

ZUR DARSTELLUNGSTHEORIE VON KRANZPRODUKTEN

ADALBERT KERBER

Einer Anregung I. Schurs folgend, untersuchte W. Specht bereits in seiner Dissertation **(10)** Gruppen, die unter den neueren Oberbegriff des Kranzproduktes $G \wr H$ zweier Gruppen fallen: die sogenannten Symmetrien $G \wr S_n$. Allgemeine Kranzprodukte $G \wr H$ wurden von ihm in einer nachfolgenden Arbeit **(11)** behandelt; dort wird deren gewöhnliche Darstellungstheorie in aller Ausführlichkeit angegeben.

Die Normalisatoren von Elementen symmetrischer Gruppen sind direkte Produkte von Symmetrien zyklischer Gruppen, was M. Osima **(6; 7; 8)** veranlasste, die modulare Darstellungstheorie für diese Spezialfälle zu entwickeln. Auch die p -Sylowuntergruppen symmetrischer Gruppen setzen sich direkt aus Kranzprodukten zusammen **(3)**, infolgedessen auch die Defektgruppen.

Mit Hilfe der Resultate Osimas konnte die Berechnung der verallgemeinerten Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen auf die Berechnung von Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen zurückgeführt werden **(4)**. Es ist naheliegend, die Ergebnisse Osimas zur modularen Darstellungstheorie von Kranzprodukten der Form $Z_m \wr S_n$ (Z_m zyklische Gruppe der Ordnung m , S_n symmetrische Gruppe vom Grade n) auf Kranzprodukte $G \wr H$ (G, H beliebige endliche Permutationsgruppen) zu verallgemeinern. Das soll hier geschehen.

Ein erster, einführender Abschnitt bringt Definition und Beispiele von Kranzprodukten. Im zweiten Paragraphen wird dann ihre Darstellungstheorie hergeleitet, wobei keine Voraussetzung über die Charakteristik des zugrundeliegenden Koeffizientenkörpers gemacht wird, jedoch wird dieser als algebraisch abgeschlossen angenommen. Im dritten Abschnitt wird besprochen, was sich daraus für p -Blockstruktur und Zerlegungszahlen ergibt, wenn einmal G als p -Gruppe, zum andern, wenn die Ordnung von G als zu p prim angenommen wird; das ist dann die gewünschte Verallgemeinerung der Ergebnisse Osimas. Als Beispiel werden abschliessend im vierten Paragraphen die Symmetrien $G \wr S_n$ genauer betrachtet, und die Anwendung ihrer Darstellungstheorie auf die Berechnung der verallgemeinerten Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen wird skizziert.

1. Definition und Beispiele von Kranzprodukten. Für die Handhabung von Kranzprodukten ist es zweckmässig, sie in ihrer Eigenschaft als

Received September 28, 1966.

Permutationsgruppen zu betrachten, weshalb wir sie folgendermassen einführen:

1.1 Sind G bzw. H Permutationsgruppen der Grade a bzw. b , so verstehen wir unter ihrem *Kranzprodukt* $G \wr H$ eine zur Untergruppe

$$G^*H' = \left(\times_{i=1}^b G^i \right) H'$$

der S_{ab} isomorphe Gruppe. ($G^i \simeq G$ sei über der Ziffernmenge

$$A_i = \{(i - 1)a + 1, \dots, ia\}$$

erstreckte Permutationsgruppe, $H' \simeq H$ sei als Untergruppe der S_b' , der Gruppe aller Permutationen der Abschnitte A_i , so verstanden, dass für alle $t \in S_b'$ gilt: für jedes i gibt es ein j mit $tG^i t^{-1} = G^j$.)

Aus dieser Definition folgt sofort die bekannte, wesentliche Eigenschaft des Kranzproduktes: $G \wr H$ ist zerfallende Erweiterung der "Basisgruppe" G^* mit H' . $G \wr H$ ist Untergruppe der $G \wr S_b$, der "Symmetrie" (vom Grade b) von G . Eine ausführliche gruppentheoretische Behandlung insbesondere der Symmetrien findet man bei O. Ore (5).

Auf Kranzprodukte stösst man u.a. bei der Untersuchung der Normalisatoren von Elementen symmetrischer Gruppen: Zunächst sieht man sehr leicht ein, dass der Normalisator (in S_{ab}) eines Elementes x aus b Zyklen der Länge a gerade von der Form $Z_a \wr S_b$ ist, da mit x gerade die Perioden der Zyklen von x sowie alle Permutationen vertauschbar sind, die die Ziffernmengen in den verschiedenen Zyklen austauschen. Für den Normalisator $N(x)$ eines Elementes x mit a_i Zyklen der Länge i ($1 \leq i \leq n$) der S_n gilt dann (7) ($Z_i \wr S_0 = \{1\}$):

$$1.2 \quad x \in (i^{a_i}) \Rightarrow N(x) \simeq \times_i (Z_i \wr S_{a_i}).$$

Aber auch die p -Sylowuntergruppen der S_n setzen sich direkt aus Kranzprodukten zusammen: Ist P^m eine p -Sylowuntergruppe der S_{p^m} , so hat die Untergruppe $P^m \wr Z_p$ der $S_{p^{m+1}}$ die Ordnung $p|P^m|^p$, ist also p -Sylowuntergruppe der $S_{p^{m+1}}$. Ist schliesslich

$$n = \sum_{i=0}^t a_i p^i,$$

so gilt für eine p -Sylowuntergruppe P_n der S_n :

$$P_n \simeq \times_i (P^i)^{a_i} \quad ((P^i)^{a_i} \simeq P^i \times \dots \times P^i, a_i \text{ Faktoren}).$$

Wir erhalten insgesamt (3):

1.3 Ist

$$n = \sum_{i=0}^t a_i p^i,$$

so gilt für eine p -Sylowuntergruppe P_n der S_n :

$$P_n \simeq \prod_{i=1}^t (P^{t-1} \wr Z_p)^{a_i},$$

wenn P^m eine p -Sylowuntergruppe der S_{p^m} ist.

Das ist eine Anleitung zur induktiven Konstruktion einer p -Sylowuntergruppe der S_n .

Defektgruppen zur Klasse $C(x)$ des p -regulären Elementes $x \in S_n$ heißen die p -Sylowuntergruppen des Normalisators $N(x)$ von x in S_n . Ist $x \in (i^{a_i})$ p -regulär, so teilt p keine der Zykellängen i mit $a_i \neq 0$ von x . Aus 1.2/3 folgt deshalb:

1.4 Ist $x \in (i^{a_i})$ p -reguläres Element der S_n , $a_i = \sum_j b_{ij} p^j$, so ist

$$D(x) = \times_i P_{a_i} \simeq \times_i (\times_j (P^{j-1} \wr Z_p)^{b_{ij}})$$

Defektgruppe zur Klasse von x .

Es ergibt sich also, dass Normalisatoren, p -Sylowuntergruppen und Defektgruppen in symmetrischen Gruppen direkte Produkte von Kranzprodukten sind und aus Normalisatoren, p -Sylowuntergruppen und Defektgruppen symmetrischer Gruppen niedrigeren Grades auf einfache Weise hergestellt werden können.

2. Irreduzible Darstellungen von Kranzprodukten. Mit Hilfe der Cliffordschen Theorie der Darstellungen von Gruppen mit nichttrivialem Normalteiler lässt sich die Darstellungstheorie schnell herleiten. Dazu wird der Koeffizientenkörper als algebraisch abgeschlossen angenommen, über die Charakteristik braucht jedoch keine Voraussetzung gemacht zu werden.

Ist H Permutationsgruppe vom Grade b —wir nehmen stets G und H als nichttrivial an—so enthält $G \wr H$ nach den Ausführungen des ersten Paragraphen einen Normalteiler G^* —die sogenannte Basisgruppe—der zu einem direkten Produkt von b Exemplaren von G isomorph ist: $G^* = \times_i G^i \triangleleft G \wr H$. Die irreduziblen Darstellungen von G^* über algebraisch abgeschlossenem Koeffizientenkörper K sind deshalb genau die Darstellungen

2.1
$$D_i = \prod_{j=1}^b D_{ij},$$

Kroneckerprodukte aus irreduziblen K -Darstellungen D_{ij} der Faktoren $G^j (\simeq G)$. Beachtet man, dass $G \wr H$ semidirektes Produkt mit G^* als normalem Faktor ist, so folgt nach Clifford, dass jede irreduzible Darstellung D von $G \wr H$ von der Form

2.2
$$D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr H$$

ist. Dabei ist D_i^k irreduzible Darstellung der Trägheitsgruppe

$$T_i = \{h \in H \mid D_i^{(h)} \text{ äquivalent } D_i, D_i^{(h)}: G^* \ni x \rightarrow D_i(hxh^{-1})\}$$

von D_i . (“ \uparrow ” bedeute die Induktion, entsprechend “ \downarrow ” weiter unten die Einschränkung der voranstehenden Darstellung auf die nachstehende Gruppe.)

Die irreduzible Darstellung D_i^* von G^*T_i kann leicht ((11), S.330) aus D_i gewonnen werden.

Um die genaue Gestalt von D zu erhalten, muss deshalb die Trägheitsgruppe T_i ermittelt werden.

Zunächst seien D^1, \dots, D^t die irreduziblen Darstellungen von G^1 in irgendeiner, im folgenden jedoch festen Reihenfolge. D_i heiße vom Typ $(n) = (n_1, \dots, n_t)$, wenn n_k der Faktoren D_{ij} von D_i im wesentlichen gleich D^k sind, d.h. für n_k der Faktoren D_{ij} es $x \in S'_b \supseteq H'$ gibt mit $xG^jx^{-1} = G^1$ und $\chi^{ij}(x^{-1}yx) = \chi^k(y)$ für alle $y \in G^1$ und für die Charaktere χ^{ij} von D_{ij} und χ^k von D^k .

2.3. LEMMA. Ist die irreduzible Darstellung $D_i = \times_j D_{ij}$ der Basisgruppe G^* vom Typ $(n) = (n_1, \dots, n_t)$, so gilt für ihre Trägheitsgruppe T_i in $G \wr H$:

$$T_i = S'_{(n)} \cap H'$$

($S'_{(n)} = \times S'_{n_j} \subseteq S'_b$, S'_{n_k} symmetrische Gruppe der Abschnitte $A_{j_1}, \dots, A_{j_{n_k}}$, wenn die Faktoren $D_{ij_1}, \dots, D_{ij_{n_k}}$ im wesentlichen gleich D^k sind).

Beweis. Ist $x \in S'_{(n)} \cap H'$, so gilt für die Charaktere χ^{ij} :

$$\chi^{ij}(z) = \chi^{i,x(j)}(zxz^{-1})$$

für alle $z \in G^j$ ($x(j)$ sei so verstanden: $xA_jx^{-1} = A_{x(j)}$). Der Charakter von $y \in G^*$ (also $y = y_1 \dots y_b$, $y_j \in G^j$) bei D_i ist aber

$$\psi^i(y) = \prod_j \chi^{ij}(y_j),$$

was, wie eben gesehen, für $x \in S'_{(n)} \cap H'$ gleich

$$\phi_x^i(y) = \prod_j \chi^{i,x(j)}(xy_jx^{-1}),$$

dem Charakter von $D_i^{(x)}$ ist. Es gilt demnach $(S'_{(n)} \cap H') \subseteq T_i$. Ist umgekehrt $x \in T_i$ und $y \in G^j$, so ist

$$\chi^{ij}(y) = \chi^{i,x(j)}(xyx^{-1})$$

wegen $\phi_x^i = \psi^i$ für alle $x \in T_i$. x liegt damit in $S'_{(n)}$ und wir haben schliesslich auch $T_i \subseteq (S'_{(n)} \cap H')$, womit alles bewiesen ist.

Die Menge der irreduziblen Darstellungen D_i von G^* zerfällt in Klassen bezüglich H' konjugierter Darstellungen, in die sogenannten Bahnen von G^* . Durchläuft D_i in $D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr H$ ein Repräsentantensystem der Bahnen und D_i^k —bei festem D_i —die irreduziblen Darstellungen der Trägheitsgruppe T_i von D_i , so durchläuft D gerade ein vollständiges System inäquivalenter irreduzibler Darstellungen von $G \wr H$. Da Darstellungen verschiedenen Typs von G^* verschiedenen Bahnen angehören, ergibt sich folgender Satz:

2.4 SATZ. K sei ein algebraisch abgeschlossener Körper. Durchläuft D_i in $D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr H$ ein vollständiges Repräsentantensystem der verschiedenen Typen irreduzibler K -Darstellungen der Basisgruppe G^* von $G \wr H$ und—bei festem Typ—der verschiedenen Bahnen dieses Typs, durchläuft weiter D_i^k —bei festem D_i vom Typ (n) —die irreduziblen K -Darstellungen der Trägheits-

gruppe $T_i = S'_{(n)} \cap H'$ von D_i , so durchläuft D gerade ein vollständiges System irreduzibler K -Darstellungen von $G \wr H$.

Nimmt man als Koeffizientenkörper den Körper C der komplexen Zahlen, so erhält man aus 2.4 gerade die Ergebnisse von Specht (11) zur Darstellungstheorie von Kranzprodukten. Formuliert man 2.4 für die die gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen erzeugenden primitiven Idempotente der Gruppenalgebra, so ergibt sich das Hauptergebnis von Aizenberg (1):

2.5 KOROLLAR. *Ein System primitiver, paarweise orthogonaler Idempotente der Gruppenalgebra $C(G \wr H)$, die alle gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von $G \wr H$ erzeugen, bilden die Produkte aller primitiven Idempotente e_i , denen inäquivalente irreduzible Darstellungen von CG^* entsprechen, mit den primitiven Idempotenten u_j^k von $CN(e_i)$, wobei $N(e_i)$ der Normalisator von e_i in H' ist. Die Idempotente $e_i u_j^k$ und $e_l u_m^n$ definieren genau dann äquivalente Darstellungen von $G \wr H$, wenn es ein $h \in H'$ gibt mit*

$$(i) e_i = h e_l h^{-1}, \quad (ii) I_j^k = h I_m^n h^{-1}$$

(I_p^q einfaches zweiseitiges Ideal aus $CN(e_p)$, welches u_p^q enthält).

Für $G \wr H \simeq Z_a \wr S_b$ gibt 2.4 gerade die Ergebnisse Osimas (7; 8) zur Darstellungstheorie dieser von Osima so genannten verallgemeinerten symmetrischen Gruppen.

Da für $H = S_b$ eine Bahn von G^* gerade aus den irreduziblen Darstellungen eines Typs besteht, lässt sich 2.4 für die Symmetrien wie folgt formulieren:

2.6 KOROLLAR. *K sei algebraisch abgeschlossen. Durchläuft D_i in*

$$D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr S_b$$

die verschiedenen Typen irreduzibler K -Darstellungen der Basisgruppe und— bei festem D_i vom Typ (n) — D_i^k die irreduziblen K -Darstellungen von $S'_{(n)}$, so durchläuft D gerade ein vollständiges System irreduzibler K -Darstellungen der Symmetrie b -ten Grades von G .

3. p -modulare Darstellungen von Kranzprodukten. Teilt die Charakteristik des Koeffizientenkörpers die Ordnung von $G \wr H$, so erhebt sich die Frage, welche Folgerungen aus 2.4 für Blockstruktur und Zerlegungszahlen gezogen werden können.

3.1 SATZ. *Ist G eine p -Gruppe, so bilden die irreduziblen gewöhnlichen Darstellungen von $G \wr H$ genau einen p -Block. Eine zu*

$$D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr H$$

gehörige p -modulare Darstellung hat dieselben Zerlegungszahlen wie eine zu $D \downarrow H'$ gehörige p -modulare Darstellung von H' .

Beweis. (a) Dass $G \wr H$ genau einen p -Block besitzt, folgt mit einem Lemma von Brauer (2, Lemma 2) daraus, dass die Basisgruppe G^* von $G \wr H$ ihren Zentralisator enthält. Nach Brauer besitzen nämlich Gruppen, die einen

Normalteiler von p -Potenz-Ordnung enthalten, der seinen Zentralisator umfasst, genau einen p -Block.

(b) Wegen $G \wr H = G^*H'$ liegen p -reguläre Elemente von $G \wr H$ in H' , D hat also denselben Brauercharakter wie $D \downarrow H'$. Damit ist alles gezeigt.

Ist G abelsch, so sind demnach die Zerlegungszahlen von D dieselben, wie die von $(D_i^k \uparrow H')$. Für abelsche p -Gruppen G besteht die Zerlegungsmatrix von $G \wr H$ bezüglich p also aus einem einzigen Kästchen, und mit der Kenntnis der Zerlegungszahlen von H bezüglich p und der gewöhnlichen Darstellungen von G kann man dessen Elemente, die Zerlegungszahlen von $G \wr H$, bestimmen.

Ist dagegen die Ordnung $|G|$ von G relativ prim zu p , so ist D_i^* in

$$D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr H$$

modular irreduzibel und D hat dieselben Zerlegungszahlen wie D_i^k . Die Verteilung dieser Zerlegungszahlen auf die Spalten der Zerlegungsmatrix ergibt sich aus einem Lemma von Osima (8, Lemma 5): zum Block B' von G^*T_i , dem $D_i^* \times D_i^k$ angehört, gibt es einen Block B von $G \wr H$, und beide haben dieselbe Zerlegungsmatrix. Das ergibt mit 2.4:

3.2 SATZ. *Ist p kein Teiler von $|G|$, so hat der durch $D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr H$ bestimmte p -Block von $G \wr H - D_i$ sei vom Typ (n) —als Zerlegungsmatrix die Zerlegungsmatrix des Blockes von $T_i = S'_{(n)} \cap H'$, der Trägheitsgruppe von D_i , dem D_i^k angehört.*

Für $H = S_b$ folgt daraus:

3.3 KOROLLAR. *Ist p kein Teiler von $|G|$, so hat der durch*

$$D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr S_b$$

bestimmte Block der Symmetrie b -ten Grades von G als Zerlegungsmatrix das Kroneckerprodukt der Kästchen aus den Zerlegungsmatrizen der S'_{n_j} , denen die $[\alpha_j]$ angehören (D_i vom Typ (n_1, \dots, n_t) , $D_i^k = \times_j [\alpha_j]$, $[\alpha_j]$ gewöhnliche irreduzible Darstellung von S'_{n_j}).

4. Die Darstellungstheorie der Symmetrien als Beispiel und ihre Anwendung auf die verallgemeinerten Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen. Nach den Ausführungen des zweiten Paragraphen sind die Darstellungen der Symmetrie b -ten Grades $G \wr S_b$ einer endlichen Gruppe G von der Form $D = (D_i^* \times D_i^k) \uparrow G \wr S_b$, wobei $D_i = \times D_{ij}$ irreduzible Darstellung der Basisgruppe $G^* = \times G^i$ und D_i^k irreduzible Darstellung der Trägheitsgruppe $T_i = S'_{(n)}$ ist (D_i vom Typ $(n) = (n_1, \dots, n_t)$, $\sum n_j = b$). Also ist für C als Koeffizientenkörper

$$4.1 \quad D_i^k = [\alpha_1] \times \dots \times [\alpha_t],$$

wenn $[\alpha_j]$ gewöhnliche irreduzible Darstellung von S_{n_j} ist. Bezeichnen wir nach Robinson (9, 3.3) das äussere Produkt mit

$$4.2 \quad D_i^k \uparrow S'_b = [\alpha_1][\alpha_2] \dots [\alpha_t],$$

so hat—wenn G eine abelsche p -Gruppe ist—nach 3.1 die Darstellung D bezüglich p dieselben Zerlegungszahlen wie $[\alpha_1] \dots [\alpha_l]$. $[\alpha_1] \dots [\alpha_l]$ ist eine im allgemeinen reduzible Darstellung der S'_b , deren irreduzible gewöhnliche Bestandteile bekanntlich mit Hilfe der Littlewood–Richardson–Regel ermittelt werden können (9, 3.3).

So lässt sich die Berechnung der Zerlegungszahlen bzgl. p der Symmetrie b -ten Grades einer abelschen p -Gruppe G auf die Berechnung von Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen vom Grade $\leq b$ zurückführen. Das gilt nach 3.3 auch für den Fall $(|G|, p) = 1$, hier auch für nichtabelsche G .

Eine Anwendung findet diese Darstellungstheorie der Symmetrien bei der Berechnung der verallgemeinerten Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen (4):

Ist x ein p -Element der Ordnung p^k einer endlichen Gruppe B , so gibt es in $Q(\epsilon)$ (ϵ primitive p^k -te Einheitswurzel, Q der Körper der rationalen Zahlen) ganze algebraische Zahlen d_{ij}^x , die nur von x und nicht von y abhängen mit

$$4.3 \quad \zeta^i(xy) = \sum_j d_{ij}^x \hat{\phi}^j(y)$$

(ζ^i gewöhnliche irreduzible Charaktere von B , $\hat{\phi}^j$ Brauercharaktere des Normalisators $N(x)$ von x , $y \in N(x)$, y p -regulär).

Sind $1 = x_1, x_2, \dots, x_u$ Repräsentanten der Klassen von p -Elementen, so heisst, mit $D^* = (d_{ij}^*)$,

$$4.4 \quad M = (D^{x_1}, \dots, D^{x_u})$$

Matrix der verallgemeinerten Zerlegungszahlen von B bezüglich p . Um M zu berechnen, genügt es nach 4.3, die gewöhnlichen Darstellungen von B und die gewöhnlichen Darstellungen sowie deren Zerlegungszahlen für die Normalisatoren von p -Elementen in B zu kennen. 1.2, 2.6, und 3.1 ermöglichen nun die Zurückführung der Berechnung verallgemeinerter Zerlegungszahlen auf die Berechnung von Zerlegungszahlen symmetrischer Gruppen:

Enthält $x \in S_n$ a_i Zyklen der Länge i , also $x \in (i^{a_i})$, und ist x ein p -Element, so sind alle i mit $a_i \neq 0$ p -Potenzen, also $x \in ((p^{e_i})^{b_i})$. Es gilt dann nach 1.2:

$$4.5 \quad N(x) \simeq \times_i (Z_{p^{e_i}} \wr S_{b_i}).$$

Die Zerlegungsmatrix von $N(x)$ bezüglich p ist also Kroneckerprodukt von Zerlegungsmatrizen von Gruppen der Form $Z_{p^e} \wr S_a$.

Die gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von $Z_{p^e} \wr S_a$ sind nach 2.2/3 von der Form

$$4.6 \quad D = (\epsilon^{(i)} \times ([\alpha])) \uparrow Z_{p^e} \wr S_a,$$

wobei

$$\epsilon^{(i)}: z_\nu \rightarrow \epsilon^{i\nu} \quad (z_\nu \text{ erzeuge } Z_{p^e}^\nu)$$

ist ($1 \leq i_\nu \leq p^e$, ϵ primitive p^e -te Einheitswurzel), ist n_k die Anzahl der i_ν mit $i_\nu = k$, so ist $[\alpha_k]$ gewöhnliche irreduzible Darstellung der S_{n_k} und $([\alpha]) = \times_k [\alpha_k]$ (S. 3.3). D hat nach 3.1 dieselben Zerlegungszahlen wie $[\alpha_1] \dots [\alpha_{p^e}]$,

