Canad. Math. Bull. Vol. **20** (1), 1977

UNE APPLICATION DE LA THEORIE DE L'INTERPOLATION-(0, 2)

PAR
C. CÔTÉ ET R. GERVAIS

1. Donné $(n+2)$ points dans l'intervalle $[-1, 1]$,

$$-1 \leq y_{n+2} < y_{n+1} < \cdots < y_2 < y_1 \leq +1 \tag{1.1}$$

L. Fejér a montré ([3]) qu'il existe toujours un polynôme $P^*_{n+1}(x)$ de degré inférieur ou égal à $n+1$ tel que

$$|P^*_{n+1}(y_k)| \leq 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+2, \tag{1.2}$$

et

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P^*_{n+1}(x)| \geq \frac{\log(n+1)}{12} > \frac{\log n}{12}. \tag{1.3}$$

D'autre part soient

$$-1 \leq x_{n,n} < x_{n,n-1} < \cdots < x_{n,2} < x_{n,1} \leq 1 \tag{1.4}$$

les zéros de $T_n(x)$, le n-ième polynôme de Tchebycheff de la première espèce,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad x \in [-1, 1]; \tag{1.5}$$

si $P_{n+1}(x)$ est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $n+1$ satisfaisant aux conditions

$$|P_{n+1}(x_{n+2,k})| \leq 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+2, \tag{1.6}$$

alors $P_{n+1}(x)$ satisfait aussi à l'inégalité

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_{n+1}(x)| \leq c_1 \log n \tag{1.7}$$

où c_1 (et plus loin c_2, c_3, ...) est une constante absolue.

Le résultat de Fejér cité plus haut montre que l'inégalité (1.7) est la meilleure possible en ce qui concerne l'ordre de grandeur de n. Pour montrer cette inégalité, on remarque tout d'abord que, si on note par

$$l_{n,k}(x) = \frac{T_n(x)}{T'_n(x_{n,k})(x - x_{n,k})}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.8}$$

les fonctions fondamentales de la formule d'interpolation de Lagrange, alors il

Received by the editor May 10, 1976 and, in revised form, Nov. 27, 1976.

https://doi.org/10.4153/CMB-1977-010-6 Published online by Cambridge University Press

est connu que ([5])

(1.9) $$\sum_{k=1}^{n} |l_{n,k}(x)| \le c_2 \log n.$$

Maintenant, on peut écrire

(1.10) $$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+2} P_{n+1}(x_{n+2,k}) l_{n+2,k}(x)$$

et sous les conditions (1.6), on tire facilement de (1.10) et (1.9) la conclusion (1.7).

2. Dans les pages qui vont suivre, on veut étudier l'importance du fait qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ soit borné par 1 précisément aux zéros du polynôme $T_{n+2}(x)$, et que cela entraîne la conclusion (1.7), i.e. on veut voir si la conclusion (1.7) demeure vraie si le polynôme est supposé borné par 1 sur un autre ensemble de points situés dans l'intervalle $[-1, 1]$, cet ensemble de points ayant une distribution, dans cet intervalle, qui ressemble beaucoup à celle des zéros de $T_{n+2}(x)$. Par exemple, on se demande si la conclusion (1.7) demeure vraie si on suppose que

(2.1) $$|P_{n+1}(x_{n,k})| \le 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

où, cette fois, les $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sont les zéros de $T_n(x)$, et si on remplace les deux conditions manquantes par les conditions

(2.2) $$|P_{n+1}(\pm 1)| \le 1.$$

Ce problème serait résolu si on pouvait savoir si

(2.3) $$\frac{\max\limits_{-1\le x\le 1} \sum\limits_{k=0}^{n+1} |l_k(x)|}{\log n}$$

reste borné ou non lorsque n devient grand; ici

(2.4) $$l_k(x) = \frac{(1-x^2)T_n(x)}{(1-x_{n,k}^2)T_n'(x_{n,k})(x-x_{n,k})}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n;$$

(2.5) $$l_0(x) = \frac{(1+x)T_n(x)}{2},$$

et

(2.6) $$l_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n(1-x)T_n(x)}{2}.$$

En effet si (2.3) est borné par c_3, comme on a

$$P_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n+1} P_{n+1}(x_{n,k})l_k(x) \tag{2.7}$$

où $x_{n,0}=1$ et $x_{n,n+1}=-1$, on tire de (2.7), (2.1) et (2.2)

$$\max_{-1\le x\le 1} |P_{n+1}(x)| \le \max_{-1\le x\le 1} \sum_{k=0}^{n+1} |l_k(x)| \le c_3 \log n. \tag{2.8}$$

Par contre si (2.3) n'est pas borné, alors donné $M>0$ quelconque, il existe un n et un $x_0 \in [-1, 1]$ tels que

$$M \log n < \sum_{k=0}^{n+1} |l_k(x_0)| = \max_{-1\le x\le 1} \sum_{k=0}^{n+1} |l_k(x)|, \tag{2.9}$$

et pour le polynôme $P^{**}_{n+1}(x)$ défini par

$$P^{**}_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_k l_k(x) \tag{2.10}$$

où ε_k est choisi tel que

$$\varepsilon_k l_k(x_0)=|l_k(x_0)|, \qquad k=0, 1, \ldots, n+1, \tag{2.11}$$

on a

$$\max_{-1\le x\le 1} |P^{**}_{n+1}(x)| \ge |P^{**}_{n+1}(x_0)| = \sum_{k=0}^{n+1} |l_k(x_0)| > M \log n \tag{2.12}$$

par (2.9), et comme M peut être arbitrairement grand, la conclusion (1.7) ne peut pas être vraie. Il semble bien difficile de montrer si (2.3) reste borné ou non, et donc il n'est pas possible pour le moment de voir si les conditions (2.1) et (2.2) entraînent la conclusion (1.7). Cependant, nous démontrerons que la conclusion (1.7) reste vraie si on remplace les deux conditions (2.2) par

$$|P'_{n+1}(\pm 1)| \le An^2 \log n \tag{2.13}$$

ou même par

$$|P''_{n+1}(\pm 1)| \le An^4 \log n.$$

La preuve de ces résultats a été motivée par l'étude des articles de M. P. Turán écrits en collaboration avec différents mathématiciens sur la théorie de l'interpolation-(0, 2) et aussi par l'audition d'une série de conférences données par M. Turán lui-même pendant l'été 1975 à l'Université de Montréal. Une conséquence intéressante de cette étude est le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. *Soit $P_{n+1}(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ qui satisfait aux conditions*

$$|P_{n+1}(x_{n,k})| \le 1, \qquad k=1, 2, \ldots, n, \tag{2.14}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1977-010-6 Published online by Cambridge University Press

où les $x_{n,k}$, $k=1,2,\ldots,n$, *sont les zéros de* $T_n(x)$ *le* n*-ième polynôme de Tchebycheff de la première espèce. Alors on a que*

$$|P''_{n+1}(x)| \le c_4 n^4 \log n \tag{2.15}$$

si et seulement si

$$|P''_{n+1}(\pm 1)| \le A n^4 \log n, \tag{2.16}$$

où A *est une constante.*

Ce résultat doit être comparé avec le théorème suivant de R. J. Duffin et A. C. Schaeffer ([2]).

THEOREME A. *Soit* $P_{n+1}(x)$ *un polynôme de degré inférieur ou égal à* $n+1$ *tel que*

$$|P_{n+1}(x^*_{n+1,k})| \le 1 \tag{2.17}$$

où

$$x^*_{n+1,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \qquad k=0,1,\ldots,n+1,$$

sont les extremas de $T_{n+1}(x)$ *dans l'intervalle* $[-1,1]$, *alors on a que*

$$\max_{-1\le x\le 1} |P^{(p)}_{n+1}(x)| \le \frac{(n+1)^2((n+1)^2-1^2)\cdots((n+1)^2-(p-1)^2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}, \tag{2.18}$$

$p=1,2,\ldots,n+1.$

Notons que les hypothèses, dans ce théorème de Duffin et Schaeffer, demandent que le polynôme $P_{n+1}(x)$ soit borné par 1 en $n+2$ points, tandis que dans le corollaire 1, $P_{n+1}(x)$ ne doit être borné par 1 qu'en n points et on obtient des conditions nécessaires et suffisantes qui conduisent à un résultat similaire au théorème A de Duffin et Schaeffer.

3. Voici maintenant les résultats qui seront démontrés.

THEOREME 2 (Formule d'interpolation). *Soient* $P_{n+1}(x)$ *un polynôme de degré inférieur ou égal à* $n+1$ *et* α *un nombre dans l'intervalle* $(0,1]$ *tel que*

$$T''_n(\alpha) \ne 0 \quad et \quad T''_n(\alpha) + 2T'_n(\alpha) \ne 0, \tag{3.1}$$

alors on a

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} P_{n+1}(x_{n,k})[l_{n,k}(x) + T_n(x)(A_k x + B_k)] + T_n(x) \\ \times [P''_{n+1}(\alpha)(Cx+D) + P''_{n+1}(-\alpha)(-1)^{n+1}(Cx-D)] \end{aligned} \tag{3.2}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1977-010-6 Published online by Cambridge University Press

où

$$(3.3)\quad A_k=\frac{-l''_{n,k}(\alpha)+(-1)^n l''_{n,k}(-\alpha)}{2(\alpha T'''_n(\alpha)+2T'_n(\alpha))},\qquad B_k=\frac{l''_{n,k}(\alpha)+(-1)^n l''_{n,k}(-\alpha)}{2T''_n(\alpha)},$$
$$k=1,2,\ldots,n,$$

$$(3.4)\qquad C=\frac{1}{2(\alpha T'''_n(\alpha)+2T'_n(\alpha))},\quad D=\frac{1}{2(T''_n(\alpha))}.$$

Les deux restrictions (3.1) sur α ne sont pas tellement exigentes car elles éliminent au plus $n-1$ points pour les choix possibles de α. De plus, si α est un zéro de $T_n(x)$ ou de $T'_n(x)$, il est facile de voir, en utilisant l'équation différentielle satisfaite par $T_n(x)$

$$(3.5)\qquad (1-x^2)T''_n(x)-xT'_n(x)+n^2T_n(x)=0$$

et le fait bien connu que les zéros de $T_n^{(k+1)}(x)$ séparent les zéros de $T_n^{(k)}(x)$, $k=0,1,2,\ldots,n-2$, que, dans ce cas, α satisfait aux conditions (3.1). De même, on vérifie aisément que $\alpha=1$ satisfait aux conditions (3.1).

THEOREME 3. *Soit $P_{n+1}(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ tel que*

$$(3.6)\qquad |P_{n+1}(x_{n,k})|\le 1,\qquad k=1,2,\ldots,n,$$

et

$$(3.7)\qquad |P''_{n+1}(\pm\alpha)|\le An^2\log n,$$

où $x_{n,k}$, $k=1,2,\ldots,n$, désignent les zéros de $T_n(x)$, le n-ième polynôme de Tchebycheff de la première espèce, A est une constante et α est un zéro positif de $T_n(x)$, alors on a

$$(3.8)\qquad \max_{-1\le x\le 1}|P_{n+1}(x)|\le c_5\frac{n\log n}{\alpha}.$$

THEOREME 4. *Soit $P_{n+1}(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ tel que*

$$(3.9)\qquad |P_{n+1}(x_{n,k})|\le 1,\qquad k=1,2,\ldots,n,$$

et

$$(3.10)\qquad |P''_{n+1}(\pm\alpha)|\le An^2\log n,$$

où $x_{n,k}$, $k=1,2,\ldots,n$, sont les zéros de $T_n(x)$, A une constante et α un zéro positif de $T'_n(x)$, alors on a

$$(3.11)\qquad \max_{-1\le x\le 1}|P_{n+1}(x)|\le c_6\frac{\log n}{\alpha}.$$

THEOREME 5. *Soit $P_{n+1}(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ tel que*

$$|P_{n+1}(x_{n,k})| \leq 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.12}$$

et

$$|P''_{n+1}(\pm 1)| \leq An^4 \log n, \tag{3.13}$$

où $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, sont les zéros de $T_n(x)$ et A une constante, alors on a

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_{n+1}(x)| \leq c_7 \log n. \tag{3.14}$$

On remarque que, dans le Théorème 4, lorsque α tend vers 1 par les zéros positifs de $T'_n(x)$, la borne (3.11) tend vers la borne (3.14) du Théorème 5 (à une constante multiplicative près).

Le Corollaire 1 découle directement du Théorème 5 et de l'inégalité de W. A. Markoff ([1], p. 91).

Enfin on a aussi le résultat suivant.

THEOREME 6. *Si $P_{n+1}(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ qui satisfait aux conditions*

$$|P_{n+1}(\omega_k)| \leq 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.20}$$

et

$$|P''_{n+1}(\alpha)| \leq An^2 \log n, |P''_{n+1}(\beta)| \leq An^2 \log n, \tag{3.21}$$

où $\omega_k = e^{(2\pi ki/n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, et α_1 et β sont deux nombres complexes différents tels que

$$|\alpha| = |\beta| = 1, \tag{3.22}$$

et A est une contante, alors on a

$$\max_{|z|=1} |P_{n+1}(z)| \leq c_8 \frac{\log n}{|\alpha - \beta|} \tag{3.23}$$

4. Preuve du Théorème 2. D'abord montrons l'unicité d'un polynôme qui prend des valeurs données aux points $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, et dont la dérivée seconde prend des valeurs données aux points $\pm\alpha$ où α est un nombre dans l'intervalle (0, 1] qui remplit les conditions (3.1). Supposons donc que

$$P_{n+1}(x_{n,k}) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.1}$$

et

$$P''_{n+1}(\pm\alpha) = 0. \tag{4.2}$$

Alors par (4.1) on peut écrire

$$P_{n+1}(x)=T_n(x)(Ax+B); \tag{4.3}$$

utilisant (4.2) et le fait que $T_n(x)$ est une fonction paire ou impaire suivant que n est lui-même pair ou impair, on obtient le système linéaire homogène

$$\begin{aligned} A(\alpha T_n'''(\alpha)+2T_n''(\alpha))+B(T_n'''(\alpha))&=0\\ A(\alpha T_n'''(\alpha)+2T_n''(\alpha))-B(T_n'''(\alpha))&=0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

dont la seule solution est la solution triviale sous les hypothèses (3.1), et donc $P_{n+1}(x)\equiv 0$ dans (4.3).

Montrons maintenant l'existence d'un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ qui prend des valeurs données aux points $x_{n,k}$, $k=1, 2, \ldots, n$, et dont la dérivée seconde prend des valeurs données aux points $\pm\alpha$. Pour cela, trouvons d'abord des polynômes $r_{n,k}(x)$ de degré inférieur ou égal à $n+1$, $k=1, 2, \ldots, n$, tels que

$$r_{n,k}(x_{n,j})=\delta_{k,j}, \qquad j=1,2,\ldots,n, \tag{4.5}$$

et

$$r''_{n,k}(\pm\alpha)=0. \tag{4.6}$$

Par (4.5), $r_{n,k}(x)$ est de la forme

$$r_{n,k}(x)=l_{n,k}(x)+T_n(x)(A_kx+B_k), \tag{4.7}$$

et maintenant, utilisant (4.6), on obtient le système linéaire

$$\begin{aligned} A_k(\alpha T_n'''(\alpha)+2T_n''(\alpha))+B_k(T_n'''(\alpha))&=-l''_{n,k}(\alpha)\\ A_k(\alpha T_n'''(\alpha)+2T_n''(\alpha))-B_k(T_n'''(\alpha))&=(-1)^n l''_{n,k}(\alpha) \end{aligned} \tag{4.8}$$

et ce système admet la solution unique (3.3) sous les hypothèses (3.1). Trouvons maintenant deux polynômes $\rho_{n,\alpha}(x)$ et $\rho_{n,-\alpha}(x)$ de degré inférieur ou égal à $n+1$ tels que

$$\rho_{n,\alpha}(x_{n,k})=\rho_{n,-\alpha}(x_{n,k})=0, \qquad k=1,2,\ldots,n, \tag{4.9}$$

et

$$\rho''_{n,\alpha}(\alpha)=1, \qquad \rho''_{n,\alpha}(-\alpha)=0, \tag{4.10}$$

$$\rho''_{n,-\alpha}(\alpha)=0, \qquad \rho''_{n,-\alpha}(-\alpha)=1. \tag{4.11}$$

Par (4.9), $\rho_{n,\alpha}(x)$ prend la forme

$$\rho_{n,\alpha}(x)=T_n(x)(Cx+D); \tag{4.12}$$

utilisant (4.10), on obtient le système linéaire

$$\begin{aligned} C(\alpha T_n'''(\alpha)+2T_n''(\alpha))+D(T_n'''(\alpha))&=1\\ C(\alpha T_n'''(\alpha)+2T_n''(\alpha))-D(T_n'''(\alpha))&=0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

et, sous les hypothèses (3.1), la solution unique de ce système est donnée par (3.4). De la même façon on trouve $\rho_{n,-\alpha}(x)$ et on obtient

$$\rho_{n,-\alpha}(x)=(-1)^{n+1}T_n(x)(Cx-D) \tag{4.14}$$

où C et D sont donnés par (3.4).

Enfin, par l'unicité du problème, on peut écrire tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ sous la forme

$$P_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{n}P_{n+1}(x_{n,k})r_{n,k}(x)+P''_{n+1}(\alpha)\rho_{n,\alpha}(x)+P''_{n+1}(-\alpha)\rho_{n,\alpha}(x) \tag{4.15}$$

ce qui donne la formule (3.2). C.Q.F.D.

5. Dans cette section, nous allons montrer le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Avec la même notation adoptée depuis le début, on a*

$$\sum_{k=1}^{n}|l''_{n,k}(x)|\le c_9\frac{n^2\log n}{1-x^2},\qquad x\varepsilon(-1,1). \tag{5.1}$$

Preuve. Prenons x_0 fixe dans $(-1,1)$ et posons

$$P_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k l_{n,k}(x) \tag{5.2}$$

où ε_k est le signe de $l'_{n,k}(x_0)$, $k=1,2,\ldots,n$. Utilisant l'inégalité de S. Bernstein ([1], p. 91) on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}|l'_{n,k}(x_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k l'_{n,k}(x_0)\right|=|P'_{n-1}(x_0)|\le\frac{(n-1)c_2\log n}{(1-x_0^2)^{1/2}}. \tag{5.3}$$

Mais comme x_0 est arbitraire dans $(-1,1)$ alors on a

$$(1-x^2)^{1/2}\sum_{k=1}^{n}|l'_{n,k}(x)|\le(n-1)c_2\log n\quad\text{pour tout}\quad x\varepsilon[1-1,1]. \tag{5.4}$$

Soit de nouveau x_0 fixe dans $(-1,1)$ et soit

$$Q_{n-2}(x)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon'_k l'_{n,k}(x) \tag{5.5}$$

où ε'_k est le signe de $l''_{n,k}(x_0)$, $k=1,2,\ldots,n$.

Q. I. Rahman a montré ([4]) que si $p_n(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que

$$|p_n(x)|\le(1-x^2)^{1/2}\quad\text{pour}\quad -1\le x\le 1, \tag{5.6}$$

alors on a

$$\max_{-1\le x\le 1}|p'_n(x)|\le 2(n-1). \tag{5.7}$$

En appliquant ce résultat au polynôme $(1-x^2)Q_{n-2}(x)$ et en utilisant (5.4), on tire

$$\left|\frac{d}{dx}[(1-x^2)Q_{n-2}(x)]\right| \le 2(n-1)^2 c_2 \log n \tag{5.8}$$

d'où, avec l'aide de (5.5),

$$(1-x_0^2)\sum_{k=1}^{n}|l''_{n,k}(x_0)| = (1-x_0^2)Q'_{n-2}(x_0) \le 2(n-1)^2 c_2 \log n + 2\sum_{k=1}^{n}|l'_{n,k}(x_0)| \tag{5.9}$$

$$\le 2(n-1)^2 c_2 \log n + 2n^2 c_2 \log n$$

la dernière inégalité étant justifiée par l'inégalité de Markoff. Comme x_0 est arbitraire dans $(-1, 1)$, le lemme est démontré. C.Q.F.D.

Preuve du Théorème 3. Estimons les quantités $\sum_{k=1}^{n}|A_k|$ et $\sum_{k=1}^{n}|B_k|$ où A_k et B_k sont donnés par (3.3), $k=1, 2, \ldots, n$. On a

$$\sum_{k=1}^{n}|A_k| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{|l''_{n,k}(\alpha)|+|l''_{n,k}(-\alpha)|}{2\,|\alpha T''_n(\alpha)+2T'_n(\alpha)|} \le \frac{c_9 n^2 \log n}{(1-\alpha^2)\,|\alpha T''_n(\alpha)+2T'_n(\alpha)|} \tag{5.10}$$

par le Lemme 5.1

$$= \frac{c_9 n^2 \log n}{|T'_n(\alpha)|\,(2-\alpha^2)} \quad \text{par (3.5) et le fait que } T_n(\alpha)=0,$$

$$\le c_9 n \log n \quad \text{car } |T'_n(\alpha)| \ge n.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{k=1}^{n}|B_k| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{|l''_{n,k}(\alpha)|+|l''_{n,k}(-\alpha)|}{2\,|T''_n(\alpha)|} \le \frac{c_9 n^2 \log n}{(1-\alpha^2)\,|T''_n(\alpha)|} \quad \text{par le Lemme 5.1} \tag{5.11}$$

$$= \frac{c_9 n^2 \log n}{\alpha\,|T'_n(\alpha)|} \quad \text{par (3.5) et le fait que } T_n(\alpha)=0$$

$$\le \frac{c_9 n \log n}{\alpha} \quad \text{car } |T'_n(\alpha)| \ge n.$$

Si C est donné par (3.4), alors on a l'estimation

$$|C| = \frac{1}{2\,|\alpha T''_n(\alpha)+2T'_n(\alpha)|} = \frac{1-\alpha^2}{(2-\alpha^2)\,|T'_n(\alpha)|} \le \frac{1}{n}. \tag{5.12}$$

et si D est aussi donné par (3.4), on a

$$|D| = \frac{1}{2\,|T''_n(\alpha)|} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha\,|T'_n(\alpha)|} \le \frac{1}{n\alpha}. \tag{5.13}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1977-010-6 Published online by Cambridge University Press

Si on utilise (3.2), (3.6) et (3.7), on obtient

$$|P_{n+1}(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |l_{n,k}(x)| + |T_n(x)| \sum_{k=1}^{n} (|A_k|+|B_k|) + 2\,|T_n(x)|\, An^2 \log n(|C|+|D|)$$

$$\leq c_4 \frac{n \log n}{\alpha}$$

par (1.9), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) et le fait que $|T_n(x)| \leq 1$ pour $-1 \leq x \leq 1$. C.Q.F.D.

6. Preuve du Théorème 4. On procède de la même façon que dans la preuve du Théorème 3. On a pour A_k donnés en (3.3) que

(6.1) $$\sum_{k=1}^{n} |A_k| \leq \frac{c_9 n^2 \log n}{\alpha(1-\alpha^2)\,|T_n''(\alpha)|} \quad \text{par le Lemme 5.1 et le fait que } T_n'(\alpha)=0$$

$$= \frac{c_9 \log n}{\alpha} \quad \text{par (3.5) et le fait que } |T_n(\alpha)| = 1.$$

De même, on a pour B_k donnés en (3.3) que

(6.2) $$\sum_{k=1}^{n} |B_k| \leq \frac{c_9 n^2 \log n}{\alpha(1-\alpha^2)\,|T_n''(\alpha)|} = \frac{c_9 \log n}{\alpha}.$$

D'autre part, on a pour C donné en (3.4) que

(6.3) $$|C| = \frac{1}{2\alpha\,|T_n''(\alpha)|} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha n^2} \leq \frac{1}{2\alpha n^2},$$

et pour D donné en (3.4)

(6.4) $$|D| = \frac{1}{2\,|T_n''(\alpha)|} = \frac{1-\alpha^2}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

D'où, par (3.2), (3.9) et (3.10), on peut écrire

$$|P_{n+1}(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |l_{n,k}(x)| + \sum_{k=1}^{n} (|A_k|+|B_k|) + 2An^2 \log n(|C|+|D|)$$

$$\leq c_5 \frac{\log n}{\alpha}$$

par (1.9), (6.1), (6.2), (6.3) et (6.4). C.Q.F.D.

7. Preuve du Théorème 5. Montrons tout d'abord l'inégalité suivante:

(7.1) $$\sum_{k=1}^{n} |l_{n,k}''(x)| \leq c_{10} n^4 \log n, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

Soit x_0 un point fixe dans l'intervalle $[-1, 1]$ et soit

$$p_{n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k l_{n,k}(x) \tag{7.2}$$

où ε_k est le signe de $l''_{n,k}(x_0)$. Par l'inégalité (1.9) et l'inégalité de Markoff, on a

$$\sum_{k=1}^{n}|l''_{n,k}(x_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k l''_{n,k}(x_0)\right|=|p''_{n-1}(x_0)|\le c_{10}n^4\log n \tag{7.3}$$

et comme x_0 est arbitraire dans $[-1, 1]$, (7.1) est démontré.

Si A_k est donné par (3.3) avec $\alpha=1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|A_k| &\le \frac{c_{10}n^4\log n}{|T''_n(1)+2T'_n(1)|} \quad \text{par (7.1)}\\ &=\frac{c_{10}n^4\log n}{\dfrac{n^2(n^2-1)}{3}+2n^2}\le c_{11}\log n.\end{aligned} \tag{7.4}$$

De même si B_k est donné par (3.3) avec $\alpha=1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|B_k| &\le \frac{c_{10}n^4\log n}{2\dfrac{n^2(n^2-1)}{3}} \quad \text{par (7.1)}\\ &\le c_{11}\log n.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Pour C et D donnés par (3.4), on a les estimations

$$|C|=\frac{1}{2\left(\dfrac{n^2(n^2-1)}{3}+2n^2\right)}\le\frac{c_{12}}{n^4} \tag{7.6}$$

$$|D|=\frac{1}{2\dfrac{n^2(n^2-1)}{3}}\le\frac{c_{12}}{n^4}. \tag{7.7}$$

Comme précédemment si on utilise (3.2), (3.12) et (3.13), on a

$$\begin{aligned}|P_{n+1}(x)| &\le \sum_{k=1}^{n}|l_{n,k}(x)|+\sum_{k=1}^{n}(|A_k|+|B_k|)+2An^4\log n(|C|+|D|)\\ &\le c_6\log n\end{aligned}$$

par (1.9), (7.4), (7.5), (7.6) et (7.7). C.Q.F.D.

8. Avant de prouver le Théorème 6, on va établir une formule d'interpolation analogue à (3.2).

Lemme 8.1. *Si* ω_k, $k=1, 2, \ldots, n$, α *et* β *sont tels que donnés dans le*

Théorème 6, *alors on a*

$$(8.1)\qquad P_{n+1}(z)=\sum_{k=1}^{n} P_{n+1}(\omega_k)l_k(z)+\sum_{k=1}^{n} P_{n+1}(\omega_k)(1-z^n)(A_kz+B_k)$$
$$+P''_{n+1}(\alpha)(1-z^n)(Cz+D)+P''_{n+1}(\beta)(1-z^n)(Ez+F)$$

où

$$(8.2)\qquad l_k(z)=\frac{\omega_k(z^n-1)}{n(z-\omega_k)},\qquad k=1,2,\ldots,n,$$

$$(8.3)\qquad A_k=\frac{-\beta^{n-2}l''_k(\alpha)+\alpha^{n-2}l''_k(\beta)}{n(n+1)\alpha^{n-2}\beta^{n-2}(\alpha-\beta)},\qquad B_k=\frac{-\alpha^{n-1}l''_k(\beta)+\beta^{n-1}l''_k(\alpha)}{n(n-1)\alpha^{n-2}\beta^{n-2}(\alpha-\beta)},$$
$$k=1,2,\ldots,n,$$

$$(8.4)\qquad C=\frac{-1}{n(n+1)\alpha^{n-2}(\alpha-\beta)},\qquad D=\frac{\beta}{n(n-1)\alpha^{n-2}(\alpha-\beta)},$$

$$(8.5)\qquad E=\frac{1}{n(n+1)\beta^{n-2}(\alpha-\beta)},\qquad F=\frac{-\alpha}{n(n-1)\beta^{n-2}(\alpha-\beta)}.$$

Preuve. Montrons d'abord l'unicité d'un polynôme $P_{n+1}(z)$ de degré inférieur ou égal à $n+1$ qui prend des valeurs données aux points ω_k, $k=1,2,\ldots,n$, et dont la dérivée seconde prend des valeurs données en α et β. Supposons donc que

$$(8.6)\qquad P_{n+1}(\omega_k)=0,\qquad k=1,2,\ldots,n$$

et

$$(8.7)\qquad P''_{n+1}(\alpha)=P''_{n+1}(\beta)=0.$$

Par (8.6), on peut écrire

$$P_{n+1}(z)=(1-z^n)(Az+B)$$

et en utilisant (8.7) on trouve que

$$(8.8)\qquad \begin{aligned} A(n(n-1)+2n)\alpha^{n-1}\beta^{n-2}+B(n(n-1))\alpha^{n-2}\beta^{n-2}=0\\ A(n(n-1)+2n)\alpha^{n-2}\beta^{n-1}+B(n(n-1))\alpha^{n-2}\beta^{n-2}=0\end{aligned}$$

et ce système n'admet que la solution triviale si $\alpha\neq\beta$ et l'unicité est ainsi démontrée.

Montrons maintenant la formule (8.1). Comme dans le Théorème 2 trouvons des polynômes $r_k(z)$ de degré inférieur ou égal à $n+1$ tels que

$$\left.\begin{aligned} &(8.9)\qquad r_k(\omega_j)=\delta_{k,j},\qquad j=1,2,\ldots,n\\ &(8.10)\qquad r''_k(\alpha)=r''_k(\beta)=0\end{aligned}\right\}\quad k=1,2,\ldots,n.$$

De (8.9) on a la représentation

$$(8.11)\qquad r_k(z)=l_k(z)+(1-z^n)(A_kz+B_k)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1977-010-6 Published online by Cambridge University Press

où $l_k(z)$ est donné par (8.2). De (8.10) on obtient le système linéaire suivant

$$\text{(8.12)}\qquad \begin{aligned} A_k(n^2+n)\alpha^{n-1}+B_kn(n-1)\alpha^{n-2} &= -l_k''(\alpha)\\ A_k(n^2+n)\beta^{n-1}+B_kn(n-1)\beta^{n-2} &= -l_k''(\beta)\end{aligned}$$

qui admet l'unique solution (8.3) si $\alpha\neq\beta$.

Maintenant trouvons deux polynômes $\rho_\alpha(z)$ et $\rho_\beta(z)$ de degré inférieur ou égal à $n+1$ tels que

$$\text{(8.13)}\qquad \rho_\alpha(\omega_k)=\rho_\beta(\omega_k)=0,\qquad k=1,2,\ldots,n$$

et

$$\text{(8.14)}\qquad \rho_\alpha''(\alpha)=1,\qquad \rho_\alpha''(\beta)=0$$

$$\text{(8.15)}\qquad \rho_\beta''(\alpha)=0,\qquad \rho_\beta''(\beta)=1.$$

Par (8.13) on a la représentation

$$\text{(8.16)}\qquad \rho_\alpha(z)=(1-z^n)(Cz+D)$$

et par (8.14) on obtient le système linéaire

$$\text{(8.17)}\qquad \begin{aligned} C(n^2+n)\alpha^{n-1}+Dn(n-1)\alpha^{n-2} &= -1\\ C(n^2+n)\beta^{n-1}+Dn(n-1)\beta^{n-2} &= 0\end{aligned}$$

qui admet l'unique solution (8.4) si $\alpha\neq\beta$. On trouve de même $\rho_\beta(z)$ et on obtient que

$$P_{n+1}(z)=\sum_{k=1}^{n}P_{n+1}(\omega_k)r_k(z)+P_{n+1}''(\alpha)\rho_\alpha(z)+P_{n+1}''(\beta)\rho_\beta(z)$$

qui n'est rien d'autre que la formule (8.1). C.Q.F.D.

Preuve du Théorème 6. Il est connu que

$$\text{(8.18)}\qquad \max_{|z|=1}\sum_{k=1}^{n}|l_k(z)|\le c_{13}\log n$$

et par un argument semblable à celui utilisé au début de la preuve du Théorème 5, mais en employant l'inégalité de Bernstein ([1], p. 91) plutôt que celle de Markoff, on obtient

$$\text{(8.19)}\qquad \max_{|z|=1}\sum_{k=1}^{n}|l_k''(z)|\le c_{13}n^2\log n.$$

Maintenant si on utilise la représentation (8.1) et les hypothèses (3.20) et (3.21), on obtient pour $|z|=1$,

$$\text{(8.20)}\quad |P_{n+1}(z)|\le\sum_{k=1}^{n}|l_k(z)|+2\sum_{k=1}^{n}(|A_k|+|B_k|)+2An^2\log n(|C|+|D|+|E|+|F|)$$

Utilisant (8.3) et (8.19), on a

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k| \le \frac{2c_{13}n^2 \log n}{n(n-1)\,|\alpha-\beta|} \le \frac{c_{14}\log n}{|\alpha-\beta|} \tag{8.21}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |B_k| \le \frac{2c_{13}n^2 \log n}{n(n-1)\,|\alpha-\beta|} \le \frac{c_{14}\log n}{|\alpha-\beta|}. \tag{8.22}$$

Enfin de (8.20), (8.18), (8.21), (8.22) et (8.5), on tire

$$|P_{n+1}(z)| \le \frac{c_8 \log n}{|\alpha-\beta|}$$

qui est le résultat cherché. C.Q.F.D.

9. Avant de terminer, il serait bon de mentionner qu'en utilisant une méthode similaire à celle qui a été utilisée dans les preuves du Théorème 2 et 5, on peut montrer que la conclusion du Théorème 5 demeure inchangée (à une constante multiplicative près) si on suppose que

$$|P'_{n+1}(\pm 1)| \le An^2 \log n$$

plutôt que (3.13).

Enfin, nous tenons à remercier ici M. Q. I. Rahman qui nous a proposé ce problème et qui nous a accordé de nombreuses consultations lors de la rédaction de cet article.

References

1. E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill. (1966).

2. R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *A refinement of an inequality of the brothers Markoff*, Trans. Amer. Math. Soc. **50,** (1941) 517–528.

3. L. Fejer, *Die abschätzung eines polynoms in einem intervalle . . .*, Math. Zeitschrift, **32** (1930), 426–457.

4. Q. I. Rahman, *On a problem of Turán about polynomials with curved majorants*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 447–455.

5. G. Szego, *Orthogonal Polynomials* (3^{e} ed. 1974), Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **23,** 348.

Département de Mathématiques,
Université de Montréal, Montréal,
Québec, Canada.