SUR UNE QUESTION DE LOCALISATION

par M. P. MALLIAVIN-BRAMERET

(Received 7 October, 1979)

Il est connu [**4**] que si $A = U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur un corps F de caractéristique 0, tout idéal (complètement) premier P a pour localisé $R = A_{\mathrm{p}}$ un anneau régulier au sens de [**5**]; c'est-à-dire que le radical de Jacobson $\mathfrak{M}$ de R est engendré par une suite centralisante régulière de longueur $n = \text{K-dim } R$, soit $(z_1, \ldots, z_n)$. Dans le cas très particulier où P est l'idéal d'augmentation de $U(\mathfrak{g})$ il suffit de prendre pour $(z_1, \ldots, z_n)$ l'image dans $U(\mathfrak{g})_{\mathrm{P}}$ d'une base de $\mathfrak{g}$ sur F adaptée à la suite centrale ascendante de $\mathfrak{g}$.

Un problème qu'il est alors naturel de se poser est de savoir si étant donné A, P, R, $\mathfrak{M} = (z_1, \ldots, z_n)$ comme précédemment et étant donné $1 \leqslant t \leqslant n$, l'anneau $R/(z_1, \ldots, z_t)$ localisé en un idéal premier quelconque est régulier au sens précédent.

En adoptant le raisonnement de [**4**], T. Levasseur a donné pour $t = 1$ une réponse positive.

Nous nous proposons de donner une réponse positive au problème précédent, pour tout t dans le cas où P est un idéal maximal et où le corps F est algébriquement clos.

Dans toute la suite les anneaux considérés sont unitaires, noethériens à droite et à gauche, leurs idéaux premiers sont complètement premiers et localisables au sens classique.

DÉFINITION. Soit R (resp. $U(\mathfrak{g})$) un anneau local régulier au sens de Walker (respectivement une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur un corps F) $\mathfrak{M}$ le radical de R (respectivement P un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})$). Un système régulier de générateurs de $\mathfrak{M}$ (respectivement P) soit $z_1, \ldots, z_n$, est dit *privilégié* si pour tout t, $1 \leqslant t \leqslant n$ l'anneau quotient $R/(z_1, \ldots, z_t)$ (respectivement $U(\mathfrak{g})/(z_1, \ldots, z_t)$) localisé en un idéal premier quelconque est régulier.

Evidemment si l'idéal maximal P de $U(\mathfrak{g})$ possède un système privilégié de générateurs, alors le radical de l'anneau $R = U(\mathfrak{g})_P$ en possède un aussi.

On va démontrer que l'idéal maximal P de $U(\mathfrak{g})$ possède un système privilégié de générateurs, lorsque le corps de base F est algébriquement clos.

Il est connu [**3**] que P possède un système centralisant de générateurs. On utilisera ici une démonstration calquée sur celle de [**3**]. On commencera par rappeler la proposition suivante [**2**].

PROPOSITION 1 (T. Levasseur). *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente sur un corps* F *de caractéristique* 0 (*non nécessairement algébriquement clos*). *Soit* Q *un idéal premier de l'algèbre enveloppante* $U(\mathfrak{g})$, *soit* $(z_1, \ldots, z_t)$ *un système centralisant et régulier de générateurs du radical de* $U(\mathfrak{g})_Q = R$. *Alors pour tout idéal premier* P *de* $R/z_1R = A$ *l'anneau local* A_P *est régulier.*

LEMME. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur un corps F algébriquement clos de caractéristique* 0. *Soit z un élément non nul du centre de $\mathfrak{g}$ et soit P un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})$ contenant $z-1$. Alors P possède un système privilégié de générateurs* $(z-1, x_2, \ldots, x_n)$.

Preuve. On procède par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ sur F, le cas où $\dim_F \mathfrak{g} = 1$ étant évident. On peut aussi supposer que $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne. On considère deux cas; supposons d'abord que P contienne un élément non nul, soit z_1, du centre de $\mathfrak{g}$. Puisque $P \neq U(\mathfrak{g})$ on a $1 \notin P$ et donc $z_1 \neq z$. Notons $\bar{P}$ l'image de P dans $U(\mathfrak{g})/(z_1) = U(\mathfrak{g}/Fz_1)$: c'est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g}/Fz_1)$ qui contient $\bar{z}-1$ où $\bar{z}$ designe la classe de z modulo l'idéal Fz_1. D'après l'hypothèse de récurrence, $\bar{P}$ possède un système de générateurs privilégiés soit $(\bar{z}-1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_s)$. Alors la suite $z_1, z-1, x_2, \ldots, x_s$ est un système régulier centralisant de générateurs de P et est privilégié.

Montrons que $(z-1, z_1, x_2, \ldots, x_s)$ est privilégié. Il est certain que si $\mathfrak{Q}$ est un idéal premier de $A = U(\mathfrak{g})/(z-1, z_1, \ldots)$ alors $A_{\mathfrak{Q}}$ est régulier d'après l'hypothèse de récurrence. Si $\mathfrak{Q}$ est un idéal premier de $A = U(\mathfrak{g})/(z-1)$ alors $A_{\mathfrak{Q}}$ est régulier d'après la proposition 1 et [**3**].

En second cas supposons que P ne rencontre pas le centre Z de $\mathfrak{g}$. Puisque P est un idéal maximal de $U(g)$, $P \cap Z(g)$ est un idéal maximal de $Z(g)$, où $Z(g)$ est le centre de $U(g)$, [**1**, 4.1.7]. Alors, puisque F est algébriquement clos, le centre Z est de dimension 1 sur F et on peut supposer que $Z = Fz$.

Il existe dans $\mathfrak{g}$ un quadruplet réduisant, [**1**, 4.7.7], z, x, y, $\mathfrak{h}$ où $[x, y] = z$ où $\mathfrak{h}$ est le centralisateur de y dans $\mathfrak{g}$ et où $\mathfrak{g} = Fx \oplus \mathfrak{h}$. Si I désigne l'idéal bilatère engendré par $z-1$ dans $U(\mathfrak{g})$ alors l'anneau $U(\mathfrak{g})/I$ est isomorphe à $A_1 \otimes_F U(\bar{\mathfrak{h}})/(\bar{z}-1)U(\bar{\mathfrak{h}})$ où $\bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}/Fy$, $\bar{z}$ est la classe de z modulo Fy et A_1 désigne l'algèbre de Weyl sur F d'ordre [**1**, lemme 4.7.8]. Dans l'isomorphisme précédent, l'idéal P a pour image $A_1 \otimes_F \bar{P}'$ où $\bar{P}' = P'/(\bar{z}-1)U(\bar{\mathfrak{h}})$, P' étant un idéal maximal de $U(\bar{\mathfrak{h}})$ contenant $\bar{z}-1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, l'idéal P' possède un système générateur privilégié commençant par $\bar{z}-1$, soit $\bar{z}-1, x'_2, \ldots, x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_t \in U(\bar{\mathfrak{h}})$. Soit $y_i \in U(\mathfrak{g})$ $i = 2, \ldots, t$, des éléments tels que $y_i = 1 \otimes x'_i$ modulo $(z-1)$.

On vérifie comme en [**3**] que $(z-1, y_2, \ldots, y_t)$ est une suite centralisante. Montrons que cette suite est privilégiée. Si $\mathfrak{Q}$ est un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ contenant $(z-1, y_2, \ldots, y_i)$ alors:

$$\bar{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{Q}}{(z-1)} \cong A_1 \otimes \bar{\mathfrak{Q}}'$$

où $\bar{\mathfrak{Q}}'$ est un idéal premier de $U(\bar{\mathfrak{h}})/\bar{z}-1)$. On a aussi

$$\frac{U(\mathfrak{g})}{(z-1, y_2, \ldots, y_i)} \cong A_1 \otimes \frac{U(\bar{\mathfrak{h}})}{(\bar{z}-1, x'_2, \ldots, x'_i)}.$$

Posons

$$A = U(\mathfrak{g})/(z-1, y_2, \ldots, y_i) \quad \text{et} \quad B = U(\bar{\mathfrak{h}})/(\bar{z}-1, x'_2, \ldots, x'_i).$$

Notons $\bar{\mathfrak{Q}}''$ l'idéal premier de B image de $\bar{\mathfrak{Q}}'$.

Par hypothèse de récurrence $B_{\mathfrak{Q}''}$ est régulier. Soit $v_1, \ldots, v_h$ un système de paramètres de $B_{\mathfrak{Q}'}$ et soit $S = B - \bar{\mathfrak{Q}}''$; alors $S^{-1} A \cong A_1 \otimes B_{\mathfrak{Q}'}$. Soit $w_1, \ldots, w_h$, $w_i = 1 \otimes v_i$. Alors il est évident que $w_1, \ldots, w_h$ est un système centralisant régulier de $S^{-1}A$, et donc de $A_{\mathfrak{Q}}$, $S^{-1}A$ est un anneau possédant un unique idéal bilatère maximal á savoir $A_1 \otimes \bar{\mathfrak{Q}}''$. $B_{\mathfrak{Q}''}$ et cet idéal est engendré par $w_1, \ldots, w_h$. Donc puisque $A_{\mathfrak{Q}}$ s'obtient en localisant $S^{-1}A$ en son radical, $\bar{\mathfrak{Q}} A_{\mathfrak{Q}}$ est engendré par les $w_1, \ldots, w_h$.

Proposition 2. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie nilpotente sur un corps F algébriquement clos. Tout idéal maximal P de* $U(\mathfrak{g})$ *possède un système privilégié de générateurs.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur $\dim_F \mathfrak{g}$, la proposition étant évidente si $\dim_F \mathfrak{g} = 1$. On suppose $\mathfrak{g}$ non abélienne. Si P rencontre le centre Z de $\mathfrak{g}$ en un élément non nul z alors $P/(z)$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g}/Fz) = U(\mathfrak{g})/(z)$. D'où l'existence d'un système privilégié de générateurs pour $P/(z)$ soit $(\bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_t)$. Alors $(z, z_2, \ldots, z_t)$ est un système privilégié de générateurs pour P.

Si $P \cap Z = (0)$, alors la dimension de Z sur F est égal à 1. Soit $Z = Fz$. On peut supposer que $z - 1 \in P$, ceci parce que P est maximal, le centre de $U(\mathfrak{g})/P$ est F [**1**, Theorème 4.5.7]. Posons $I = (z-1)$; c'est un idéal premier [**3**] et on applique le lemme.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, (Gauthier-Villars, 1974).

2. T. Levasseur, *Séminaire Dubreil* 78/79 (Springer-Verlag), à paraître

3. M. P. Malliavin, Régularité locale d'algèbres universelles. *C. R. Acad. Sc. Paris* t. **283** (1976), 923–925.

4. P. F. Smith, On non commutative regular rings, *Glasgow Math. J.* **17** (1976), 98–102.

5. R. Walker, Local rings and normalizing sets of elements, *Proc. London Math. Soc.* (3) **24** (1972), 27–45.

10, rue Saint Louis en l'Ile
75004 Paris