg, 1985.
- [Se] Serre, J.-P.: *Corps Locaux*, Hermann, Paris, 1965.
- [Su] Suslin, A. A.: Algebraic K -theory and the norm residue homomorphism, *J. Soviet Math.* 30 (1985), 2556–2611.