LA DÉRIVÉE DE LA PRIMITIVE DE L'INTÉGRALE DE PERRON

Serge Dubuc

Nous voulons donner une démonstration directe du fait que la dérivée de la primitive d'une fonction $f(x)$ intégrable au sens de Perron existe et est égale à $f(x)$ presque partout. Nous utiliserons essentiellement le "lemme du soleil levant" ou plutôt un de ses corollaires immédiats.

LEMME (F. Riesz [1]). Si $g(x)$ est une fonction continue sur R, alors $\{x \mid (\exists y)\, y > x \text{ et } g(y) > g(x)\}$ est un ouvert; si (a,b) est une des composantes connexes de cet ouvert, alors $g(a) = g(b)$.

COROLLAIRE. Si $h(x)$ est une fonction croissante dont la variation est V, alors la mesure au sens de Lebesgue de

$$\{x \mid (\exists y > x)\ \frac{h(y)-h(x)}{y-x} > k\} \text{ ne dépasse pas } \frac{V}{k}\ .$$

Soit $f(x)$ une fonction de $(-\infty, \infty) \to [-\infty, \infty]$; pour la simplicité de l'exposition nous considérons que f est intégrable au sens de Perron, dans son sens original. Il ne s'agit pas de l'intégrale modifiée de Perron telle que l'on peut rencontrer dans les volumes de Saks [2] et de McShane [3]. Si $F(x)$ est une fonction continue,

$$\overline{D}F(x) = \overline{\lim_{h \to 0}}\ \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\ ; \qquad \underline{D}F(x) = \underline{\lim}_{h \to 0}\ \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\ .$$

On dit que la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Perron, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions continues $F^*(x)$ et $F_*(x)$ telles que:

a) $\overline{D}F_*(x) \leq f(x) \leq \underline{D}F^*(x)$;

b) $f(x) = -\infty \Rightarrow \underline{D}F^*(x) > -\infty$;

c) $f(x) = +\infty \Rightarrow \overline{D}F^*(x) < +\infty$;

d) la variation de $F^*(x)-F_*(x)$ est plus petite que ε .

Pour une fonction $f(x)$ intégrable au sens de Perron, on définit aisément une primitive $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ (cf [3]).

Soit $\varepsilon > 0$; posons

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-070-0 Published online by Cambridge University Press

$$E(\varepsilon) = \{x \mid \overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt > f(x) + \varepsilon\} ;$$

vérifions que la mesure de $E(\varepsilon)$ est nulle.

Soit $\delta > 0$, considérons deux fonctions F^* et F_* remplissant les conditions a), b) et c) de tantôt et telle que la variation de la fonction $H(x) = F^*(x)-F_*(x)$ soit plus petite que $\delta\varepsilon$. Soit $x \in E(\varepsilon)$, posons $\eta = \overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - f(x) - \varepsilon$; puisque $\overline{D}F_*(x) \leq f(x)$, on peut trouver un nombre $x_o > x$ tel que $(\forall y)\ (x < y < x_o) \Rightarrow \frac{F_*(y) - F_*(x)}{y - x} \leq f(x) + \frac{\eta}{2}$. Puisque $\int_x^{x+h} f(t)dt \leq F^*(x+h) - F^*(x)$, on peut trouver un y tel que $x < y < x_o$ et

$$\frac{F^*(y) - F^*(x)}{y-x} > f(x) + \varepsilon + \frac{\eta}{2}.$$

Il existe donc un $y > x$ tel que $\frac{H(y)-H(x)}{y-x} > \varepsilon$. $E(\varepsilon)$ est donc contenu dans un ouvert dont la mesure est plus petite que δ par le corollaire du lemme du soleil levant. Nous avons donc établi que $\overline{\lim_{h\downarrow 0}} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x)$ presque partout. De ce résultat, on déduit aisément que $\lim_{h\to 0} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x)$ presque partout.

REFERENCES

1. F. Riesz, Sur un théorème de maximum de MM. Hardy-Littlewood. Jour. London Math. Soc. 7 (1932) 10-13.

2. Saks. Théorie de l'intégrale. (Varsovie, 1933).

3. McShane, Integration. (Princeton Univ. Press).

Université de Montréal et
Faculté des Sciences d'Orsay

https://doi.org/10.4153/CMB-1969-070-0 Published online by Cambridge University Press