Can. J. Math., Vol. XXXIX, No. 5, 1987, pp. 1147-1161

THÉORÈMES DE CONVERGENCE LOCALE POUR LES RÉSOLVANTES ET LES PROCESSUS ABÉLIENS À PLUSIEURS PARAMÈTRES

DANIEL BOIVIN

1. Introduction. En démontrant un lemme ergodique maximal pour une famille résolvante de contractions positives et propres de $\mathbf{L}^1(\sigma)$ [**5**], D. Feyel a obtenu, entre autres, des théorèmes de dérivation pour les processus abéliens [**7**]. Grâce à un théorème taubérien, il peut déduire un théorème de convergence locale pour les processus additifs. Le but de cet article est de montrer que le lemme ergodique maximal de D. Feyel et une technique de réduction des paramètres, introduite par Dunford-Schwartz [**4**] et développée par Terrell [**13**] et Akcoglu-del Junco [**1**] permettent d'obtenir des théorèmes de dérivation pour les familles résolvantes à plusieurs paramètres. C'est ce qu'on fait à la Section 2. Le premier théorème ergodique local pour les semi-groupes de contractions a été obtenu par Krengel [**10**] et Ornstein [**12**]. A la Section 3, nous considérons les processus abéliens associés aux processus additifs qui ont été introduits dans [**2**] par Akcoglu et Krengel et dont les résultats ont ensuite été généralisés par Terrell [**13**], Akcoglu et del Junco [**1**], Emilion [**5**]. Comme dans le cas à un paramètre, à la Section 4, nous retrouvons un théorème local pour les processus additifs.

2. Familles résolvantes à plusieurs paramètres. Dans ce qui suit, $\mathbf{P}_n$ sera l'ensemble des vecteurs de $\mathbf{R}_n$ dont chaque coordonnée est strictement positive. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, un vecteur de $\mathbf{R}_n$ alors $m(\lambda) = \lambda_1 \dots \lambda_n$, le produit des coordonnées de λ. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{P}_n$, $\lambda/\nu/\mu$ signifiera que pour tout i, $1 \leqq i \leqq n$, $\nu_i = \lambda_i$ ou $\nu_i = \mu_i$ et $\nu|_\mu$ sera le nombre de coordonnées de ν égales à la coordonnée correspondante de μ, c'est-à-dire,

$$\nu|_\mu = \#\{i: \nu_i = \mu_i.\}.$$

Définition (2.1). Une famille d'opérateurs linéaires $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ dans un espace de Banach $\mathbf{B}$ est une famille résolvante à n-paramètres si elle vérifie l'équation résolvante:

$$m(\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu = (-1)^n \sum_{\lambda/\nu/\mu} (-1)^{\nu|_\mu} V_\nu$$

Reçu le 5 mai 1986 et sous forme revisée le 6 août 1986. Les résultats de cet article sont tirés de la thèse de doctorat de l'auteur. Il la rédige sous la direction de M. A. Akcoglu. Ce travail a été soutenu par une bourse de C.R.S.N.G.

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{P}_n$, $m(\lambda - \mu) \neq 0$. $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ est une famille résolvante de contractions dans $\mathbf{B}$ si de plus elle vérifie:

$$\|m(\lambda)V_\lambda\| \leqq 1, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{P}_n.$$

Considérons n opérateurs linéaires fermés A_i; $1 \leqq i \leqq n$ dont le domaine $\mathbf{D}(A_i)$ est dense et vérifiant:

a) pour tout $\lambda > 0$ et i, $1 \leqq i \leqq n$, $(\lambda - A_i)^{-1}$ existe

b) $\|\lambda(\lambda - A_i)^{-1}\| \leqq 1$, pour tout i, $1 \leqq i \leqq n$

c) pour $1 \leqq i, j \leqq n$ et pour $\lambda, \mu > 0$,

$$(\lambda - A_i)^{-1}(\mu - A_j)^{-1} = (\mu - A_j)^{-1}(\lambda - A_i)^{-1}.$$

Dans ce cas

$$V_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)} = (\lambda_1 - A_1)^{-1} \dots (\lambda_n - A_n)^{-1}$$

vérifie l'équation résolvante.

Remarquons que dans le cas $n = 1$, on retrouve la définition habituelle d'une famille résolvante $(\lambda V_\lambda)_{\lambda>0}$ vérifiant

$$V_\lambda - V_\mu = -(\lambda - \mu)V_\lambda V_\mu \quad \text{pour tous } \lambda, \mu > 0.$$

Dans les démonstrations qui suivent nous utiliserons à plusieurs reprises l'observation suivante: $V_\lambda f \to 0$ dans $\mathbf{B}$ si pour au moins une des coordonnées, $\lambda_i \to \infty$. Dans tout ce qui suit $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ est une famille résolvante de contractions.

PROPOSITION (2.2). *Posons*

$$\mathscr{E} = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{P}_n} V_\lambda(\mathbf{B}).$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) $\mathscr{E}$ *est dense dans* $\mathbf{B}$

(2) $\lim_{\lambda \to \infty} m(\lambda)V_\lambda x = x$ *pour tout* x *dans* $\mathbf{B}$.

Lorsque $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ *satisfait* (1) *on dit qu'elle est fortement continue.*

Démonstration. (2) implique (1) est immédiat. D'autre part soit $x = V_\alpha y$, $\alpha \in \mathbf{P}_n$, alors

$$m(\lambda)V_\lambda V_\alpha y = \frac{m(\lambda)}{m(\lambda - \alpha)} \sum_{\lambda/\nu/\alpha} (-1)^{n+\nu|_\alpha} V_\nu y \to V_\alpha y$$

lorsque $\lambda \to \infty$ puisque $V_\nu y \to 0$ lorsque $\lambda \to \infty$ pour tout ν, $\lambda/\nu/\alpha$ sauf $\nu = \alpha$.

Rappelons que $(P_t)_{t \in \mathbf{R}_n/t \geqq 0}$ est un semi-groupe de contractions fortement continu dans $\mathbf{B}$ si pour tous vecteurs $u, v \geqq 0$,

$$P_u:\mathbf{B} \to \mathbf{B}, \quad \|P_u\| \leqq 1, \quad P_uP_v = P_{u+v} \quad \text{et} \quad \|P_ux - P_vx\| \to 0$$

lorsque $u \to v$ pour tout $x \in \mathbf{B}$ et exigeons aussi que $P_{(0,\ldots,0)} = I$ (l'identité dans $\mathbf{B}$). Nous avons cette généralisation du théorème de Hille-Yosida [**11**].

THÉORÈME (2.3). *Les familles résolvantes de contractions fortement continues, les semi-groupes de contractions fortement continus et la classe des opérateurs* $(A_i, \mathbf{D}(A_i))_{1 \leqq i \leqq n}$ *satisfaisant les conditions* a) – c) *se correspondent un-à -un.*

$$V_\lambda x = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty e^{-\lambda \cdot t} P_t x dt$$

(*limite des sommes de Riemann dans* $\mathbf{B}$),

$$V_\lambda = (\lambda_1 - A_1)^{-1} \ldots (\lambda_n - A_n)^{-1}$$

et $(A_i, \mathbf{D}(A_i))$ *sont les générateurs infinitésimaux des semi-groupes* $P_{(0,\ldots,t_i,\ldots,0)}$.

Démonstration. Si (P_t) est un semi-groupe de contractions fortement continu à n paramètres, $P_t = P_{(t_1,0,\ldots,0)} \ldots P_{(0,\ldots,0,t_n)}$, le produit de n semi-groupes à 1 paramètre dont les résolvantes respectives sont $V^1_{\lambda_1}, \ldots, V^n_{\lambda_n}$. Alors

$$V_\lambda = V^1_{\lambda_1} \ldots V^n_{\lambda_n}$$

est une famille résolvante à n paramètres et est la transposée de Laplace de (P_t). D'autre part soit (V_λ) une famille résolvante à n paramètres. Posons, pour i, $1 \leqq i \leqq n$,

$$V^i_{\lambda_i} x = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{n-1} V_{(\alpha,\ldots,\lambda,\ldots,\alpha)} x.$$

D'après l'équation résolvante ces limites existent et

$$V_\lambda = V^1_{\lambda_1} \ldots V^n_{\lambda_n}.$$

Ce sont n familles résolvantes qui commutent entre elles puisque $V_\lambda V_\mu = V_\mu V_\lambda$. Elles sont donc associées à n semi-groupes fortement continus par le théorème de Hille-Yosida. Et le reste est facile.

Rappelons maintenant certains résultats de l'étude des exposants fractionnaires d'un générateur infinitésimal. Ceci nous permettra d'énoncer le résultat principal de cette section de façon concise. Nous suivrons l'exposé de Balakrishnan [**3**].

Supposons toujours dans la suite que A est une opérateur linéaire fermé dont le domaine $\mathbf{D}(A)$ est dense dans $\mathbf{B}$. Supposons aussi que $(\lambda - A)^{-1}$ existe et que

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leqq 1.$$

Soit $x \in \mathbf{D}(A)$, alors pour $0 < \alpha < 1$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda - A)^{-1}Axd\lambda$$

converge dans le sens absolu. Posons $\alpha = 1/2$ et définissons un opérateur linéaire $J^{1/2}$ par

$$J^{1/2}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(\lambda - A)^{-1}(-A)xd\lambda \quad \text{pour } x \in \mathbf{D}(A).$$

Notons par $(-A)^{1/2}$ le plus petit prolongement fermé de $J^{1/2}$. Cette notation est motivé par le fait que

$$(-A) = [(-A)^{1/2}(-A)^{1/2}]_c$$

le plus petit prolongement fermé de $(-A)^{1/2}(-A)^{1/2}$. $(-A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $S_{1/2}(t)$ défini par

$$S_{1/2}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\lambda - A)^{-1} \sin \sqrt{\lambda}td\lambda.$$

Cependant

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda s}P_s ds.$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned}
S_{1/2}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (\lambda - A)^{-1} \sin \sqrt{\lambda}td\lambda \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s} \sin \sqrt{\lambda}tP_s dsd\lambda \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda s}\sin\sqrt{\lambda}td\lambda \cdot P_s ds \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi}} s^{-3/2}e^{-t^2/4s}P_s ds.
\end{aligned}$$

C'est la transformation que nous utiliserons pour faire la réduction des paramètres.

LEMME (2.4). *Soient* $(A, \mathbf{D}(A))$ *et* $(B, \mathbf{D}(B))$ *les générateurs infinitésimaux d'un semi-groupe de contractions fortement continu à* 2 *paramètres. Alors*

$$\mathbf{D} = (\lambda - A)^{-1}(\mu - B)^{-1}\mathbf{B}$$

est indépendant de λ, $\mu > 0$ *et est dense dans* $\boldsymbol{B}$.

Démonstration. Pour $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 > 0$,

https://doi.org/10.4153/CJM-1987-058-2 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - B)^{-1}\mathbf{B} &= (\lambda_1 - A)^{-1}(\mu_2 - B)^{-1}\mathbf{B} \\ &= (\mu_2 - B)^{-1}(\lambda_1 - A)^{-1}\mathbf{B} \\ &= (\mu_1 - A)^{-1}(\mu_2 - B)^{-1}\mathbf{B}.\end{aligned}$$

LEMME (2.5). *Soit* $V_\lambda = (\lambda_1 - A)^{-1}(\lambda_2 - B)^{-1}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *une résolvante fortement continue, alors le plus petit prolongement fermé de* $(-A)^{1/2} + (-B)^{1/2}$ *est le générateur d'un semi-groupe de contractions fortement continu à* 1 *paramètre.*

Démonstration. D'après [**4**] et ce qu'on a vu plus haut, $(-A)^{1/2}$ et $(-B)^{1/2}$ sont les générateurs de semi-groupes fortement continus, disons (P_t) et (S_t) respectivement. Puisque $(\lambda - A)^{-1}$ et $(\mu - B)^{-1}$ commutent pour tous λ, $\mu > 0$,

$$(\lambda - (-A)^{1/2})^{-1} \quad \text{et} \quad (\mu - (-B)^{1/2})^{-1}$$

commutent. Donc P_t et S_t commutent aussi pour tous t, $s \geqq 0$.

Pour $t \geqq 0$, posons $R_t = P_tS_t$. R_t est un semi-groupe de contractions fortement continu et pour $x \in \mathbf{D}$,

$$\begin{aligned}Cx &= \lim_{t \to 0^+} t^{-1}(R_t - I)x = P_0(-A)^{1/2}x + S_0(-B)^{1/2}x \\ &= (-A)^{1/2}x + (-B)^{1/2}x.\end{aligned}$$

Et puisque $\mathbf{D}$ est dense, et $R_t\mathbf{D} \subset \mathbf{D}$, pour tout $x \in \mathbf{D}(C)$, il existe $x_n \in \mathbf{D}$, $x_n \to x$ et

$$Cx_n = (-A)^{1/2}x + (-B)^{1/2}x \to Cx$$

[**12**, p. 241]. Donc C est le plus petit prolongement fermé de $(-A)^{1/2} + (-B)^{1/2}$.

Dans ce qui suit, une famille résolvante sera une famille résolvante de contractions positives et propres dans $\mathbf{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, \sigma)$, où σ est σ-finie. C'est-à-dire que si $f \in \mathbf{L}_1$, $f \geqq 0$ p.p. alors $V_\lambda f \geqq 0$ p.p. et qu'il existe $\Phi > 0$ p.p., $\Phi \in \mathbf{L}_1$ et $\alpha \in \mathbf{P}_n$ tels que $V_\alpha\Phi > 0$ p.p. On peut alors énoncer le théorème suivant presque comme dans [**6**, Théorème 4].

THÉORÈME (2.6). *Pour toute* $f \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, \sigma)$, *il existe* $\tilde{f} \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathscr{F}, \sigma)$ *telle que* $m(\lambda)V_\lambda f \to \tilde{f}$ *fortement quand* $\lambda \to \infty$ *dans* $\mathbf{P}_n$. $V_\alpha f = V_\alpha \tilde{f}$ *pour tout* $\alpha \in \mathbf{P}_n$. *Cet opérateur est noté* P_0, $P_0 f = \tilde{f}$.

Démonstration. Soit $\mathbf{M}$ le sous-espace linéaire de $\mathbf{L}_1$ engendré par

$$\mathscr{E} = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{P}_n} V_\lambda(\mathbf{L}_1)$$

et soit $\bar{M}$, sa fermeture dans la topologie forte. Alors $m(\lambda)V_\lambda f \to f$ fortement pour tout $f \in \bar{M}$. De plus $\bar{M}$ est faiblement fermé. La démonstration dans [**6**] est donc valide.

Si nous considérons la famille (V_λ) dans $\bar{M}$. C'est une famille résolvante fortement continue. Et d'après le théorème précédent, on voit qu'on peut supposer sans perte de généralité que (V_λ) est fortement continue. Nous pouvons donc associer à cette résolvante un semi-groupe fortement continu.

PROPOSITION (2.7). *Soient* $\alpha \in \mathbf{P}_n$ *et* f *dans* $\mathbf{L}_1(\sigma)$. *Alors la fonction*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\underline{\lambda} > \underline{\alpha}} m(\underline{\lambda}) V_{\underline{\lambda}} f$$

est finie presque partout. ($\underline{\lambda} = (\lambda, \ldots, \lambda)$ *et* $\underline{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha)$).

Démonstration. Il est suffisant de faire la démonstration pour $n = 2$. Soit $(P_t)_{t \in \mathbf{P}_n}$ le semi-groupe associé à la résolvante (V_λ). Alors dans [**4**], [**12**] on montre que si

$$\Phi_x(t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2} e^{-x^2/4t}, \quad x, t > 0,$$
$$S_x f = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_x(t) \Phi_x(s) P_{(t,s)} f dt ds$$

est un semi-groupe de contractions positives fortement continu puisque

$$\|S_x f - P_{(0,0)} f\| \to 0$$

lorsque $x \to 0^+$ pour toute f. Soit $(W_\lambda)_{\lambda > 0}$ la résolvante de $(S_x)_{x \geqq 0}$.

$$W_\lambda f = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{x^2}{4\pi} (ts)^{-3/2} e^{-x^2/4t - x^2/4s} P_{(t,s)} f dt ds.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^2 e^{-x^2/4(1/t + 1/s)} dx &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2/4u}}{\sqrt{u}(u + A)^2} du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} e^{-\lambda^2 x/4}}{(1 + Ax)^2} dx \end{aligned}$$

$$\text{où } A = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s}\right),$$

donc

$$W_\lambda f = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(ts)^{-3/2}}{4\pi} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} e^{-\lambda^2 x/4}}{(1 + Ax)^2} dx P_{(t,s)} f dt ds$$

Fixons $\alpha > 0$. Nous allons montrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute $f \in \mathbf{L}_1$, $f \geqq 0$ et pour tout $\lambda > \alpha$, $\lambda W_\lambda f \geqq \delta \lambda^2 V_\lambda f$.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}e^{-\lambda^2 x/4}}{(1 + Ax)^2}dx \geqq \int_0^\infty \sqrt{x}e^{-\lambda^2/4-2Ax}dx = \mathbf{I}$$

puisque

$$\frac{1}{1 + y} \geqq e^{-y} \quad \text{pour } y \geqq 0.$$

Posons

$$B = \frac{\lambda^2}{4} + 2A, \quad u = Bx, \quad \mathbf{I} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{B}}e^{-u}\frac{du}{B} = \frac{1}{B^{3/2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$$

Il faut montrer qu'il existe $\delta \geqq 0$ tel que pour tous t, $s \geqq 0$ et pour tout $\lambda > \alpha$

$$\frac{\lambda(ts)^{-3/2}}{B^{3/2}} \geqq \delta \cdot \lambda^2 e^{-\lambda(t+s)}.$$

Or

$$\frac{(ts)^{-3/2}}{B^{3/2}} = \frac{1}{\left(ts\left(\frac{\lambda^2}{4} + 2A\right)\right)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda^2 ts + 2(t + s))^{3/2}}.$$

Montrons donc qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous t, $s \geqq 0$ et pour tout $\lambda > \alpha$,

$$\frac{1}{(\lambda^2 ts + 2(t + s))^{3/2}} \geqq \delta\lambda e^{-\lambda(t+s)}.$$

Lorsque t, $s \geqq 0$, et $t + s \leqq 1$, $\lambda^2 ts + 2(t + s) \leqq \lambda^2 + 2$. Donc,

$$\frac{e^{\lambda(t+s)}}{\lambda(\lambda^2 ts + 2(t + s))^{3/2}} \geqq \frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 2)^{3/2}}$$

et il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $\lambda > \alpha$,

$$\frac{1}{\lambda(\lambda^2 + 2)^{3/2}} > \delta.$$

Lorsque $t + s \geqq 1$, puisque $ts \leqq (t + s)^2$ et $(t + s) \leqq (t + s)^2$,

$$\begin{aligned}\frac{e^{\lambda(t+s)}}{\lambda(\lambda^2 ts + 2(t + s))^{3/2}} &\geqq \frac{\lambda^4(t + s)^4/24}{\lambda(\lambda^2 + 2)^{3/2}(t + s)^3} \\ &= \frac{1}{24}\frac{\lambda^3(t + s)}{(\lambda^2 + 2)^{3/2}} \geqq \frac{1}{24}\frac{\lambda^3}{(\lambda^2 + 2)^{3/2}}\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1987-058-2 Published online by Cambridge University Press

qui est une fonction continue et positive dans $[\alpha, \infty)$ et elle converge vers 1 quand $\lambda \to \infty$. Ce qui montre l'existence d'un $\delta > 0$.

Pour terminer la démonstration on n'a qu'à utiliser [**6**, Proposition 9].

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\lambda > \alpha} m(\lambda) V_\lambda f \leqq \frac{1}{\delta} \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda > \alpha} \lambda W_\lambda f < \infty \text{ p.p.}$$

Etablissons maintenant la convergence p.p. de $m(\lambda) V_{\underline{\lambda}} f$ pour

$$f \in \mathscr{E} = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{P}_n} V_\lambda(\mathbf{L}_1).$$

Rappelons la définition de [**6**]: g_λ converge vers g pour l'ordre signifie que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to \infty} \operatorname*{ess\,sup} g_\lambda &= \inf_n \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda > n} g_\lambda = \sup_n \operatorname*{ess\,inf}_{\lambda > n} g_\lambda \\ &= \lim_{\lambda \to \infty} \operatorname*{ess\,inf} g_\lambda = g. \end{aligned}$$

Notons $\underline{\lambda} = (\lambda, \dots, \lambda)$ et $\underline{\alpha} = (\alpha, \dots, \alpha) \in \mathbf{P}_n$.

LEMME (2.8) *Soit $f \in \mathscr{E}$. Alors $m(\lambda) V_{\underline{\lambda}} f$ converge vers f pour l'ordre quand $\lambda \to \infty$.*

Démonstration. Soit $f = V_\alpha g$. Alors

$$m(\lambda) V_\lambda V_\alpha g = \frac{m(\lambda)}{m(\lambda - \alpha)} \sum_{\lambda/\nu/\alpha} (-1)^{n + |\nu|_\alpha} V_\nu g \to V_\alpha g$$

pour l'ordre quand $\lambda \to \infty$ puisque $V_\nu g$ décroit (si g est positive) lorsque $\lambda \to \infty$ et $V_\nu g$ converge vers 0 en norme, sauf pour $\nu = \alpha$.

THÉORÈME (2.9). *Soit $f \in \mathbf{L}_1(\sigma)$. Quand $\lambda \to \infty$, $m(\underline{\lambda}) V_{\underline{\lambda}} f$ converge vers $\tilde{f}$ pour l'ordre, où $\tilde{f} = P_0 f$.*

Démonstration. Si f est de la forme $V_\alpha g$, $g \geqq 0$, $\alpha \in \mathbf{P}_n$ on a

$$m(\underline{\lambda}) V_{\underline{\lambda}} f = (m(\underline{\lambda}) - m(\underline{\lambda} - \alpha)) V_{\underline{\lambda}} f + (-1)^n \sum_{\underline{\lambda}/\nu/\alpha} (-1)^{|\nu|_\alpha} V_\nu g.$$

Posons $\beta = \max \alpha_i$, alors

$$(m(\underline{\lambda}) - m(\lambda - \alpha)) V_\lambda f \leqq (m(\underline{\lambda}) - m(\underline{\lambda} - \beta)) V_{\underline{\lambda}} f$$

qui converge vers 0 pour l'ordre quand $\lambda \to \infty$. Les autres termes, sauf $V_\alpha g$, sont des fonctions décroissantes dont la norme converge à 0. Donc $m(\underline{\lambda}) V_{\underline{\lambda}} f$ converge vers f pour l'ordre.

D'après le principe de Banach [**9**] et le lemme maximal, nous obtenons la convergence pour toute $f \in \bar{M}$. Et puisque $V_{\underline{\lambda}} f = V_{\underline{\lambda}} \tilde{f}$ pour tout $\lambda > 0$ où $m(\underline{\lambda}) V_{\underline{\lambda}} f \to \tilde{f}$ fortement la démonstration est complète.

3. Processus abéliens à plusieurs paramètres. Les notations sont les mêmes qu'à la section précédente.

Définition (3.1). Nous appellerons *processus abélien à n paramètres* une famille de fonctions $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ de $\mathbf{L}_1(\sigma)$ satisfaisant les deux conditions suivantes:

a) $$\sup_{\lambda \in \mathbf{P}_n} \|m(\lambda)u_\lambda\| \leqq M < \infty$$

b) $$m(\lambda - \mu)V_\lambda u_\mu = (-1)^n \sum_{\lambda/\nu/\mu} (-1)^{|\nu|_\mu} u_\mu \quad \text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbf{P}_n.$$

Le processus abélien est dit absolument continu s'il est de la forme $u_\lambda = V_\lambda f$ pour une $f \in \mathbf{L}_1$. Nous avons cette généralisation du théorème de [7] dont la démonstration est facilement transposée.

Pour $g \in \mathbf{L}_1$ et $\alpha > 0$,

$$v_\lambda = (I - (\lambda_1 - \alpha)V^1_{\lambda_1})V^2_{\lambda_2}g \quad \text{et}$$
$$w_\lambda = (I - (\lambda_1 - \alpha)V^1_{\lambda_1})(I - (\lambda_2 - \alpha)V^2_{\lambda_2})g$$

sont des exemples de processus abéliens à deux paramètres.

THÉORÈME (3.2). *L'espace vectoriel des processus abéliens, $\mathscr{A}$, est complètement réticulé en ordre naturel. Le sous-espace $\mathscr{A}_c$ des processus absolument continus est une bande dans $\mathscr{A}$, et l'on a les équivalences*:

a) *le processus $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ est absolument continu*
b) *la famille $(m(\lambda)u_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ est faiblement compacte dans $\mathbf{L}_1$*
c) *$m(\lambda)u_\lambda$ converge fortement quand $\lambda \to \infty$.*

Un sous-ensemble I de $\mathbf{P}_n$ est un interval s'il est le produit cartésien d'intervals bornés de $\mathbf{P}_1$. $\mathscr{I}_n$ la classe de tous les intervals de $\mathbf{P}_n$. Comme dans [1] nous dirons qu'un processus $(F(I))_{I \in \mathscr{I}_n}$ est additif s'il vérifie:

a) $F(I) \in \mathbf{L}_1$ pour tout $I \in \mathscr{I}_n$ et

$$\sup_{I \in \mathscr{I}_n} \frac{1}{m(I)} \cdot \|F(I)\| \leqq M < \alpha$$

b) $P_u F(I) = F(I + u)$ pour tous $u \in \mathbf{P}_n$ et $I \in \mathscr{I}_n$
c) Pour $I_1, \ldots, I_k \in \mathscr{I}_n$ disjoints deux à deux et

$$\bigcup_{i=1}^{k} I_i = I \in \mathscr{I}_n, \quad F(I) = \sum F(I_i).$$

Notons $\mathscr{C}$, l'espace vectoriel des processus additifs et $\mathscr{C}_c$ le sous-espace des processus de la forme

$$F(I) = \int_I P_s f ds.$$

Démontrons maintenant le résultat principal de cette section qui est une généralisation de [**7**, Théorème 7].

THÉORÈME (3.3). *La transformation*

$$u_\lambda = \int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda \cdot t} F(dt)$$

est un isomorphisme bi-croissant de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{A}$. Il s'ensuit que $\mathcal{C}$ est complètement réticulé. L'image de $\mathcal{C}_c$ est exactement $\mathcal{A}_c$, donc $\mathcal{C}_c$ est une bande dans $\mathcal{C}$.

Démonstration. Soit $(F(I))_{I \in \mathbf{P}_n}$ un processus abélien. Alors

$$\|u_\lambda\| \leqq M \int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda \cdot t} m(dt) = M/m(\lambda).$$

$$V_\lambda u_\lambda = \int_{\mathbf{P}_n}\int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda t - \mu s} P_t F(ds) dt = \int_{\mathbf{P}_n}\int_t^\infty e^{-\lambda t - \mu u + \mu t} F(du) dt$$

$$= \int_{\mathbf{P}_n}\int_0^u e^{(\mu-\lambda)t} dt e^{-\mu u} F(du)$$

$$= \int_{\mathbf{P}_n} \prod_{i=1}^n \frac{(e^{(\mu_i - \lambda_i)u_i} - 1)}{(\mu_i - \lambda_i)} e^{-\mu u} F(du)$$

$$= \frac{(-1)^n}{m(\mu - \lambda)} \sum_{\mu/\nu/\lambda} (-1)^{\nu|_\lambda} u_\nu.$$

Donc (u_λ) est un processus abélien. Montrons qu'elle est surjective. Soit (u_λ) un processus abélien. Faisons la démonstration dans le cas $n = 2$ pour simplifier les notations. Pour λ fixe, $u_{(\lambda,\mu)}$ est un processus abélien. En effet,

$$\frac{\alpha}{\alpha - \lambda}(u_{(\alpha,\beta)} - u_{(\lambda,\beta)} - u_{(\alpha,\mu)} + u_{(\lambda,\mu)}) = \alpha(\beta - \mu) V_{(\alpha,\beta)} u_{(\lambda,\mu)}$$

et en faisant $\alpha \to \infty$,

$$u_{(\lambda,\mu)} - u_{(\lambda,\beta)} = (\beta - \mu) V_\beta^2 u_{(\lambda,\mu)} \quad \text{où } V_{(\alpha,\beta)} = V_\alpha^1 V_\beta^2.$$

Nous avons aussi l'identité élémentaire suivante qui généralise [**6**, p. 150],

$$(P_s - P_{s_0}) V_\alpha = \int_{s_0}^s (\alpha V_\alpha - I) P_t dt.$$

D'après [**6**], l'hypothèse de propreté pour (V_λ) implique que $(P_t)_{t \in \mathbf{P}_n}$ est continu à l'origine, c'est-à-dire qu'il existe P_0 tel que $\|P_t f - P_0 f\| \to 0$ lorsque $t \to 0$ pour tout $f \in \mathbf{L}_1$. Considérons les processus $(u_\lambda^\alpha)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ définis par

$$u_\lambda^\alpha = m(\alpha) V_\alpha u_\lambda = m(\alpha) V_\lambda u_\alpha.$$

Posons

$$G^\alpha(i) = \int_I m(\alpha) P_s u_\alpha ds.$$

Les processus $G^\alpha(I)$ sont additifs et

$$\int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda t} G^\alpha(dt) = \int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda t} m(\alpha) P_t u_\alpha dt = m(\alpha) V_\lambda u_\alpha = u_\lambda^\alpha.$$

Pour $I \times J \in \mathscr{I}_2$ fixés, on a

$$\begin{aligned}
&\|G^{(\alpha,\beta_1)}(I \times J) - G^{(\alpha,\beta_2)}(I \times J)\| \\
&= \left\| \int_I \int_J (\alpha P_s^1 \beta_1 P_t^2 u_{(\alpha,\beta_1)} - \alpha P_s^1 \beta_2 P_t^2 u_{(\alpha,\beta_2)} dt ds \right\| \\
&\leqq \alpha m(I) \left\| \int_J \beta_1 P_t^2 u_{(\alpha,\beta_1)} - \beta_2 P_t^2 u_{(\alpha,\beta_2)} dt \right\| \\
&\leqq \alpha m(I) \left\| \int_J (\beta_1 - \beta_2)(I - \beta_2 V_{\beta_2}^2) P_t^2 u_{(\alpha,\beta_1)} dt \right\| \\
&= \alpha m(I) \|(\beta_1 - \beta_2)(P_{t_2}^2 - P_{t_1}^2) V_{\beta_2}^2 u_{(\alpha,\beta_1)}\| \quad \text{si } J = (t_1, t_2) \\
&\leqq \alpha m(I) \cdot |\beta_1 - \beta_2| \cdot \frac{2M}{\beta_2 \cdot \alpha \beta_1} \\
&= m(I) \cdot 2M \cdot \left| \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right| \to 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|G^{(\alpha_1,\alpha_2)}(I \times J) - G^{(\beta_1,\beta_2)}(I \times J)\| \to 0 \quad \text{lorsque } \alpha, \beta \to \infty.$$

Soit $G(I \times J) \in \mathbf{L}_1$ la limite. On a

$$\|G(I)\|/m(I) \leqq M < \infty \quad \text{pour tout } I \in \mathscr{I}_2$$

et par passage à la limite, nous établissons la relation d'additivité. Le théorème de Lebesgue de convergence dominée permet de calculer la transformée de Laplace de $G(I)$. C'est la limite des $u_\lambda^\alpha = m(\alpha) V_\alpha u_\lambda$ quand $\alpha \to \infty$ c'est donc $u_\lambda = P_0 u_\lambda$.

On peut terminer comme dans [7]. Si les (u_λ) sont $\geqq 0$, les $G^\alpha(I)$ le sont aussi, puis les $G(I)$ par passage à la limite. Enfin on a bien

$$V_\lambda f = \int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda t} F(dt)$$

si

$$F(I) = \int_I P_t f dt.$$

On note $\mathscr{C}_s$, la bande étrangère à $\mathscr{C}_c$: c'est la bande des processus singuliers et elle correspond à $\mathscr{A}_s$.

THÉORÈME (3.4). *Soit* $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ *un processus abélien associé à une résolvante propre. On a les propriétés suivantes*:

a) $m(\lambda)u_\lambda$ *converge essentiellement quand* $\lambda \to \infty$ *vers une* $f \in \mathbf{L}_1$

b) *le processus* $(V_\lambda f)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ *est la partie absolument continue de* (u_λ).

Démonstration. D'après [**1**, p. 766] et le théorème précédent, (u_λ) est la somme d'un processus abélien absolument continu et d'un processus singulier,

$$u_\lambda = V_\lambda f + v_\lambda \quad \text{où } v_\lambda \in \mathscr{A}_s.$$

Or nous savons que $m(\lambda)V_\lambda f$ converge essentiellement vers $P_0 f$. Montrons que $m(\lambda)v_\lambda \to 0$ essentiellement lorsque $\lambda \to \infty$. Supposons que v_λ est positif. D'après le théorème précédent, il existe $(G(I)) \in \mathscr{C}_s$ dont (v_λ) soit la transformée. De l'existence d'un processus $(F(I)) \in \mathscr{C}_s$ de dimension inférieure à n [**7**] et de calculs comme à la Section 2, on montre qu'il existe une résolvante $(W_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_m}$, un processus singulier $(w_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_m}$, $m < n$ et un $\delta > 0$ tel que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\underline{\lambda} > \underline{\alpha}} m(\underline{\lambda})v_{\underline{\lambda}} \leqq \frac{1}{\delta} \operatorname*{ess\,sup}_{\underline{\lambda} > \underline{\alpha}} m(\underline{\lambda})w_\lambda.$$

Nous pouvons donc conclure la démonstration par induction; le cas $n = 1$, étant le théorème de [**7**, Théorème 4].

4. Nous pouvons maintenant retrouver un résultat de converge p.p. pour les processus additifs.

THÉORÈME (4.1). *Supposons la résolvante* (*ou le semi-groupe*) *propre. Soit* $(G(I))_{I \in \mathscr{I}_n}$, *un processus additif. Alors*,

a) *Quand* $\epsilon \to 0^+$,

$$\frac{n!}{\epsilon^n} G(t_1 + \ldots + t_n \leqq \epsilon)$$

converge essentiellement vers une limite $f \in \mathbf{L}_1$ *qui est la même que celle de* $m(\underline{\lambda})u_{\underline{\lambda}}$ *quand* $\lambda \to \infty$, $\underline{\lambda} = (\lambda, \ldots, \lambda)$.

b) $F(I) = \int_I P_t f dt$ *est la partie continue de* $G(I)$.

Démonstration. Remarquons que pour tout borélien $B \subset \mathbf{P}_n$, on peut définir $F(B)$ de façon telle que $\|F(B_i) - F(B)\| \to 0$ lorsque $i \to \infty$ si $m(B_i \Delta B) \to 0$ lorsque $i \to \infty$. Ainsi, $G(t_1 + \ldots + t_n \leqq u) \in \mathbf{L}_1$ est bien définie pour tout $u \geqq 0$. De plus,

$$f(\lambda) = \int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda t_1 \ldots -\lambda t_n} G(dt \times \ldots \times dt_n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\alpha(t) \text{ où}$$

$$\alpha(t) = G(t_1 + \ldots + t_n \leqq t).$$

$\alpha(t)$ est lipschitzien et croissant. Il peut donc être redéfini en un processus dont, pour presque tout $x \in \Omega$, $\alpha(t)(x)$ est une fonction croissante de t. Et puisque, $\lambda^n f(\lambda)(x)$ converge lorsque $\lambda \to \infty$, pour presque tout x, le résultat est un cas particulier du théorème taubérien de Karamata [**13**].

b) découle de la décomposition correspondante de

$$u_\lambda = \int_{\mathbf{P}_n} e^{-\lambda t} G(dt).$$

Nous concluons avec un résultat partiel pour les processus sur-abeliens. Rappelons la définition de [**8**].

Définition (4.2). Une famille $(u_\lambda)_{\lambda > 0}$ de fonctions mesurables est un *processus sur-abélien à un paramètre* (par rapport à une résolvante positive) s'il vérifie:

a) $u_\lambda \geqq u_\mu + (\mu + \lambda) V_\mu u_\lambda$ pour tous $0 < \lambda \leqq \mu$

b) $\|\lambda u_{\bar{\lambda}}\| \leqq M$ pour tout $\lambda > 0$ où $M < \infty$.

Définition (4.3). Une famille $(u_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ de fonctions mesurables est un *processus sur-abélien à n paramètre* $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n}$ si c'est un processus sur-abélien à un paramètre pour chaque coordonnée par rapport à la résolvante $(V^i_{\lambda i})_{\lambda_i > 0}$.

LEMME (4.4). *Soient* $(g_k)_{k \geqq 1}$ *telles que* $g_k \in \mathbf{L}_1$, $g_k \geqq 0$, $\|g_k\| \leqq 1/k^n$ *et* $g_k \geqq g_{k+1}$. *Soient* a_k, $0 \leqq a_k \leqq k^{n-1}$ *alors*

$$\left\| \sup_{k \geqq N} a_k g_k \right\| \to 0 \quad \textit{lorsque } N \to \infty.$$

Démonstration. Fixons K et N, $K > N$. Construisons $A_i \in \mathcal{F}$ disjoints tels que

$$\sup\nolimits_{N \leqq i \leqq k} a_i g_i = a_k g_k \quad \text{sur } A_k.$$

Nous avons

$$\int \sup_{N \leqq i \leqq k} a_i g_i = \sum_N^K \int_{A_i} a_i g_i = \sum_N^K a_i x_i \quad \text{où } x_i = \int_{A_i} g_i.$$

Alors la borne supérieure recherchée est inférieure au maximum que la fonction

$$\sum_N^K i^{n-1} x_i$$

peut atteindre dans la région:

$$x_k \leqq 1/K^n$$

$$x_{k-1} + x_k \leqq 1/(k-1)^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

$$x_N + \ldots x_{k-1} + x_k \leqq 1/N^n$$

On voit que le maximum est atteint lorsque

$$x_k = 1/K^n \quad \text{et} \quad x_{k-i} = 1/(K-i)^n - 1/(K-i+1)^n$$

pour $1 \leqq i \leqq K - N$.

D'où

$$\left\| \sup_{N \leqq i \leqq K} a_i g_i \right\| \leqq \sum_{i=N}^{K-1} \left(\frac{(i+1)^n - i^n}{i^n (i+1)^n} \right) i^{n-1} + \frac{1}{K^n}$$

$$\leqq \sum_{i=N}^{K-1} \frac{n(i+1)^{n-1} i^{n-1}}{i^n (i+1)^n} + \frac{1}{K^n}$$

$$\leqq n \sum_{N}^{K-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{K^d}$$

$$\leqq n \sum_{N}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

THÉORÈME (4.5) *Soit*

$$(u_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{P}_n/\lambda > \alpha}$$

un processus sur-abélien positif de fonctions intégrables. Alors pour chaque γ, $0 \leqq \gamma < n$,

$$\left\| \lim_{\mu < \underline{\lambda}} \text{ess} \sup \lambda^\gamma u_{\underline{\lambda}} \right\| \to 0 \quad \textit{quand } \lambda \to \infty.$$

Démonstration. Puisque $(u_{\underline{\lambda}})/M$ est décroissant et que

$$\left\| \lambda^2 \frac{(u_{\underline{\lambda}})}{M} \right\| \leqq 1,$$

le résultat découle du Lemme (4.4).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. A. Akcoglu and A. del Junco, *Differentiation of additive processes*, Can. J. Math. *33* (1981), 749-768.
2. M. A. Akcoglu and U. Krengel, *A differentiation theorem for additive processes*, Math. Z. *163* (1978), 199-210.
3. A. V. Balakrishnan, *Fractional powers of closed operators and semi-groups generated by them*, Pac. J. Math.
4. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Convergence almost everywhere of operator averages*, J. Rat. Mech. and Anal. *5* (1956), 129-178.

5. R. Emilion, *A general differentiation theorem for n-dimensional additive processes with respect to a semi-group of L_1-contractions*, to appear.
6. D. Feyel, *Théorèmes de convergence presque-sûre, existence de semi-groupes*, Advances in Math. *34* (1979), 145-162.
7. ——— *Processus abéliens associés à un semi-groupe*, Math. Z. (1984), 305-315.
8. ——— *Convergence locale des processus sur-abéliens et sur-additifs*, Comptes rendus *295* (1982), 301.
9. A. Garsia, *Topics in almost everywhere convergence* (Markham, Chicago, 1970).
10. U. Krengel, *A local ergodic theorem*, Inventiones Math. (1969), 329-333.
11. P. A. Meyer, *Probability and potentials* (Blaisdell, Waltham, Mass., 1966).
12. E. Nelson, *Analytic vectors*, Ann. Math. *70* (1959), 572-614.
13. D. S. Ornstein, *The sums of iterates of a positive operator*, Adv. in Prob. *2* (1970), 85-115.
14. T. R. Terrell, *Local ergodic theorems for n-parameter semi-groups of operators*, in *Contributions to ergodic theory and probability*, Lecture Notes in Math. *160* (Springer-Verlag, 1970), 262-278.
15. W. Widder, *The Laplace transform* (Princeton Univ. Press, 1972).

Université de Bretagne Occidentale,
Brest, France