BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 08A05, 06D05, 06A12
VOL. 32 (1985), 1-32. (06D15, 06D20, 06D30)

PIGGYBACK-DUALITÄTEN

B.A. DAVEY UND H. WERNER

Let $\mathbf{A}$ be the variety generated by some finite distributive-lattice-ordered algebra $\underline{P}$, say a Heyting algebra. By restricting Priestley's duality for the class $\mathbf{D}$ of distributive lattices to $\mathbf{A}$ we obtain a topological representation for the algebras in $\mathbf{A}$; in fact this yields a dual category-equivalence between $\mathbf{A}$ and a category $\mathfrak{Y}$ of ordered topological spaces. Unfortunately the category $\mathfrak{Y}$ has certain drawbacks. Our main result, The Piggyback Duality Theorem, shows that by riding piggyback on the given duality for the reduct $\mathbf{D}$ we can obtain a more natural dual category $\mathbf{X}$ for $\mathbf{A}$ in which products are cartesian with the dual equivalence given by natural hom-functors $\mathbf{A}(-, \underline{P})$ and $\mathbf{X}(-, \underset{\sim}{P})$, properties not shared by the category $\mathfrak{Y}$.

The Piggyback Duality Theorem is applied here to yield dualities, some new and some known, for varieties of Ockham algebras, distributive pseudocomplemented lattices, double Stone algebras, Heyting algebras and relatively pseudocomplemented semilattices, the last example riding piggyback on the Hofmann-Mislove-Stralka duality for semilattices.

Received 3 December 1984. A short version of this paper in English but without proofs can be found in Davey and Werner [7]. This research was carried out while the second author held a visiting research fellowship at La Trobe University and was supported by ARGS Grant B81152871.

In dem Artikel "Dualities and equivalences for varieties of algebras" haben wir einen allgemeinen Zugang zu topologischen Darstellungen für Algebren gegeben, der alle bisher bekannten Dualitäten vereinheitlicht. Die topologischen Darstellungen entstehen immer so, dass wir eine Algebra $\underline{P}$ haben, auf deren Grundmenge noch eine topologische (Relational-) Struktur $\underset{\sim}{P}$ definiert ist, so dass für jede zu $\underset{\sim}{P}$, ähnliche Struktur $\underset{\sim}{X}$ die Menge aller stetigen Morphismen $\mathrm{Mor}_c(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{P})$ von $\underset{\sim}{X}$ in $\underset{\sim}{P}$ auf natürliche Weise eine Unteralgebra von $\underline{P}^X$ wird. Die Frage ist, wie die Struktur $\underset{\sim}{P}$ gewählt werden muss, damit sich jede Algebra einer vorgegebenen Klasse $\mathbb{A}$ von Algebren auf diese Weise als eine Algebra $\mathrm{Mor}_c(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{P})$ von stetigen Morphismen darstellen lässt. Die obengenannte Arbeit gibt eine Antwort auf diese Frage, indem sie klärt, welche Eigenschaften die auf $\underset{\sim}{P}$ gewählte Struktur haben muss, jedoch nur im Fall einer endlichen Algebra $\underline{P}$ mit einem Mehrheits-Term m (d.h. $\underline{P}$ erfüllt $m(x, y, \ldots, y) = y = m(y, x, y, \ldots, y) = \ldots = m(y, \ldots, y, x)$) kann sogar eine Anweisung gegeben werden, welche Relationen und welche Topologie nun tatsächlich genommen werden soll. In den übrigen Fällen bleibt die Auswahl dem Gespür und der Intuition des Anwenders überlassen. Wir wollen nun in dieser Arbeit den Zugang etwas spezialisieren, und zwar auf eine Weise, die uns sofort zeigt, welche Struktur $\underset{\sim}{P}$ tragen muss, auch wenn die Algebra $\underline{P}$ unendlich ist oder keinen Mehrheits-Term besitzt. Die Idee dazu stammt schon aus früheren Arbeiten über Dualitäten, in denen man Darstellungen dadurch erzeugt hat, dass man auf den Algebren $\underline{A} \in \mathbb{A}$, die man darstellen wollte, eine abgeleitete Struktur $\underline{\underline{A}}$ findet, für die man schon eine wohlbekannte Dualität zur Verfügung hat. (Z.B. bilden die zentralen Idempotente eines unitären Ringes eine Boolesche Algebra, die sich mit Hilfe der Stone-Dualität darstellen lässt.) Die Aufgabe ist es dann, die Darstellung der abgeleiteten Struktur auf die ursprüngliche Struktur zu übertragen. Wenn dies immer möglich ist, so erhalten wir eine Dualität, die auf der schon bekannten Dualität *huckepack*-reitet (*piggyback*). Auf dieser Idee basierend wollen wir den neuen Zugang zur Dualitätstheorie hier entwickeln, da aber der prinzipielle Aufbau derselbe bleibt wie in dem obengegenannten Artikel, wollen wir zunachst die fundamentalen Ideen aus Davey und Werner [*6*] wiederholen, wo sich auch die hier verwendeten Notationen und Begriffe nachlesen lassen.

1. Generelle Voraussetzungen

In Davey und Werner [6] gingen wir von folgender Situation aus, die wir auch hier zugrunde legen:

Wir nehmen an, wir haben eine Algebra $\underline{P}$ und eine topologische Struktur $\underset{\sim}{P}$ auf derselben unterliegenden Menge P und es gilt:

(PR1) alle Operationen von $\underline{P}$ sind stetig in Bezug auf die Topologie von $\underset{\sim}{P}$;

(PR2) alle Relationen (Operationen, partiellen Operationen) von $\underset{\sim}{P}$ sind *algebraisch* über $\underline{P}$, d.h. sie sind Unteralgebren der entsprechenden Potenz $\underline{P}^n$ von $\underline{P}$.

Unter diesen Voraussetzungen ist für jede Algebra $\underline{A}$ desselben Typs wie $\underline{P}$ die Homomorphismenmenge $\mathrm{Hom}(\underline{A}, \underline{P})$ eine abgeschlossene Unterstruktur $\underline{A}^*$ der Potenz $\underset{\sim}{P}^A$ von $\underset{\sim}{P}$; ebenso ist für jede topologische Struktur $\underset{\sim}{X}$ desselben Typs wie $\underset{\sim}{P}$ die Menge $\mathrm{Mor}_c(\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{P})$ aller stetigen Morphismen von $\underset{\sim}{X}$ nach $\underset{\sim}{P}$ eine Unteralgebra $\underset{\sim}{X}^+$ der Potenz $\underline{P}^X$ von $\underline{P}$. Betrachen wir also die Klassen $\mathbb{A} = \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underline{P})$ aller Algebren, die in eine Potenz von $\underline{P}$ eingebettet werden können und $\mathbb{X} = \mathbb{E}\mathbb{P}(\underset{\sim}{P})$ aller topologischen Strukturen, die als abgeschlossene Unterstrukturen in eine Potenz von $\underset{\sim}{P}$ eingebettet werden können, so liefern uns diese Überlegungen zwei kontravariante Hom-Funktoren

$$^* : \mathbb{A} \to \mathbb{X} \quad \text{und} \quad ^+ : \mathbb{X} \to \mathbb{A} .$$

Wichtig sind dabei noch die *Auswertungs-Abbildungen*

$$e_{\underline{A}} : \underline{A} \to \underline{A}^{*+} , \quad e_{\underline{A}}(a) : f \mapsto f(a) , \quad a \in A \in \mathbb{A} , \quad f \in \underline{A}^* ;$$

$$\varepsilon_X : X \to X^{+*} , \quad \varepsilon_X(x) : \varphi \mapsto \varphi(x) , \quad x \in X \in \mathbb{X} , \quad \varphi \in X^+ ;$$

diese sind für $\underline{A} \in \mathbb{A}$ und $X \in \mathbb{X}$ stets Einbettungen.

(In der Tat kann man sogar sehen, dass es sich hier um zwei adjungierte Funktoren handelt, und die Auswertungs-Abbildungen sind gerade die Einheiten dieser Adjunktion.)

Unter den Voraussetzungen (PR1) und (PR2) nennen wir die Funktoren $^* : \mathbb{A} \to \mathbb{X}$, $^+ : \mathbb{X} \to \mathbb{A}$ eine *natürliche Proto-Dualität* und, falls zusätzlich für alle $A \in \mathbf{A}$ die Abbildungen $e_{\underline{A}}$ surjektiv - und damit Isomorphismen - sind, so heisst *, $^+$ eine *natürliche Dualität.*

Bevor wir diesen Ansatz weiter spezialisieren, wollen wir aus Davey und Werner [6] die fundamentalen Ideen für den Beweis wiederholen, wann eine Proto-Dualität eine Dualität ist. Die Analyse dieser Frage vereinfacht sich sehr, wenn man sie in einzelnen Schritten löst.

Zunächst machen wir die einfache Beobachtung, dass für die freie α-erzeugte $\mathbf{A}$-algebra $\underline{F}$ (α Ordinalzahl) stets $\underline{F}^* \simeq \underset{\sim}{P}^{\alpha}$ in $\mathbf{X}$ gilt. Daraus ergibt sich sofort:

(1) Für jede freie n-erzeugte $\mathbf{A}$-algebra $\underline{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist $e_{\underline{F}} : \underline{F} \to \underline{F}^{*+} = \mathrm{Mor}_c(\underset{\sim}{P}^n, \underset{\sim}{P})$ genau dann surjektiv, wenn jeder stetige Morphismus $\varphi : \underset{\sim}{P}^n \to \underset{\sim}{P}$ bereits eine Term-Funktion auf $\underline{P}$ ist.

(2) Ist $e_{\underline{F}}$ bereits für alle endlich erzeugten freien $\mathbf{A}$-Algebren $\underline{F}$ surjektiv, so ist $e_{\underline{F}}$ genau dann auch für alle unendlich erzeugten freien $\mathbf{A}$-Algebren $\underline{F}$ surjektiv, wenn jeder stetige Morphismus $\varphi : \underset{\sim}{P}^I \to \underset{\sim}{P}$ nur von endlich vielen Stellen $i_1, \ldots, i_k \in I$ abhängt. (φ *hängt nur von* $i_1, \ldots, i_k$ *ab*, wenn aus $a(i_j) = b(i_j)$ für $j = 1, \ldots, k$ folgt $\varphi(a) = \varphi(b)$.)

(3) Ist $e_{\underline{F}}$ bereits surjektiv und $f : \underline{F} \twoheadrightarrow A \in \mathbf{A}$ ein surjektiver Homomorphismus, $\underline{F}^* \simeq \underset{\sim}{P}^I$, so ist $f^* : \underline{A}^* \rightarrowtail \underset{\sim}{P}^I$ eine Einbettung und $e_{\underline{A}}$ ist genau dann surjektiv, wenn es zu jedem $\varphi \in \underline{A}^{*+}$, d.h. $\varphi : \underline{A}^* \to \underset{\sim}{P}$, eine Diagrammerganzung

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^* \arrow[r, tail] \arrow[dr, "\varphi"'] & \underset{\sim}{P}^I \arrow[d, dashed] \\ & \underset{\sim}{P} \end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

gibt (dies ist ein Spezialfall der Injektivität von $\underset{\sim}{P}$ in $\mathbf{X}$).

Wenn $\underset{\sim}{P}$ die diskrete Topologie trägt, so kann in (1) die Bedingung der Stetigkeit fallengelassen werden, d.h. die Relationen auf $\underset{\sim}{P}$ müssen genug sein, um die Term-Funktionen auf $\underline{P}$ zu charakterisieren.

Ist $\underset{\sim}{P}$ darüberhinaus noch endlich, so hängt eine stetige Abbildung $\varphi : \underset{\sim}{P}^{I} \to \underset{\sim}{P}$ automatisch nur von endlich vielen Stellen ab. Nur die Bedingung (3) ist sehr unangenehm nachzuprüfen, da sie auf alle Elemente von $\mathbf{A}$ bzw. von $\mathbf{X}$ Bezug nimmt. In der Praxis zeigt man die Injektivität von $\underset{\sim}{P}$ in $\mathbf{X}$. Eine weitere hinreichende Bedingung, die die Bedingungen in (1), (2) und (3) gleichzeitig erfüllt ist die, dass $\underline{P}$ eine endliche Algebra mit einem n-stelligen Mehrheits-Term m ist, dann wählt man als Relationen auf $\underset{\sim}{P}$ gerade die Unteralgebren von $\underline{P}^{n-1}$. Nach dem Satz von Baker und Pixley [1] ist dann (1) sowie (3) für endliches I automatisch erfüllt und die Übertragung auf unendliches I geht problemlos, wenn $\underset{\sim}{P}$ nur endlich viele Relationen hat.

In Davey und Werner [6] haben wir mit diesem Ansatz sehr einfache Beweise für Stone's Dualität für Bollesche Algebren, Priestley's Dualität für distributive Verbände mit 0 und 1 sowie Hofmann, Mislove und Stralka Dualität für Halbverbände gegeben. Diese Dualitäten werden uns noch später in den Beispielen entgegentreten.

2. Huckepack Dualitäten

Für dieses Kapitel setzen wir voraus, dass eine Proto-Dualität $^{*} : \mathbf{A} \to \mathbf{X}$, $^{+} : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ wie in §1 gegeben ist, die auf dir Algebra $\underline{P}$ und der topologischen Struktur $\underset{\sim}{P}$ basiert. Nun setzen wir zusätzlich voraus, dass $\underline{P}$ einen Redukt $\underline{\underline{P}}$ in einer Prävarietät $\mathbf{D} = \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underline{\underline{D}})$ hat, für die es bereits eine naturliche Dualitat

$$^{\cap} : \mathbf{D} \to \mathbf{R} := \mathbb{E}\mathbb{P}(\underset{\sim}{D}) \ , \quad ^{\cup} : \mathbf{R} \to \mathbf{D} \ \text{ gibt.}$$

Nun folgt sofort, dass auch jede Algebra $\underline{A} \in \mathbf{A} = \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underline{P})$ einen Redukt $\underline{\underline{A}}$ in $\mathbf{D}$ hat, also gibt es zwei Auswertungs-Abbildungen $e_{\underline{A}} : \underline{A} \rightarrowtail \underline{A}^{*+}$ und $e_{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{A}} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \underline{\underline{A}}^{\cap\cup}$, die von A starten, dabei ist die zweite bijektiv. Um nun zu zeigen, dass auch $e_{\underline{A}}$ surjektiv ist, genügt es, eine injektive

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

Abbildung $\Delta : \underline{A}^{*+} \rightarrowtail \underline{\underline{A}}^{\sim}$ zu finden, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{A}^{*+} \arrow[dd, dashed, tail, "\Delta"] \\
A \arrow[ur, "e_{\underline{A}}"] \arrow[dr, "e_{\underline{\underline{A}}}"'] & \\
 & \underline{\underline{A}}^{\sim}
\end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzt, $\Delta \circ e_{\underline{A}} = e_{\underline{\underline{A}}}$.

Wir wollen uns hier auf einen ganz natürlichen Weg beschränken, diese Abbildung Δ zu konstruieren. Beachte, dass für Δ keine Erhaltungseigenschaften gefordert werden.

Sei $\alpha : \underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{D}}$ ein $\mathbf{D}$-Homomorphismus, dann definiert α für alle $A \in \mathbf{A}$ eine Abbildung $\Phi : \underline{A}^{*} \to \underline{\underline{A}}^{\cap}$, $f \mapsto \alpha \circ f$.

Wir suchen für jeden $\mathbf{X}$-Morphismus $\varphi : \underline{A}^{*} \to \underset{\sim}{P}$ genau einen $\mathbf{R}$-Morphismus $\Delta(\varphi) : \underline{\underline{A}}^{\cap} \to \underset{\sim}{D}$, und wir wollen die Eindeutigkeit dadurch erzwingen, dass wir zusätzlich fordern, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^{*} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi"'] & \underset{\sim}{P} \arrow[d, "\alpha"] \\
\underline{\underline{A}}^{\cap} \arrow[r, "\Delta(\varphi)"'] & \underset{\sim}{D}
\end{tikzcd}$$

stets kommutativ ist. In diesem Fall ist $\Delta(\varphi)$ zumindest auf $\underline{\underline{A}}^{0} := \{\alpha \circ f \mid f \in A^{*}\}$ dem Bild von Φ eindeutig festgelegt. Wir setzen für den Augenblick voraus, dass wir zunächst $\Delta(\varphi) : \underline{\underline{A}}^{0} \to \underset{\sim}{D}$ konstruieren.

LEMMA 2.1. $\Delta(\varphi) : \underline{\underline{A}}^{0} \to \underset{\sim}{D}$ *existiert wenn jede maximale* $\mathbf{A}$-*Unteralgebra von* $\ker(\alpha) \subseteq P \times P$ *, die nicht in* $\mathrm{id}_{\underline{P}}$ *enthalten ist, von* φ *erhalten wird.*

Beweis. $\Delta(\varphi)$ existiert genau dann, wenn $\ker(\alpha \circ \varphi) \supseteq \ker(\Phi)$ gilt. Ist $f, g \in \underline{A}^{*}$, $f \neq g$ und $\Phi(f) = \Phi(g)$, so ist $U = \{(f(a), g(a)) \mid a \in A\}$ eine Unteralgebra von $\underline{P}^{2}$, da $f, g : \underline{A} \to \underline{P}$ Homomorphismen sind, und $\Phi(f) = \Phi(g)$ bedeutet für alle $a \in A$,

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

$\alpha(f(a)) = \alpha(g(a))$, was $U \subseteq \ker(\alpha)$ bedeutet. Wegen $f \neq g$ ist $U \nsubseteq \mathrm{id}_{\underline{P}}$ und daher in einer maximalen $\mathbf{A}$-Unteralgebra $V \nsubseteq \mathrm{id}_{\underline{P}}$ von $\ker(\alpha)$ enthalten, die von φ erhalten wird. Es folgt $(\varphi(f), \varphi(g)) \in V \subseteq \ker(\alpha)$ und damit $(\alpha \circ \varphi)(f) = (\alpha \circ \varphi)(g)$. □

Aus dem Bewis ergibt sich sofort der

ZUSATZ 2.2. *Ist* $\mathrm{id}_{\underline{P}}$ *die grösste* $\mathbf{A}$-*Unteralgebra von* $\ker(\alpha)$, *so ist* Φ *für alle* $A \in \mathbf{A}$ *injektiv.*

LEMMA 2.3. $\Delta(\varphi)$ *erhält eine Relation* r *auf* $\underset{\sim}{D}$, *falls* φ *jede maximale* $\mathbf{A}$-*Unteralgebra von* $\alpha^{-1}(r)$ *erhält.*

Beweis. Sei $(f_1, \ldots, f_n) \in \underline{A}^*$ und für alle $a \in A$ sei $(\alpha(f_1(a)), \ldots, \alpha(f_n(a))) \in r$ (d.h. $(\Phi(f_1), \ldots, \Phi(f_n)) \in r$). Es gibt also eine maximale $\mathbf{A}$-Unteralgebra $V \subseteq \alpha^{-1}(r)$, die für alle $a \in A$, $(f_1(a), \ldots, f_n(a)) \in V$ erfüllt. Es folgt also

$$(\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)) \in V \subseteq \alpha^{-1}(r) ,$$

was $(\alpha(\varphi(f_1)), \ldots, \alpha(\varphi(f_n))) \in r$ nach sich zieht. □

LEMMA 2.4. $\Delta(\varphi)$ *ist stetig, falls* $\underset{\sim}{P}$ *kompakt und* α *stetig ist.*

Beweis. Wenn $\underset{\sim}{P}$ kompakt ist, so ist auch $\underline{A}^*$ als abgeschlossene Teilmenge einer Potenz von $\underset{\sim}{P}$ kompakt. Da $\underline{A}^\cap$ Hausdorff ist, ist $\Phi : \underline{A}^* \twoheadrightarrow \underline{A}^0 \subseteq \underline{A}^\cap$ abgeschlossen, denn Φ ist stetig, da α stetig ist. Nun gilt $\alpha \circ \varphi = \Delta(\varphi) \circ \Phi$ und Φ ist abgeschlossen, also ist $\Delta(\varphi) : \underline{A}^0 \to \underset{\sim}{D}$ stetig. □

LEMMA 2.5. *Seien* $\overline{\varphi}, \overline{\psi} : \underline{\underline{A}}^\cap \to \underset{\approx}{D}$ *mit* $\overline{\varphi} \circ \Phi = \alpha \circ \varphi$, $\overline{\psi} \circ \Phi = \alpha \circ \psi$. *Aus* $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$ *folgt* $\varphi = \psi$, *falls es eine Menge* $G \subseteq \mathrm{Hom}(\underline{P}, \underline{P})$ *von Endomorphismen von* $\underline{P}$ *gibt, die alle von* φ *und* ψ *erhalten werden, so dass die* $\mathbf{D}$-*Homomorphismen* $\alpha \circ g : \underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{D}}$ $(g \in G)$ *die Menge* P *trennen.*

Beweis. Seien $\varphi, \psi : \underline{A}^* \to \underline{P}$ verschieden, also für ein $f \in \underline{A} \to \underline{P}$ gilt $\varphi(f) \neq \psi(f)$. Nach Voraussetzung gibt es also ein $g \in G$, so dass

$\alpha \circ g$ die Elemente $\varphi(f)$ und $\psi(f)$ trennt, also $\alpha\big(g(\varphi(f))\big) \neq \alpha\big(g(\psi(f))\big)$. Nun wird g von φ und ψ erhalten, was $g\big(\varphi(f)\big) = \varphi(g \circ f)$ und $g\big(\psi(f)\big) = \psi(g \circ f)$ bedeutet. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(\alpha \circ g \circ f) &= (\overline{\varphi} \circ \Phi)(g \circ f) = (\alpha \circ \varphi)(g \circ f) \\ &\neq (\alpha \circ \psi)(g \circ f) = (\overline{\psi} \circ \Phi)(g \circ f) = \overline{\psi}(\alpha \circ g \circ f) . \qquad \square \end{aligned}$$

Ist nun Φ nicht surjektiv, also $\underline{\underline{A}}^{0} \neq \underline{\underline{A}}^{\cap}$, so haben wir $\Delta(\varphi)$ noch auf ganz $\underline{\underline{A}}^{\cap}$ auszudehnen. Wegen 2.5 kann es höchstens eine solche Erweiterung geben, und die Existenz der Erweiterung ist wieder eine Injektivitätsbedingung, aber diesmal in $\mathbf{R}$ und nicht in $\mathbf{X}$:

$$\text{(I)} \qquad \begin{tikzcd} \underline{\underline{A}}^{0} \arrow[rr, tail] \arrow[dr, "\Delta(\varphi)"'] & & \underline{\underline{A}}^{\cap} \arrow[dl, dashed] \\ & \underset{\approx}{D} & \end{tikzcd}$$

Diese Diagrammergänzung existiert z.B., ween $\underset{\approx}{D}$ injektiv in $\mathbf{R}$ ist und $\underline{\underline{A}}^{0}$ zu $\mathbf{R}$ gehört. In allen bekannten Dualitäten ist tatsächlich $\underset{\approx}{D}$ injektiv in $\mathbf{R} = \mathbf{EP}(\underset{\approx}{D})$, allerdings ist $\underline{\underline{A}}^{0}$ nicht immer in $\mathbf{R}$, weil $\underline{\underline{A}}^{0}$ nicht notwendig unter den Operationen auf $\underset{\approx}{D}$ bzw. $\underline{\underline{A}}^{\cap}$ abgeschlossen ist. Ist $\underline{\underline{A}}^{0}$ keine Unteralgebra von $\underline{\underline{A}}^{\cap}$, so haben wir auf andere Weise zu zeigen, dass wenigstens die eingeschrankte Injektivitätsbedingung (I) noch gilt.

Wir haben jetzt alle Bedingungen zusammengetragen, die wir für eine Dualität benötigen:

THEOREM 2.6 (Piggyback-Dualitätis-Theorem). *Sei* $^{*} : \mathbf{A} \to \mathbf{X}$, $^{+} : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ *eine natürliche Proto-Dualität, die durch die Algebra* $\underline{P} \in \mathbf{A}$ *und die kompakte topologische Struktur* $\underset{\sim}{P} \in \mathbf{X}$ *induziert wird.* $\underline{P}$ *habe einen Redukt* $\underline{\underline{P}} \in \mathbf{D} = \mathbf{IISP}(\underline{\underline{D}})$ *und* $^{\cap} : \mathbf{D} \to \mathbf{R} = \mathbf{EP}(\underset{\approx}{D})$, $^{\cup} : \mathbf{R} \to \mathbf{D}$ *sei eine durch* $\underline{\underline{D}}$ *und* $\underset{\approx}{D} \in \mathbf{R}$ *induzierte natürliche Dualität.*

Dann ist *, $^{+}$ *eine Dualität, vorausgesetzt, es gibt einen* $\mathbf{D}$*-Homomorphismus* $\alpha : \underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{D}}$ *, der folgenden Bedingungen genügt:*

(a) jede $\mathbf{A}$*-Unteralgebra* $\underline{V}$ *von* $\underline{P} \times \underline{P}$ *, die maximal ist bzgl.*

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

$\mathrm{id}_{\underline{P}} \nsupseteq V \subseteq \ker(\alpha)$ *gehört zu den Relationen von* $\underset{\sim}{P}$ *;*

(b) für jede Relation r *auf* $\underset{\approx}{D}$ *(die Operationen auf* $\underset{\approx}{D}$ *werden hier als Relationen behandelt) gehört jede* $\mathbf{A}$*-Unteralgebra* $\underline{V}$ *von* $\underline{P}^n$ *, die maximal ist bzgl.* $V \subseteq \alpha^{-1}(r)$ *zu den Relationen von* $\underset{\sim}{P}$ *;*

(c) es gibt eine Menge $G \subseteq \mathrm{End}(\underline{P})$ *von Endomorphismen von* $\underline{P}$ *, die zu den Relationen von* $\underset{\sim}{P}$ *gehören und für die die Abbildungen* $\alpha \circ g$ $(g \in G)$ *die Menge* P *trennen;*

(d) für alle $\underline{A} \in \mathbf{A}$ *kann die Abbildung* $\Delta(\varphi) : \underline{\underline{A}}^0 \to \underset{\approx}{D}$ *zu einem Morphismus* $\hat{\Delta}(\varphi) : \underline{\underline{A}}^{\cap} \to \underset{\approx}{D}$ *fortgesetzt werden.*

ZUSATZ 2.7. *Jede der folgenden Bedingungen impliziert (d):*

(d) für alle* $\underline{A} \in \mathbf{A}$ *ist* $\Phi : \underline{A}^* \to \underline{\underline{A}}^{\cap}$ *surjektiv;*

*(d**)* $\underset{\approx}{D}$ *ist injektiv in* $\mathbf{R}$ *und hat keine Operationen.*

Beachte, dass nur die Bedingungen *(d)* und *(d*)* sich auf alle $A \in \mathbf{A}$ beziehen, jedoch *(a)*, *(b)*, *(c)* und *(d**)* sich nur auf $\underline{P}$, $\underset{\sim}{P}$, $\underset{\approx}{D}$ und α beziehen und deshalb leicht nachzuweisen sind.

In allen Fällen, die wir hier behandeln, sind die zugrundeliegenden Dualitäten *voll*, d.h. für alle $\underset{\approx}{R} \in \mathbf{R}$ ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon_{\underset{\approx}{R}} : \underset{\approx}{R} \to \underset{\approx}{R}^{\cup\cap}$ ein Isomorphismus, und ferner ist bei diesen Dualitäten stets $\underset{\approx}{D}$ injektiv in $\mathbf{R}$.

Unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen zeigt es sich, dass $\underline{\underline{A}}^0$ sets ein Erzeugendensystem von $\underline{\underline{A}}^{\cap}$ in $\mathbf{R}$ ist, also ist entweder $\Phi(\underline{A}^*) = \underline{\underline{A}}^0 = \underline{\underline{A}}^{\cap}$ oder $\underline{\underline{A}}^0 \notin \mathbf{R}$ und in diesem Fall muss $\underset{\approx}{D}$ Operationen besitzen.

ZUSATZ 2.8. *Ist* $^{\cap}$, $^{\cup}$ *eine volle Dualitat,* $\underset{\approx}{D}$ *injektiv in* $\mathbf{R}$ *und sind (a)-(d) aus* 2.6 *erfullt, so wird* $\underline{\underline{A}}^{\cap}$ *von* $\underline{\underline{A}}^0$ *erzeugt.*

Beweis. Sei $\underline{\underline{A}}^0 \subseteq \underset{\approx}{R} \subsetneq \underline{\underline{A}}^{\cap}$, $\underset{\approx}{R} \in \mathbf{R}$. Dann gibt es zwei verschiedene stetige Morphismen $\gamma, \delta : \underline{\underline{A}}^{\cap} \to \underset{\approx}{D}$, die auf $\underset{\approx}{R}$ übereinstimmen. Nun ist

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

$\gamma = e_{\underline{\underline{A}}}(a)$, $\delta = e_{\underline{\underline{A}}}(b)$ für geeignete $a, b \in A$, $a \neq b$. Nun wähle $\varphi := e_{\underline{A}}(a) : \underline{A} \to \underline{P}$, $\psi := e_{\underline{A}}(b) : \underline{A} \to \underline{P}$, so gilt $\gamma \circ \Phi = \alpha \circ \varphi$ und $\delta \circ \Phi = \alpha \circ \psi$ und $\gamma \circ \Phi = \delta \circ \Phi$, da γ und δ auf $\underset{\approx}{R}$ und insbesondere auf $\underline{\underline{A}}^0 = \Phi(\underline{A}^*)$ übereinstimmen. Es gilt also $\gamma \circ \Phi = \alpha \circ \varphi = \alpha \circ \psi$, was nach 2.5 auch $\varphi = \psi$ nach sich zieht. Wegen $a \neq b$ ist aber $\varphi \neq \psi$ ein Widerspruch. Die Annahme $\underset{\approx}{R} \neq \underline{\underline{A}}^{\cap}$ ist deshalb falsch gewesen. □

3. Beispiele

Wir wollen nun das Piggyback-Dualitäts-Theorem auf einige Beispiele anwenden. Die meisten der Beispiele haben die Dualität für beschränkte distributive Verbände aus Priestley [*11*] als Grundlage, die anderen basieren auf der Dualität für beschränkte Halbverbände aus Hofmann, Mislove und Stralka [*10*]. Die Abbildung $\alpha : P \to D = \{0, 1\}$ kann also stets als *charakteristische Funktion* einer Teilmenge M von P aufgefasst werden, d.h. $\alpha(x) = 1 \Leftrightarrow x \in M$. Die Relationen, die als Unteralgebren von $\ker(\alpha)$, $\alpha^{-1}(\leq)$ bzw. $\alpha^{-1}(\wedge)$ auftreten, sind nur von wenigen Typen:

(i) *interne Homomorphismen* von $\underline{P}$, das sind Homomorphismen $f : \underline{Q} \to \underline{R}$ wobei $\underline{Q}$ und $\underline{R}$ Unteralgebren von $\underline{P}$ sind; ist dabei f injektiv, sprechen wir von einem *internen Isomorphismus*. Die Relation $\{(x, f(x)) \mid x \in Q\}$ nennen wir auch den *Graph* von f , wir wollen aber im folgenden keinen Unterschied zwischen f und seinem Graph machen.

(ii) *Halbordnungen*.

(iii) *Fast-Halbordnungen*, das sind transitive, antisymmetrische Relationen, die aber nicht reflexiv zu sein brauchen.

Das erste Beispiel zeigt, dass sich die Theorie der Piggyback-Dualitäten auch mit grossem Erfolg auf unendliche Algebren $\underline{P}$ anwenden lässt. Für weitere Informationen über die Strukturtheorie der hier angesprochenen Beispiele verweisen wir auf die Arbeiten: Balbes [*2*], Davey [*4*], Davey [*5*], Goldberg [*8*, *9*], Urquhart [*13*] und man kann weitere Referenzen in Davey und Werner [*6*] finden.

3.1. OCKHAM-ALGEBREN

Die Varietät der Ockham-Algebren (siehe Goldberg [*8*] und Urquhart

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

[13]) ist von der unendlichen Algebra $\underline{P} = (2^{\mathbb{N}}, \wedge, \vee, 0, 1, \sim)$ erzeugt, dabei ist $(a \wedge b)_n = \min\{a_n, b_n\}$, $(a \vee b)_n = \max\{a_n, b_n\}$, $(\sim a)_n = 1 - a_{n+1}$. Auf $2^{\mathbb{N}}$ betrachen wir die Produkt-Topologie, die von den Mengen $\langle n, x\rangle := \{a \in 2^{\mathbb{N}} \mid a_n = x\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $x \in 2 = \{0, 1\}$ erzeugt wird. Offenbar sind $\wedge$ und $\vee$ stetig, aber auch $\sim$ ist stetig, denn $\sim a \in \langle n, x\rangle \Leftrightarrow 1 - a_{n+1} = (\sim a)_n = x \Leftrightarrow a \in \langle n+1, 1-x\rangle$. Wir wollen nun eine Huckepack-Dualität für die Varietät $\mathbf{A} = \mathbb{IS}\mathbb{P}(\underline{P})$ aller Ockham-Algebren konstruieren, der die Dualität für beschränkte distributive Verbände (siehe Priestley [11, 12]) zugrunde liegt. Wir wählen also $\underline{\underline{D}} = (2, \wedge, \vee, 0, 1)$, $\underset{\approx}{D} = (2, \leq)$, $\underline{\underline{P}} = (2^{\mathbb{N}}, \wedge, \vee, 0, 1)$ und für $\alpha : \underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{D}}$ wählen wir die Projektion $\alpha : a \mapsto a_0$.

Zunächst bestimmen wir die Ockham-Unteralgebren $\underline{A}$ von $\ker(\alpha) = \{(a, b) \mid a_0 = b_0\}$. Man sieht leicht durch Induktion ein, dass für die n-fache Iteration $\sim^n$ von $\sim$ gilt:

$$\alpha(\sim^n a) = (\sim^n a)_0 = \begin{cases} a_n & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \\ 1 - a_n & \text{sonst} \end{cases}$$

also folgt aus $(a, b) \in A \subseteq \ker(\alpha)$ wegen $(\sim^n a, \sim^n b) \in A$ sofort $a = b$ und deshalb ist $\mathrm{id}_{\underline{P}}$ die grösste Ockham-Unteralgebra von $\ker(\alpha)$ und nach 2.2 ist dann $\Phi : \underline{A}^* \to \underline{A}^{\cap}$ stets injektiv. Sobald wir Bedingung *(c)* aus 2.6 erfüllt haben, ist nach 2.7 auch Φ automatisch surjektiv und damit ein Isomorphismus in $\mathbf{R}$. $\underline{P}$ hat einen ausgezeichneten Endomorphismus $g : \underline{P} \to \underline{P}$, der durch

$$(g(a))_n := a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}, a \in 2^{\mathbb{N}})$$

definiert ist, g schneidet das erste Glied der Folge a ab . Offenbar trennen die Potenzen g^k $(k \in \mathbb{N})$ von g gefolgt von α die Menge $P = 2^{\mathbb{N}}$ und daher ist *(c)* erfüllt, sobald g zu der Struktur von $\underset{\sim}{P}$ hinzugenommen wird.

Schliesslich haben wir noch die Ockham-Unteralgebren von

$\alpha^{-1}(\leq) = \{(a, b) \mid a_0 \leq b_0\}$ zu untersuchen. Aus $(a, b) \in A$ folgt $(\sim^n a, \sim^n b) \in A \subseteq \alpha^{-1}(\leq)$, also $a_n \leq b_n$ für gerades n und $a_n \geq b_n$ für ungerades n. Diese Paare bilden aber eine Ockham-Unteralgebra

$$\precsim := \{(a, b) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} \leq b_{2n},\ a_{2n+1} \geq b_{2n+1}\}$$

von $\underline{P} \times \underline{P}$ und die ist eine Halbordnung auf $P = 2^{\mathbb{N}}$.

Zusammenfassend erhalten wir nach 2.6 eine Dualität für die Varietät $\mathbf{A} = \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underline{P})$ aller Ockham-Algebren, wenn wir

$$\underset{\sim}{P} := (2^{\mathbb{N}}, \precsim, g, \tau)$$

wählen, wobei τ die Produkttopologie auf $2^{\mathbb{N}}$ ist (siehe [9]).

3.2. DIE VARIETÄTEN $\mathbf{P}_{m,n}$

Wir betrachten nun spezielle Varietäten von Ockham-Algebren, die von den endlichen Algebren

$$\underline{P}_{m,n} := (2^m, \wedge, \vee, 0, 1, \sim), \quad n < m,$$

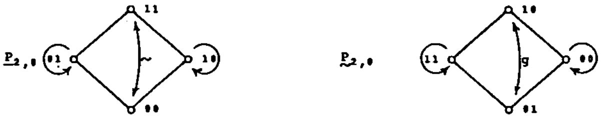
$$\sim a_k := \begin{cases} 1 - a_{k+1} & \text{für } k = 0, 1, \ldots, m-2, \\ 1 - a_n & \text{für } k = m-1, \end{cases}$$

erzeugt werden. Beachte, dass $\underline{P}_{m,n}$ durch folgende Abbildung $\lambda : \underline{P}_{m,n} \to \underline{P} = (2^{\mathbb{N}}, \wedge, \vee, 0, 1, \sim)$ in $\underline{P}$ eingebettet werden kann:

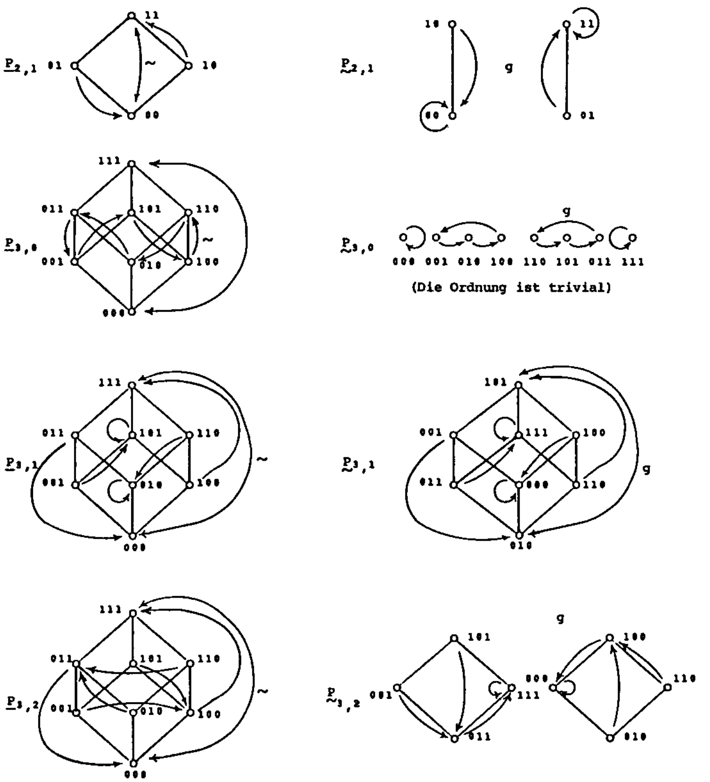
$$\lambda(a)_i := \begin{cases} a_i & \text{für } i = 0, 1, \ldots, m-1, \\ a_k & \text{für } i \geq m, \text{ wobei } i - k \equiv 0 \pmod{m-n}, \quad n \leq k < m. \end{cases}$$

Offenbar wird $\lambda(\underline{P}_{m,n}) \subseteq \underline{P}$ von dem Endomorphismus g von $\underline{P}$ in sich abgebildet, also induziert g einen Endomorphismus auf $\underline{P}_{m,n}$:

$$g(a)_k := \begin{cases} a_{k+1} & \text{für } k = 0, 1, \ldots, m-2, \\ a_n & \text{für } k = m-1. \end{cases}$$



$P_{2,0}$ ist die Varietät der de-Morgan-Algebren



https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

Die von der Halbordnung $\precsim$ auf $2^{\mathbb{N}}$ durch λ auf $\underset{\sim}{P}_{m,n}$ induzierte Halbordnung unterscheidet sich je nachdem, ob $m - n$ gerade oder ungerade ist.

$m - n$ gerade:

$$\precsim \; := \left\{(a,\, b) \mid a_{2k} \le b_{2k} \left(k \le \frac{m}{2}\right),\ a_{2k+1} \ge b_{2k+1} \left(k \le \frac{m-1}{2}\right)\right\},$$

$m - n$ ungerade:

$$\precsim \; := \left\{(a,\, b) \mid a_{2k} \le b_{2k} \left(k < \frac{n}{2}\right),\ a_{2k+1} \ge b_{2k+1} \left(k < \frac{n-1}{2}\right),\right.$$
$$\left. a_k = b_k \ (n \le k \le m)\right\}.$$

Wollen wir die oben gefundene Dualität auf $\underset{\sim}{P}_{m,n}$ einschränken, so wahlen wir für $\alpha : \underset{\sim}{P}_{m,n} \to \underline{D}$ wieder die Projektion $\alpha(a) := a_0$. Offenbar ist wieder $\mathrm{id}_{\underset{\sim}{P}_{m,n}}$ die grösste Ockham-Unteralgebra von $\ker(\alpha)$, $\precsim$ die grösste Ockham-Unteralgebra von $\alpha^{-1}(\le)$ und die Potenzen von g trennen $\underset{\sim}{P}_{m,n}$. Daher liefert 2.6 eine Dualität für $\mathbf{P}_{m,n} = \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underset{\sim}{P}_{m,n})$, wenn wir $\underset{\sim}{P}_{m,n} = (2^{\mathbb{N}}, \precsim, g, \tau)$ mit der diskreten Topologie τ wählen. Die Figuren auf S.13 zeigen $\underset{\sim}{P}_{m,n}$ und $\underset{\sim}{P}_{m,n}$ für $m = 2, 3$.

3.3. DISTRIBUTIVE p-ALGEBREN

Für den distributiven Verband $\underline{B} = (2^n, \wedge, \vee, 0, d)$ betrachten wir $\underline{B \oplus 1}$ als p-Algebra, d.h. mit der Pseudokomplementierung $*$:

$$\underline{P} = (B \oplus 1, \wedge, \vee, 0, 1, {}^*) .$$

Wir wollen eine Piggyback-Dualität für $\mathbf{A} = \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underline{P})$ entwickein, die wieder auf der Dualität für beschränkte distributive Verbände basiert. Für $\alpha : \underline{P} \to \underline{D}$ wählen wir die charakteristische Funktion von $\{1\}$.

Untersuchen wir zunächst die p-Unteralgebren von $\ker(\alpha)$ und $\alpha^{-1}(\le)$. Sei $\underline{A}$ eine p-Unteralgebra von

$$\ker(\alpha) = (B \times B) \cup \{(1, 1)\} .$$

Offenbar ist $(a, 1) \in A \iff a = 1 \iff (1, a) \in A$. Nehmen wir Pseudokomplemente, so ergibt sich daraus $(a, 0) \in A \iff a = 0 \iff (0, a) \in A$.

Ist $(a, b), (a, c) \in A$ mit $a \neq 1$, so gilt auch $b \neq 1$ und $c \neq 1$ und weiter

$$\begin{aligned}(a, b) \in A, (a^*, c^*) \in A &\Rightarrow (0, b \wedge c^*) = (a \wedge a^*, b \wedge c^*) \in A \\ &\Rightarrow b \wedge c^* = 0 \\ &\Rightarrow b \geq c \text{ , da } b \neq 1 \text{ , } c \neq 1 \text{ .}\end{aligned}$$

Ebenso sieht man $b \leq c$ also $b = c$, also ist $\underline{A}$ der Graph eines internen Homomorphismus, da $\ker(\alpha)$ symmetrisch ist, handelt es sich sogar um einen internen Isomorphismus.

Sei $\underline{A}$ eine p-Unteralgebra von

$$\alpha^{-1}(\leq) = (B \times B) \cup (B \times \{1\}) \cup \{(1, 1)\} \text{ .}$$

Wieder gilt $(1, a) \in A \Leftrightarrow a = 1$ und $(0, a) \in A \Leftrightarrow a = 0$. Ist $(a, b), (a, c) \in A$, so folgt wie oben $b \wedge c^* = 0$, also $c^* \leq b^*$, und $c \wedge b^* = 0$, also $b^* \leq c^*$, also insgesamt $b^* = c^*$. Es gibt also zwei Möglichkeiten $b = c$ oder $\{b, c\} = \{d, 1\}$ wobei d das grösste Element von B ist.

Wenn stets die erste Möglichkeit eintritt, so handelt es sich bei $\underline{A}$ um einen Graph eines internen Homomorphismus f von $\underline{P}$. Entweder ist f ein innerer Isomorphismus oder er ist nicht injektiv, dann ist aber das Bild von f ein Boolescher 0-1-Unterverband von $\underline{B \oplus 1}$ und deshalb gleich $\{0, 1\}$. f kann deshalb zu einem Endomorphismus g von $\underline{P}$ fortsetzen und der Graph von g, $\{(a, b) \mid b = g(a)\} \supseteq A$ liegt offenbar auch in $\alpha^{-1}(\leq)$.

Gibt es nun wenigstens ein $a \neq 0, 1$ und $b \neq c$ mit $(a, b), (a, c) \in A$, so ist $\{b, c\} = \{d, 1\}$ und daher ist $A \cap B \times B$ der Graph eines internen Verbandshomomorphismus f von $\underline{B}$. Nun ist $A_1 = \{a \mid \exists b \ (a, b) \in A\}$ eine p-Unteralgebra von $\underline{P}$, und da für $a \neq 0, 1$ gilt $a \wedge a^* = 0$, $a \vee a^* = d$ ist $A_1 \cap B$ der Definitions-bereich von f sogar ein Boolescher Unterverband von $\underline{B}$ und f ein Boolescher Homomorphismus. Da B endlich ist, kann der interne Homomorphismus f zu einem Endomorphismus g von B fortgesetzt werden und offenbar ist dann auch der "*erweitere Graph von* g":

$$E(g) := \{(a, b) \mid b = g(a)\} \cup \{(a, 1) \mid g(a) = d\} \cup \{1, 1\}$$

eine p-Unteralgebra von $\alpha^{-1}(\leq)$.

Wir haben es also mit folgenden drei Typen von maximalen p-Unteralgebren von $\alpha^{-1}(\leq)$ bzw. von $\ker(\alpha)$ zu tun

(a) der Graph eines internen Isomorphismus von $\underline{P}$,

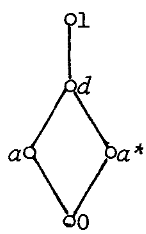
(b) der Graph eines Endomorphismus von $\underline{P}$,

(c) der erweiterte Graph eines (Booleschen) Endomorphismus von $\underline{B}$.

Die Endomorphismen von $\underline{P}$ gefolgt von α trennen P , denn $\alpha \circ \mathrm{id}_{\underline{P}}$ trennt 1 von allen $a \in B$ und fur $a, b \in B$, $a \neq b$ gibt es einen Booleschen Homomorphismus $f : B \twoheadrightarrow \{0, 1\}$, der a, b trennt, dieser wird durch die Definition $f(1) := 1$ zu einem Endomorphismus von $\underline{P}$, der a und b trennt und es gilt $\alpha \circ f = f$.

Nach dem Satz 2.6 und Zusatz 2.8 haben wir eine Dualität für $\mathbf{A} = \mathbb{ISP}(\underline{P})$, wenn wir $\underset{\sim}{P}$ mit allen internen Isomorphismen und Endomorphismen von $\underline{P}$ versehen, sowie mit den erweiterten Graphen von Endomorphismen von $\underline{B}$. Wir wollen die Situation für die ersten zwei Spezialfälle betrachten:

$\underline{P}_1$: 

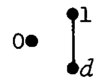
und $\underline{P}_2$: 

Beide Algebren haben die Eigenschaft, dass jeder interne Isomorphismus sich zu einem Endomorphismus fortsetzen lässt, also können die internen Isomorphismen von $\underline{P}$ aus den Relationen von $\underset{\sim}{P}$ gestrichen werden.

Die Endomorphismen von $\underline{P}_1$:

$$i : \begin{cases} 1 \longmapsto 1 \\ d \longmapsto d \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases} , \quad f : \begin{cases} 1 \longmapsto 1 \\ d \longmapsto 1 \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases} .$$

Da die Boolesche Algebra  nur den identischen Endomorphismus hat, kommt nur noch die Relation

$$\precsim \; := \{(1,1),\,(d,1),\,(d,d),\,(0,0)\},$$ 

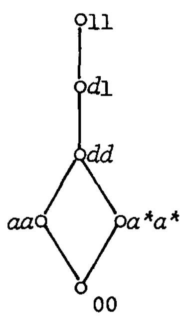
hinzu, die eine Halbordnung auf P_1 bildet.

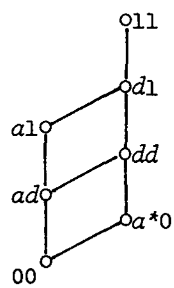
Setzen wir $\underset{\sim}{P}_1 = (P_1,\, e,\, \precsim,\, \tau)$ mit der diskreten Topologie τ , so erhalten wir eine Dualität für $\mathbf{A}_1 = \mathbb{IS}\mathbb{P}(\underset{\sim}{P}_1)$ (seihe [3,5,6]).

Die Endomorphismen von $\underset{\sim}{P}_2$:

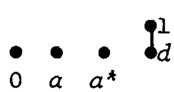
$$i : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ d \mapsto d \\ a \mapsto a \\ a^* \mapsto a^* \\ 0 \mapsto 0 \end{cases},\quad j : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ d \mapsto d \\ a \mapsto a^* \\ a^* \mapsto a \\ 0 \mapsto 0 \end{cases},\quad f : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ d \mapsto 1 \\ a \mapsto 1 \\ a^* \mapsto 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases},\quad f \circ j : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ d \mapsto 1 \\ a \mapsto 0 \\ a^* \mapsto 1 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}.$$

Die anderen maximalen Unteralgebren von $\alpha^{-1}(\leq)$ sind:

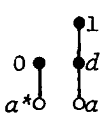
$\precsim$: 

, $\precsim \circ j$, $\dashv$: 

, $\dashv \circ j$.

Dabei ist $\precsim$ die Halbordnung 

und $\dashv$ die Fast-Halbordnung



(● sind reflexive und ○ nicht reflexive Elemente). Setzen wir $\underset{\sim}{P}_2 = (P_2,\, j,\, f,\, \precsim,\, \dashv,\, \tau)$ mit der diskreten Topologie τ , so erhalten wir eine Dualität für $\mathbf{A}_2 = \mathbb{IS}\mathbb{P}(\underset{\sim}{P}_2)$.

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

Für $\underline{B} = \underline{2}^n$ mit $n \geq 3$ wird die Anzahl der Relationen auf $\underset{\sim}{P}$ recht gross, da zunächst nicht mehr jeder interne Isomorphismus zu einem Endomorphismus erweitert werden kann und die Anzahl der Endomorphismen von $\underline{P}$ und $\underline{B}$ rapide steigt.

3.4. DOPPEL-STONE-ALGEBREN

Sei $P = \{0, c, d, 1\}$ die 4-elementige Kette $0 < c < d < 1$ mit Pseudokomplement * und dualen Pseudokomplement $^+$:

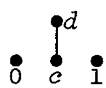
$$x^* = \begin{cases} 1 \ , & x = 0 \ , \\ 0 \ , & x \neq 0 \ , \end{cases} \qquad x^+ = \begin{cases} 0 \ , & x = 1 \ , \\ 1 \ , & x \neq 1 \ . \end{cases}$$

Die von $\underline{P} = (P, \wedge, \vee, 0, 1, {}^*, {}^+)$ erzeugte Varietät $\mathbf{A} = \mathbb{ISP}(\underline{P})$ ist die Varietät der Doppel-Stone-Algebren.

Wir konstruieren wieder eine Dualität, die Huckepack auf der Dualität für distributive Verbände reitet, indem wir für $\alpha : \underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{D}}$ die charakteristische Funktion von $\{d, 1\}$ wählen.

Wir bestimmen die maximale $\mathbf{A}$-Unteralgebra $\underline{A}$ von $\alpha^{-1}(\leq)$ bzw. $\ker(\alpha)$. Ist $(a, b) \in A \subseteq \alpha^{-1}(\leq)$ und $a \neq b$, so folgt $a = 0$, $b = c$ oder $a = d$, $b = 1$ oder $a \leq c$, $d \leq b$. Da $x^* = 1 \Longleftrightarrow x = 0$ und $x^+ = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ in $\underline{P}$ gilt, folgt $a \neq 0$, da sonst $(a, b)^* = (a^*, b^*) = (1, 0) \notin \alpha^{-1}(\leq)$ wäre, ebenso folgt auch $b \neq 1$. Die einzige maximale $\mathbf{A}$-Unteralgebra von $\alpha^{-1}(\leq)$ ist also die Halbordnung

$$\precsim \; = \{(0, 0), (c, c), (c, d), (d, d), (1, 1)\}$$



und daher ist $\mathrm{id}_{\underline{P}}$ die einzige maximale $\mathbf{A}$-Unteralgebra von $\ker(\alpha)$. $\underline{P}$ hat die zwei Endomorphismen $f, g : \underline{P} \to \underline{P}$,

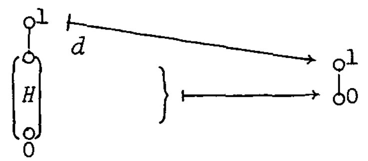
$$f(1) = 1 = g(1) \ , \quad f(c) = c = f(d) \ , \quad g(c) = d = g(d) \ , \quad f(0) = 0 = g(0)$$

und die Identität, die gefolgt von α die Menge P trennen. Wählen wir also $\underset{\sim}{P} = (P, f, g, \precsim, \tau)$ mit der diskreten Topologie τ , so erhalten wir eine Dualität für die Varietät $\mathbf{A}$ der Doppel-Stone-Algebren (seihe [5,6]).

3.5. HEYTING-ALGEBREN

Wir wollen nun Dualitäten für Varietäten von Heyting-Algebren entwickeln, die von einer endlichen subdirekt irreduziblen Heyting Algebra erzeugt werden, d.h. von einem endlichen distributiven Verband H mit einer neuen 1 versehen: $\underline{H \oplus 1}$. Wir bezeichnen wieder das grösste Element von H mit d und konstruieren eine Huckepack-Dualität für $\mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underline{H \oplus 1})$, die auf der Dualität für beschränkte distributive Verbände basiert. Für $\alpha : \underline{H \oplus 1} \to \underline{D}$ wählen wir die charakteristiche Funktion von $\{1\}$.

α :



Wir wollen uns zunächst die Heyting-Unteralgebren V von $\alpha^{-1}(\leq)$ und $\ker(\alpha)$ ansehen.

$(1, 1)$ ist das einzige Paar $(a, b) \in \alpha^{-1}(\leq)$ mit $a = 1$, also gilt für $(a, b), (a, c) \in V$ auch $(a, b) \to (a, c) = (1, b \to c) \in V$, was $b \to c = 1$, also $b \leq c$ nach sich zieht; ebenso folgt auch $c \leq b$ und wir sehen: $(a, b), (a, c) \in V \Rightarrow b = c$. Wir sehen also, dass jede Heyting-Unteralgebra von $\alpha^{-1}(\leq)$ ein interner Homomorphismus von $\underline{H \oplus 1}$ ist.

Da die Bedingung (d^{**}) aus 2.7 erfüllt ist, bleibt nur noch zu überprüfen, ob die Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ die Menge $H \oplus 1$ trennen.

Wir wollen uns hier spezialisieren auf eine kleinere Menge von Heyting-Algebren, nämlich die, die folgender Bedingung (S) genügen:

(S): *Jede subdirekt irreduzible Unteralgebra eines homomorphen Bild von* $\underline{H}$ *(als Heyting-Algebra) kann in* $\underline{H \oplus 1}$ *eingebettet werden.*

Um diese Bedingung besser zu verstehen, werden wir im Anschluss zeigen, dass sie gerade besagt, dass $\mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}(\underline{H \oplus 1})$ die von $\underline{H \oplus 1}$ erzeugte Varietat ist.

Wir zeigen zunachst, dass (S) hinreicht, damit die Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ gefolgt von α die Menge $H \oplus 1$ trennen.

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

So ist klar, dass wir mit $\alpha \circ \mathrm{id}\ 1$ von jedem $a \in H$ trennen, also bleibt nur noch übrig, für $a, b \in H$, $a \neq b$ ein $g \in \mathrm{End}(\underline{H \oplus 1})$ zu finden, mit $\alpha \circ g(a) \neq \alpha \circ g(b)$. Es genügt, für $a < b$ ein $g \in \mathrm{End}(\underline{H \oplus 1})$ zu finden, das $g(b) = 1 \neq g(a)$ erfüllt. Da Kongruenzen von Heyting-Algebren genau den Filtern entsprechen, gilt für den natürlichen Homomorphismus $h : \underline{H} \twoheadrightarrow \underline{H}/{\uparrow}b$ (wo ${\uparrow}b := \{x \in H \mid b \leq x\} = [b, d]$) $h(b) = 1 \neq h(a)$, also gibt es ein subdirekt irreduzibles homomorphes Bild $\underline{S}$ von $\underline{H}/{\uparrow}b$, $k : \underline{H}/{\uparrow}b \twoheadrightarrow \underline{S}$ mit $k\big(h(a)\big) \neq 1$. Nach (S) gibt es eine Einbettung $e : \underline{S} \rightarrowtail \underline{H \oplus 1}$ also liefert

$$\underline{H \oplus 1} \xrightarrow{f} \underline{H} \xrightarrow{h} \underline{H}/{\uparrow}b \xrightarrow{k} \underline{S} \rightarrowtail \underline{H \oplus 1}$$

den gewünschten Endomorphismus wobei $f(x) = x$ für $x \in H$ und $f(1) = d$.

Gibt es denn genugend Heyting-Algebren $\underline{H}$, die der Bedingung (S) genügen? Zunächst genügt offenbar die 2-elementige Heyting-Algebra der Bedingung (S), und wir werden nun zeigen, dass sich (S) auch auf kartesische Produkte und lineare Summen überträgt. Dies liefert dann eine recht grosse Menge von Heyting-Algebren $\underline{H}$, die der Bedingung (S) genügen.

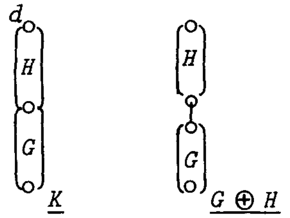
LEMMA A. *Genügen $\underline{G}$, $\underline{H}$ der Bedingung* (S), *dann auch* $\underline{G \times H}$.

Beweis. Sei $\underline{S}$ eine subdirekt irreduzible Unteralgebra eines homomorphen Bildes von $\underline{G} \times \underline{H}$. Da Heyting-Algebren distributive Kongruenzen haben, gibt es homomorphe Bilder $\underline{G}'$, $\underline{H}'$ von $\underline{G}$, $\underline{H}$, so dass $\underline{S}$ in $\underline{G}' \times \underline{H}'$ eingebettet werden kann. Da $\underline{S}$ subdirekt irreduzibel ist, kann $\underline{S}$ in $\underline{G}'$ oder $\underline{H}'$ eingebettet werden und damit auch in $\underline{G \oplus 1}$ oder $\underline{H \oplus 1}$, da $\underline{G}$ und $\underline{H}$ beide (S) erfüllen. Nun bleibt nur noch eine Einbettung $\underline{G \oplus 1} \to \underline{(G \times H) \oplus 1}$ zu konstruieren. Sei a ein Atom von G, dann ist $G = [a, d] \,\dot{\cup}\, [0, a^*]$ und

$$\varphi : G \oplus 1 \to (G \times H) \oplus 1\ , \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1\ , \\ (x, 0) & \text{für } x \in [0, a^*]\ , \\ (x, d) & \text{für } x \in [a, d]\ , \end{cases}$$

ist die genwünschte Einbettung, denn ist $x \leq a^*$, so ist $x \wedge a = 0$, also $x \to y \geq a$ und ist $y \geq a$, so ist $x \wedge a \leq a \leq y$, also ebenfalls $x \to y \geq a$, ist schliesslich $x \geq a$ und $y \leq a^*$, so folgt aus $x \wedge z \leq y$ stets $a \wedge z \leq x \wedge z \leq y \leq a^*$, also $a \wedge z = 0$ und $z \leq a^*$. □

LEMMA B. *Genügen $\underline{G}$, $\underline{H}$ der Bedingung* (S), *so auch deren reduzierte* *lineare Summe* $\underline{K}$ *und deren lineare Summe* $\underline{G \oplus H}$.



Beweis. Die lineare Summe $\underline{G \oplus H}$ ist die reduzierte lineare Summe von $\underline{G}$, $\underline{2}$ und $\underline{H}$, also genügt es, den Beweis für reduzierte lineare Summen zu führen. Sei $\underline{K}$ die reduzierte lineare Summe von $\underline{G}$ und $\underline{H}$ und $\underline{S}$ eine subdirekt irreduzible Unteralgebra eines homomorphen Bildes von $\underline{K}$. $\underline{S} \overset{g}{\rightarrowtail} \underline{L} \overset{f}{\twoheadleftarrow} \underline{K}$. Nun gilt für f entweder $H \subseteq f^{-1}(d)$, was $\underline{S}$ in ein homomorphes Bild von $\underline{G}$ einbettet,

$$\underline{G} \twoheadrightarrow \underline{L} \leftarrowtail \underline{S} \rightarrowtail \underline{G \oplus 1} \rightarrowtail \underline{K \oplus 1} \ ,$$

oder $f^{-1}(d) \cap G = \emptyset$, dann zerfällt $\underline{S}$ in eine reduzierte lineare Summe, deren oberer Teil eine subdirekt irreduzible Unteralgebra eines homomorphen Bilds von $\underline{H}$ ist und deren Unterteil in $\underline{G}$ eingebettet ist. Daher kann $\underline{S}$ auch in diesem Fall in $\underline{K \oplus 1}$ eingebettet werden. □

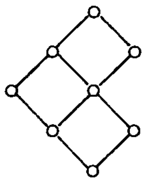
LEMMA C. $\underline{H}$ *genügt genau dann* (S) *, wenn* $\mathrm{Var}(\underline{H \oplus 1}) = \mathbf{ISP}(\underline{H \oplus 1})$ *gilt.*

Beweis. Da die echten homomorphen Bilder von $\underline{H \oplus 1}$ genau die homomorphen Bilder von $\underline{H}$ sind, ist (S) äquivalent zu $\mathcal{S}_i \cap \mathbf{HS}(\underline{H \oplus 1}) = \mathbf{IS}(\underline{H \oplus 1})$. Da aber

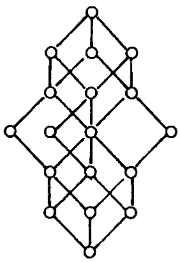
$$\mathcal{S}_i \cap \mathrm{Var}(\underline{H \oplus 1}) = \mathcal{S}_i \cap \mathbf{HSP}_u(\underline{H \oplus 1}) = \mathcal{S}_i \cap \mathbf{HS}(\underline{H \oplus 1})$$

und $\mathcal{S}_i \cap \mathbf{ISP}(\underline{H \oplus 1}) = \mathbf{IS}(\underline{H \oplus 1})$ gilt, ist (S) äquivalent zu $\mathrm{Var}(\underline{H \oplus 1}) = \mathbf{ISP}(\underline{H \oplus 1})$. □

Die in *A* und *B* gegebenen Konstruktionen liefern allerdings noch nicht alle Heyting-Algebren, die (S) genügen, denn z.B.



und



erfüllen ebenfalls (S), sind aber weder als Produkt noch als lineare Summe aufspaltbar.

Wir haben also für endliche Heyting-Algebren folgendes bewiesen:

THEOREM D. *Sei* $\underline{H}$ *eine endliche Heyting-Algebra, die der Bedingung* (S) *genügt. Definiere* $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ *, indem* $H \oplus 1$ *mit der diskreten Topologie und allen internen Homomorphismen von* $\underline{H \oplus 1}$ *ausgestattet wird (oder eine Menge von internen Homomorphismen, die die übrigen im Sinne von* Davey *und* Werner [6], *S.* 140–142 *erzeugt). Dann ist die durch* $\underline{H \oplus 1}$ *und* $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ *definierte Protodulität eine Dualität für* $\mathbf{A} = \mathrm{Var}(\underline{H \oplus 1})$.

3.6. ENDOPRIMALE HEYTING-ALGEBREN

Wir wenden nun die Ergebnisse von 3.5 an für den Fall, dass $\underline{H}$ eine n-elementige Kette ist, die ja nach 3.5 Lemma B die Bedingung (S) erfüllt. $\underline{H \oplus 1}$ ist also die $(n+1)$-elementige Kette

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 1$$

und wir suchen eine Menge von internen Homomorphismen, die alle internen Homomorphismen erzeugen. Als spezielle interne Homomorphismen haben wir einmal die Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ und darunter speziell die *Retrakte*

$$e_k(a_j) = \begin{cases} 1 \quad , & j \geq k \\ a_j \ , & j < k \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

und daneben die internen Isomorphismen. Offenbar ist jeder interne Homomorphismus von $\underline{H \oplus 1}$ ein interner Isomorphismus, gefolgt von einem Retrakt und wieder gefolgt von einem internen Isomorphismus, so dass also die Retrakte zusammen mit den internen Isomorphismen alle internen Homomorphismen erzeugen. Wir wollen nun zeigen, dass auch die Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ alle internen Homomorphismen erzeugen. Zunächst

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

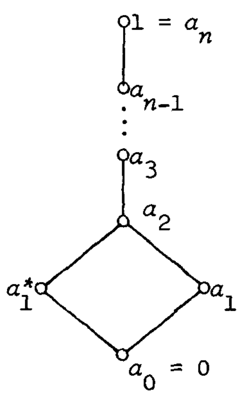
ist $i_k = e_k \cap e_n$ $(e_n = \mathrm{id})$ die Identität auf der $(k+1)$-elementigen Kette $\{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, 1\}$ und ist $C \subseteq H \oplus 1$ eine beliebige $(k+1)$-elementige Kette, die 0 and 1 enthält, so gibt es genau einen Endomorphismus f von $\underline{H \oplus 1}$ mit $C = f(H \oplus 1)$. $f \circ i_k$ ist dan ein Isomorphismus $\{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, 1\} \to C$ und alle übrigen internen Isomorphismen lassen sich durch Invertieren und Hintereinanderausführen aus diesen speziellen Isomorphismen ergeugen. Wir haben damit gezeigt (seihe [4,6]):

THEOREM A. *Ist* $\underline{H}$ *eine endliche Kette, und* $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ *ist* $H \oplus 1$ *versehen mit der diskreten Topologie und den Endomorphismen von* $\underline{H \oplus 1}$ *, so ist die durch* $\underline{H \oplus 1}$ *und* $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ *gegebene Protodualität eine Dualität für* $\mathrm{Var}(\underline{H \oplus 1})$.

Nach §1 (1) bedeutet dies insbesondere, dass die Operationen auf $H \oplus 1$, die mit den Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ verträglich sind, genau die Term-Funktionen von $\underline{H \oplus 1}$ sind. Algebren mit dieser Eigenschaft kann man in Anlehnung an die übrigen Verallgemeinerungen primaler Algebren *endo-primal* nennen.

KOROLLAR B. *Jede endliche Kette ist als Heyting-Algebra endo-primal.*

Als nächstes Beispiel betrachten wir $\underline{H} = \underline{2^2 \oplus C}$, wobei $\underline{C}$ eine endliche Kette ist.



Die Unteralgebren von $\underline{H}$ sind die Ketten, die 0 und 1 , aber nicht a_1, a_1^* enthalten und alle Teilmengen, die 0, a_1, a_1^*, a_2 und 1 enthalten. Dieselbe Analyse wie oben zeigt, dass der Automorphismus

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

$$\alpha : x \longmapsto \begin{cases} x \ , & x \neq a_1, a_1^* \ , \\ a_1^* \ , & x = a_1 \ , \\ a_1 \ , & x = a_1^* \end{cases}$$

zusammen mit e_1 und den Retraktionen e_i $(i \geq 2)$ und den internen Isomorphismen alle internen Homomorphismen erzeugt, dabei muss e_1 umdefiniert werden:

$$e_1(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \geq a_1 \\ 0 \ , & x \leq a_1^* \end{cases} .$$

Die Identitäten auf den Unteralgebren erhalten wir durch $e_i \cap e_n$ und $(e_i \circ \alpha) \cap e_n$ und daher werden auch in diesem Fall alle internen Homomorphismen von den Endomorphismen erzeugt.

THEOREM C. *Ist* C *eine* n*-elementige Kette* $(n \geq 1)$ *und* $\underset{\sim}{2^2 \oplus C}$ *ist* $2^2 \oplus C$ *versehen mit der diskreten Topologie und den Endomorphismen von* $\underline{2^2 \oplus C}$, *so ist die durch* $\underline{2^2 \oplus C}$ *und* $\underset{\sim}{2^2 \oplus C}$ *induzierte Protodualitat eine Dualität für* $\mathrm{Var}\left(\underline{2^2 \oplus C}\right)$.

KOROLLAR D. *Für jede endliche Kette* $C \neq \emptyset$ *ist* $\underline{2^2 \oplus C}$ *als Heyting-Algebra endo-primal.*

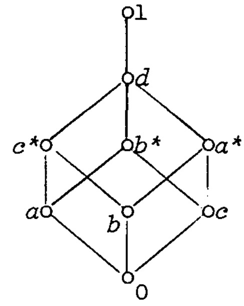
Dies scheint aber das Ende für endo-primale Heyting-Algebren zu sein, wie die nun folgenden Beispiele zeigen.

3.7. WEITERE BEISPIELE

Wir betrachten nun weitere Beispiele von Heyting-Algebren $\underline{H}$, die der Bedingung (S) genügen, bei denen aber die Betrachtung echter interner Homomorphismen unumgänglich erscheint:

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

BEISPIEL A. $H = 2^3$.

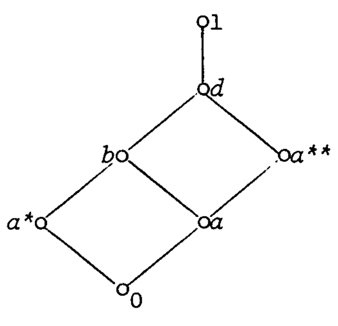


Die Unteralgebren von $\underline{H \oplus 1}$ sind $\{0, 1\}$, $\{0, d, 1\}$, $\{0, x, x^*, d, 1\}$ $(x \in \{a, b, c\})$ und $H \oplus 1$. Neben den 6 Automorphismen hat $\underline{H \oplus 1}$ noch die 3 Endomorphismen

$$\varepsilon_x(y) := \begin{cases} 1 \ , & y \geq x \\ & \\ 0 \ , & y \leq x^* \end{cases} \qquad \text{für} \quad x \in \{a, b, c\}$$

und den nicht-trivialen Automorphismus γ_x von $\{0, x, x^*, d, 1\}$, der offenbar nicht zu einem Endomorphismus von $\underline{H \oplus 1}$ erweitert werden kann. Um also eine Dualität zu erhalten, muss $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ mit den Automorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ sowie mit ε_a und γ_a versehen werden.

BEISPIEL B. $H = 2 \times 3$.

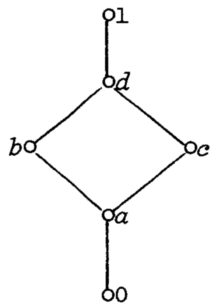


Die Unteralgebren von $\underline{H \oplus 1}$ sind $\{0, 1\}$, $\{0, d, 1\}$, $\{0, b, 1\}$, $\{0, b, d, 1\}$, $\{0, a^*, a^{**}, d, 1\}$ und $H \oplus 1$. $\underline{H \oplus 1}$ hat keinen nicht-trivialen Automorphismus und die Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ haben als Urbild der 1 einen der Filter $[a, 1]$, $[a^*, 1]$ oder $[a^{**}, 1]$. Wieder lässt sich der nicht-triviale Automorphismus γ von $\{0, a^*, a^{**}, d, 1\}$ nicht zu einem Endomorphismus von $\underline{H \oplus 1}$ erweitern. Um eine Dualität zu erhalten, müssen wir $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ mit dem Endomorphismus von $\underline{H + 1}$ und γ

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

versehen.

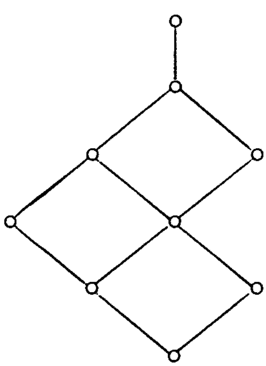
BEISPIEL C. $H = 1 \oplus 2^2$.



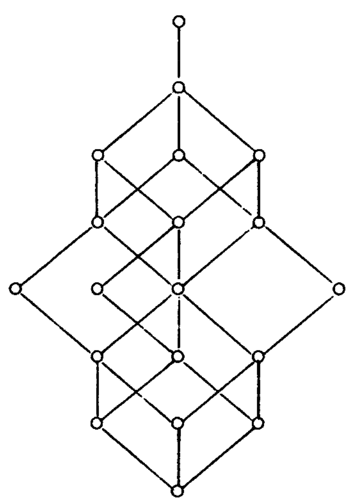
Die Unteralgebren von $\underline{H \oplus 1}$ sind alle 0-1-Ketten, die a nicht enthalten, $\{0, a, 1\}$, $\{0, a, d, 1\}$ und $H \oplus 1$.

Die Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$, die nicht bijektiv sind, haben einen der Filter $[c, 1]$, $[b, 1]$ oder $[a, 1]$ als Urbild der 1 und als Bild eine 3- oder 2-elementige Kette. Die Isomorphismen zwischen 4-elementigen Ketten lassen sich also nicht immer zu Endomorphismen erweitern, also muss für eine Dualität $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ mit den Endomorphismen von $\underline{H \oplus 1}$ und dem Isomorphismus $\{0, b, d, 1\} \to \{0, a, d, 1\}$ versehen werden.

Wir sehen schon hier, dass die Anzahl der auf $\underset{\sim}{H \oplus 1}$ benötigten Relationen rapide zunimmt, so dass bei grösseren H die Dualität schnell unpraktikabel wird. So haben auch die Beispiele



und



https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

alle Vorhergehenden als Unteralgebren und benötigen deshalb eine grosse Fülle interner Homomorphismen zur Erzeugung der Dualität. Wir wollen deshalb die Betrachtung von Heyting-Algebren an dieser Stelle abbrechen.

3.8. RELATIV-PSEUDOKOMPLEMENTÄRE HALBVERBÄNDE

Bisher haben wir nur Dualitäten betrachtet, die auf der Dualität für distributive Verbände Huckepack reiten. Dies hatte den Vorteil, dass im Dual keine Operationen auftauchten und deshalb die Injektivitätsbedingung automatisch erfüllt war. Wir wollen nun noch eine Dualität betrachten, die auf der Dualität fur 0-1-Halbverbande (vgl. Hofman, Mislove und Stralka [10]) Huckepack reitet. Hier werden die zusätzlichen Probleme deutlich, die man bei der Behandlung von Operationen in der zugrundeliegenden Dualität hat.

Sei $\underline{H}$ ein endlicher pseudokomplementärer Halbverband $(H, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$, $\underline{P} = \underline{H \oplus 1}$ und $\mathbf{A} = \mathbb{IS}\mathbf{P}(\underline{P})$. $\underline{\underline{S}} = (\{0, 1\}, \wedge, 0, 1)$ ist der 2-elementige 0-1-Halbverband und die Dualität für $\mathbf{S} = \mathbb{IS}\mathbf{P}(\underline{\underline{S}})$ erhält man mit $\underset{\approx}{S} = (\{0, 1\}, \wedge)$. Wir wählen für $\alpha : \underline{\underline{P}} \rightarrow \underline{\underline{S}}$ die charakteristische Funktion von $\{1\}$.

LEMMA A. *Die Unteralgebren* $\underline{A} \subseteq \underline{P}^2$ *mit* $A \subseteq \ker(\alpha)$ *sind genau die internen Isomorphismen von* $\underline{P}$.

Beweis. Ist $(a, b), (a, c) \in A$, so folgt $(1, b \rightarrow c) = (a, b) \rightarrow (a, c) \in A$, also $b \rightarrow c = 1$ und damit $b \leq c$. Ebenso folgt $b \geq c$ und damit $b = c$. Da $\ker(\alpha)$ symmetrisch ist, folgt aus $(a, c), (b, c) \in A$ auch $a = b$. $\square$

Wir haben nun die Operation $\wedge$ als eine Relation zu betrachten, also $\wedge = \{(a, b, c) \mid c = a \wedge b\}$ und $\alpha^{-1}(\wedge)$ zu untersuchen.

Beachte: $(a, b, 1) \in \alpha^{-1}(\wedge) \Longleftrightarrow a = b = 1$.

LEMMA B. *Die Unteralgebren* $\underline{A} \subseteq \underline{P}^3$ *mit* $A \subseteq \alpha^{-1}(\wedge)$ *sind genau die Isomorphismen zwischen Unteralgebren von* $\underline{P}^2$ *und Unteralgebren von* $\underline{P}$.

Beweis. Ist $(a, b, c), (a, b, d) \in A$, so auch $(1, 1, c \rightarrow d) = (a, b, c) \rightarrow (a, b, d) \in A$, und es folgt $c \leq d$ und ebenso $d \leq c$. Ist $(a, b, f), (c, d, f) \in A$, so ist $(a \rightarrow c, b \rightarrow d, 1) \in A$, also $a \leq c$ und $b \leq d$ und ebenso $c \leq a$ und $d \leq b$. $\square$

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

Statt der zweistelligen Operationen auf $\underset{\sim}{P}$, die aus Lemma B herrühren, können wir auch zu einstelligen Operationen übergehen, nämlich $p_1 \circ g^{-1}$, $p_2 \circ g^{-1}$, wobei g ein Isomorphismus zwischen Unteralgebren von $\underline{P}^2$ und von $\underline{P}$ ist und $p_1, p_2 : \underline{P}^2 \to \underline{P}$ die beiden Projektionen sind; man kann sich leicht überlegen, dass eine (partielle) Operation, die $p_1 \circ g^{-1}$ und $p_2 \circ g^{-1}$ erhält, auch g^{-1} und g erhalten muss. $p_1 \circ g^{-1}$ und $p_2 \circ g^{-1}$ sind aber wieder interne Homomorphismen von $\underline{P}$.

Wie bei Heyting-Algebren können wir wieder die Bedingung (S) formulieren, die aus denselben Gründen bedeutet, dass $\mathbb{IIS}\mathbb{P}(\underline{H \oplus 1}) = \mathrm{Var}(\underline{H \oplus 1})$ und ebenso wie im Fall der Heyting-Algebren folgt auch das

LEMMA C. *Ist $\underline{H}$ ein relativ pseudokomplementarer Halbverband, der der Bedingung*

(S): *Jede subdirekt irreduzible Unteralgebra eines homomorphen Bildes von $\underline{H}$ kann in $\underline{H \oplus 1}$ eingebettet werden*

genügt, so trennen die Abbildungen $\alpha \circ g$ $\big(g \in \mathrm{End}(\underline{H \oplus 1})\big)$ die Menge $H \oplus 1$.

Nun wenden wir uns der Bedingung (d) aus dem Theorem 2.6 zu und müssen feststellen, dass die Bedingungen aus dem Zusatz 2.7 nicht erfüllt sind. Zusatz 2.8 sagt uns dazu, dass $\underline{\underline{A}}^0$ im allgemeinen nicht unter $\wedge$ abgeschlossen sein wird, also nur ein partieller 0-1-Halbverband ist und $\underline{\underline{A}}^\cap$ erzeugt.

Über die Abbildung $\Delta(\varphi) : \underline{\underline{A}}^0 \to \underset{\approx}{S}$ wissen wir nur, dass sie $\wedge$ als Relation erhält, also für $x, y \in \underline{\underline{A}}^0$ folgt aus $x \wedge y \in \underline{\underline{A}}^0$ stets $\Delta(\varphi)(x) \wedge \Delta(\varphi)(y) = \Delta(\varphi)(x \wedge y)$. Wir müssen uns also überlegen, unter welcher Voraussetzung sich ein $\wedge$-Homomorphismus $f : X \to \underset{\approx}{S}$ von einem partiellen Halbverband X auf den von X erzeugten Halbverband $\underset{\approx}{Y} \supseteq X$ fortsetzen lässt.

Sei $\underset{\approx}{Y}$ ein Halbverband und $X \subseteq Y$. Für $V \subseteq X$ definieren wir

$$\Gamma(V) := \{x \in X \mid \exists u, v \in V, u \wedge v \in X \,\&\, u \wedge v \leq x\} ,$$

$$\Gamma^0(V) = V\ ,\quad \Gamma^{n+1}(V) := \Gamma\big(\Gamma^n(V)\big)\ ,\quad \overline{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^n(V)\ .$$

LEMMA D. *Sei* $\underset{\approx}{Y}$ *ein Halbverband,* $X \subseteq Y$ *und für endliches* $V \subseteq X$, $x \in X$ *folge aus* $\bigwedge_{v\in V} v \le x$ *(in* $\underset{\approx}{Y}$ *) stets* $x \in \overline{V}$ *. Dann kann jede Abbildung* $f : X \to \underset{\approx}{S}$ *, die alle existierenden* $\wedge$ *von zwei Elementen von* X *erhält, zu einem* $\wedge$*-Homomorphismus* $\overline{f} : \underset{\approx}{Y} \to \underset{\approx}{S}$ *fortgesetzt werden.*

Beweis. Sei F der Filter auf Y , der von $f^{-1}(1)$ erzeugt wird. Wir wollen $f^{-1}(1) = F \cap X$ beweisen. Offenbar ist $f^{-1}(1) \subseteq F \cap X$. Sei also $x \in F \cap X$. Dann ist $x \in X$, und es gibt ein endliches $V \subseteq f^{-1}(1)$ mit $\bigwedge_{v\in V} v \le x$ in $\underset{\approx}{Y}$. Nach Voraussetzung folgt daraus $x \in \overline{V}$, und es bleibt $\overline{V} \subseteq f^{-1}(1)$ zu zeigen. Dazu genügt es wieder, für $V \subseteq f^{-1}(1)$ auch $\Gamma(V) \subseteq f^{-1}(1)$ zu zeigen, was aber unmittelbar daraus folgt, dass f alle in X existierenden $\wedge$ erhält. $\square$

Es bleibt also nun für (d) zu zeigen, dass $\underline{\underline{A}}^0 \subseteq \underline{\underline{A}}^\cap$ die in Lemma D geforderte Bedingung erfüllt. Sei also $g_1, g_2, \ldots, g_n, k \in \underline{A}^* = \mathbb{A}(\underline{A}, \underline{P})$ und

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha \circ g_i \le \alpha \circ k &\Leftrightarrow \forall a \in A\ \alpha\big(g_1(a)\big) \wedge \ldots \wedge \alpha\big(g_n(a)\big) \le \alpha\big(k(a)\big) \\
&\Leftrightarrow \forall a \in A\ \alpha\big(g_1(a)\big) = \ldots = \alpha\big(g_n(a)\big) = 1 \Rightarrow \alpha\big(k(a)\big) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall a \in A\ g_1(a) = \ldots = g_n(a) = 1 \Rightarrow k(a) = 1 \\
&\Leftrightarrow g_1^{-1}(1) \cap \ldots \cap g_n^{-1}(1) \subseteq k^{-1}(1) \\
&\Leftrightarrow \ker\big(g_1\big) \cap \ldots \cap \ker\big(g_n\big) \subseteq \ker(k)\ .
\end{aligned}$$

Da k ein endliches Bild hat, gibt es endlich viele vollständig $\cap$-irreduzible Kongruenzen $\theta_1, \ldots, \theta_m$ auf $\underline{A}$ mit $\ker(k) = \theta_1 \cap \ldots \cap \theta_m$. Da $\mathrm{Con}(\underline{A})$ ein distributiver Verband ist, sind alle θ_j $\cap$-prim, also gibt es $i_1, \ldots, i_m \le n$ mit $\ker\big(g_{i_j}\big) \le \theta_j$ für $j = 1, \ldots, m$. Da $\underline{A}/\theta_j$ subdirekt irreduzibel ist, lässt sich $\underline{A}/\theta_j$

nach (S) in $\underline{P}$ einbetten, also gibt es $k_1, \ldots, k_m \in \underline{A}^*$ mit $\theta_j = \ker(k_j)$ und daher auch $\ker(g_{i_j}) \leq \ker(k_j)$ für $j = 1, \ldots, m$. Da $\ker(k) = \ker(k_1) \cap \ldots \cap \ker(k_m)$ gilt, folgt wie oben $\bigwedge_{j=1}^{m} \alpha \circ k_j = \alpha \circ k$ und $\alpha \circ g_{i_j} \leq \alpha \circ k_j$. Es genügt nun, für $s = 2, \ldots, m-1$ zu zeigen, dass $\alpha \circ k_1 \wedge \ldots \wedge \alpha \circ k_s \in \Phi(\underline{A}^*)$ gilt.

Sei $\alpha \circ k_1 \wedge \ldots \wedge \alpha \circ k_{s-1} = \alpha \circ h \in \Phi(\underline{A}^*)$, $h : \underline{A} \to \underline{P}$. Dann ist für $\Psi = \ker(h) \cap \ker(k_s)$, $\underline{A}/\Psi$ ein homomorphes Bild von $k(\underline{A}) \leq \underline{P}$ und wegen CEP ist $\underline{A}/\Psi$ in ein homomorphes Bild von $\underline{P}$ einbettbar. Setzen wir über (S) hinaus voraus, dass *jedes* homomorphe Bild von $\underline{P}$ in $\underline{P}$ eingebettet werden kann, so finden wir ein $j : \underline{A} \to \underline{P}$ mit $\ker(j) = \Psi = \ker(h) \cap \ker(k_s) = \ker(k_1) \cap \ldots \cap \ker(k_s)$ und es gilt $\alpha \circ k_1 \wedge \ldots \wedge \alpha \circ k_s = \alpha \circ j \in \Phi(\underline{A}^*)$.

Wir können die so gewonnenen Resultate nun zusammenfassen:

THEOREM E. *Sei $\underline{H}$ ein endlicher pseudokomplementärer Halbverband und $\underline{P} = \underline{H \oplus 1}$ hat die Eigenschaft, dass sich jedes homomorphe Bild von $\underline{P}$ in $\underline{P}$ einbetten lässt. Ist ferner $\underset{\sim}{P}$ mit allen internen Homomorphismen von $\underline{P}$ versehen, so ist die durch $\underline{P}$ und $\underset{\sim}{P}$ induzierte Protodualität eine Dualität.*

Ebenso wie bei den Heyting-Algebren gilt auch hier, dass endliche Produkte und (reduzierte) lineare Summen von Algebren $\underline{P}$, deren homomorphe Bilder sich wieder in $\underline{P}$ einbetten lassen, dieselbe Eigenschaft haben. Für lineare Summen überträgt sich der Beweis von 3.5.A und da $\mathrm{Con}(\underline{P})$ stets distributiv ist, ist jedes homomorphe Bild von $\underline{P} \times \underline{Q}$ isomorph zu einer Unteralgebra von $\underline{P}' \times \underline{Q}'$, wobei $\underline{P}', \underline{Q}'$ homomorphe Bilder von $\underline{P}$ und $\underline{Q}$ sind und daher auch Unteralgebren von $\underline{P}$ und $\underline{Q}$. Es gibt also auch hier eine Fülle von Beispielen $\underline{P}$, die die Voraussetzungen von Theorem E erfüllen.

Geht man zu pseudokomplementären Halbverbänden "ohne Null" über, d.h. man hat keinen Namen für das kleinste Element, so ist für jedes $a \in P$ die Abbildung $\varphi_a : x \mapsto a \to x$ ein Endomorphismus mit $\varphi_a^{-1}(1) = [a, 1]$, denn

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

$\to$ erfüllt die Gleichungen $(a \to b) \wedge (a \to c) = a \to (b \wedge c)$ und $(a \to b) \to (a \to c) = a \to (b \to c)$, also ist automatisch jedes homomorphe Bild von $\underline{P}$ isomorph zu einer Unteralgebra von $\underline{P}$. Hier gilt also Theorem E ohne weitere Voraussetzung an $\underline{P}$.

Schliesslich hat $\underline{P} = \underline{2^2 \oplus 1}$ die Eigenschaft, dass jeder interne Homomorphismus zu einem Endomorphismus erweitert werden kann, also erhalten wir eine Dualität, wenn wir $\underset{\sim}{P} = \big(P, \mathrm{End}(\underline{P})\big)$ wählen. Also ist $\underline{2^2 \oplus 1}$ auch als relativ pseudokomplementärer Halbverband endoprimal.

Auch Ketten sind endoprimal als relativ pseudokomplementäre Halbverbände, was aber kein neues Ergebnis ist, da sich die Verbindung $\vee$ durch $\to$ und $\wedge$ auf jeder Kette ausdrücken lässt.

References

[1] K. Baker and A.F. Pixley, "Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems", *Math. Z.* **143** (1975), 165-174.

[2] R. Balbes, "On free pseudo-complemented and relatively pseudo-complemented semi-lattices", *Fund. Math.* **78** (1973), 119-131.

[3] B.A. Davey, "Topological duality for prevarieties of universal algebras", *Studies in foundations and combinatorics*, 61-99 (Advanced in Mathematics: Supplementary Studies, **1**. Academic Press, New York, London, 1978).

[4] B.A. Davey, "Duality for equational classes of Brouwerian algebras and Heyting algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.* **221** (1976), 119-146.

[5] B.A. Davey, "Dualities for Stone algebras, double Stone algebras and relative Stone algebras", *Colloq. Math.* **46** (1982), 1-14.

[6] B.A. Davey and H. Werner, "Dualities and equivalences for varieties of algebras", *Contributions to lattice theory*, 101-275 (Coll. Math. Soc. János Bolyai, **33**. North-Holland, Amsterdam, 1983).

[7] B.A. Davey and H. Werner, "Piggyback dualities", (Coll. Math. Soc. János Bolyai (to appear).

https://doi.org/10.1017/S0004972700009680 Published online by Cambridge University Press

[8] M.S. Goldberg, "Distributive Ockham algebras: free algebras and injectivity", *Bull. Austral. Math. Soc.* **24** (1981), 161-203.

[9] M.S. Goldberg, "Topological duality for distributive Ockham algebras", *Studia Logica* **42** (1983), 23-31.

[10] K.H. Hofmann, M. Mislove and A. Stralka, *The Pontryagin duality of compact* 0-*dimensional semilattices and its applications* (Lecture Notes in Mathematics, **396**. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974).

[11] H.A. Priestley, "Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces", *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 186-190.

[12] H.A. Priestley, "Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices", *Proc. London Math. Soc.* (3) **24** (1972), 507-530.

[13] A. Urquhart, "Distributive lattices with a dual homomorphic operation", *Studia Logika* **38** (1979), 201-209.

Department of Mathematics,
La Trobe University,
Bundoora,
Victoria 3083,
Australia;

FB.17 - Mathematik
GHK Universität,
D-3500 Kassel,
West Germany.