UNE CLASSE DES PROCESSUS DE RISQUE ET LEUR ALGORITHME DE RESOLUTION

ED. FRANCKX
Bruxelles

§ 1. LA CLASSE DES PROCESSUS DE RISQUE DISCRETS

A) *Le problème du choix des bases' actuarielles*

A l'encontre de la théorie classique de l'assurance collective, qui s'intéresse plus particulièrement aux problèmes asymptotiques, les praticiens de l'assurance ,,non life'' et les autorités de contrôle souhaitent disposer d'une méthode effective de calcul permettant de chiffrer la valeur réelle des probabilités de ruine dans un avenir plus ou moins rapproché.

Telle fut la remarque de notre collègue Bichsel au colloque d'ASTIN en 1967 à Arnhem. Dans le bulletin des Actuaires Suisses nous avons publié deux notes sur ,,une théorie opérationnelle du risque''. A la base se trouve l'emploi des processus markoviens discrets. Ces études prolongeaient un premier essai, exposé à l'Université de Trieste en 1963; une conférence donnée à Tel Aviv en 1967 développait le même thème. Dans un autre domaine, celui de la Recherche Opérationnelle, les ingénieurs utilisent depuis longtemps les mêmes processus de Markov pour étudier, par la dynamique stochastique, l'évolution d'un système aléatoire.

Au colloque d'ASTIN de 1970, le professeur Borch a présenté une note qui était très voisine de nos conceptions. Toutefois nous différons sur un point essentiel et d'ailleurs très compréhensible. Les conditions compétitives du marché imposent des restrictions, des contraintes complémentaires que Borch exprime sous la forme d'un principal général d'équivalence. Il lie les primes encaissées et les risques couverts.

Sur le plan théorique ce principe n'est pas ,,indispensable''. Le supprimer revient à introduire l'indépendance du ,,risk-process'' et du ,,premium-process''. Fait surprenant, l'extension ainsi introduite permet de faire une synthèse entre les deux domaines aussi distincts que l'assurance viagère et non viagère. Nous avons développé ces idées à Randers sans entrer dans le détail des calculs.

La note présentée au Congrès a pour objectif de préciser le point de vue, mais surtout de prouver qu'*un seul et même algorithme, susceptible d'être mis sur ordinateur permet de chiffrer les résultats en pratique*.

La présentation formelle de la note est volontairement systématique. Elle a pour but de mettre en lumière la généralité et la souplesse du modèle admis. Ce dernier nous semble adéquat pour ,,structurer'' l'ensemble des opérations actuarielles sur le plan pratique. Il constitue un *choix de bases actuarielles*. Mais il doit être entendu à priori que nous n'affirmons pas que la classe des processus considérée est la plus générale, loin de là. Cependant tout actuaire apprend que la théorie la plus générale des opérations viagères exige le continu et le maniement d'intégrales. Mais tout actuaire sait, d'expérience personnelle, qu'en pratique il ne calcule jamais une intégrale et que la ,,vraie'' solution du ,,métier'' est donnée par le procédé discontinu des commutations de Davies. C'est là que *gît la différence entre le praticien et le théoricien*. Et cette différence s'accentue encore par l'utilisation des ordinateurs ou les données discrètes sont d'absolue nécessité.

Tout modèle doit pouvoir se raisonner. Il doit permettre d'établir des prévisions. Mais il doit être efficient, c'est-à-dire servir à chiffrer des risques. En dernière analyse c'est souvent cela qu'on exige de l'actuaire.

B) *La classe des processus stochastiques discrets*

I. Les données

a) Nous utiliserons le language des processus temporiels discrets.

La variable principale est le temps t, il conditionne toutes les opérations d'assurance.

Les opérations commerciales possèdent le caractère ,,répétitif''. Pour chaque ensemble de contrats l'assureur fait le bilan fin d'exercice. Cela conduit à considérer le temps t comme une variable discrète:

— prenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots k, k + 1$
— imposant l'intervalle $(k, k + 1)$ comme k^e exercice.
— fixant le temps 0, comme temps initial.

b) 1°) Quel que soit l'exercice k, nous admettons a priori qu'il *existe* une variable „globale" (ou collective) X_k, qui définit les possibilités aléatoires de payement de l'assureur. C'est le „risk process".

Nous supposons connus les nombres:

$$\begin{cases} p_i^k = \text{prob du paiement de } i \text{ unités monétaires au cours du } k^e \text{ exercice} \\ \text{avec } p_i^k \geqslant 0 \qquad \sum_{i=1} p_i^k = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Le processus de risque comporte la donnée a priori de la suite des variables

$$X_1 \, X_2 \, \ldots\ldots \, X_k \, \ldots\ldots \tag{2}$$

C'est la pratique ou le problème de recherche scientifique qui spécifie cette suite. La théorie des processus de risque doit être valable quelle que soit la nature particulière de cette suite.

2°) De même au cours du k^e exercice, l'assureur constate ou s'attend à un encaissement global M_k. Peu importe le moment de l'encaissement. En vie, on le suppose en moyenne au milieu de l'exercice; cela afin de tenir compte du facteur d'intérêt. Sur le plan du risque pur, le moment est indifférent et nous supposerons dans la suite que cet encaissement a lieu globalement début exercice. On se rendra compte que cette hypothèse ne nuit en rien à la généralité de la méthode.

En bref, un processus de risque comporte la donnée a priori de la suite des encaissements: le „premium process".

$$M_0 \, M_1 \, \ldots\ldots \, M_k \, \ldots\ldots \tag{3}$$

c) Enfin comme dans tout problème mécanique ou physique, il y a lieu de fixer les conditions initiales. Le joueur, l'organisme d'assurance qui s'engage, possède une fortune personnelle f, et nous la supposons a priori non négative $f \geqslant 0$.

II. Le jeu

Sous l'effet superposé du „risks process" (2) d'une part, du „premium process" (3) d'autre part, la fortune propre de l'assureur va subir des fluctuations. Son évolution est de nature essentiellement stochastique.

Le phénomène répétitif qui conditionne le jeu, consiste à établir le bilan fin d'exercice et d'accepter la règle de décision uniforme suivante:

ou bien la fortune de l'assureur est non négative; alors on engage une nouvelle partie sur l'exercice qui suit,

ou bien la fortune de l'assureur devient négative; dans ces conditions le jeu se termine et l'assureur est déclaré ,,ruiné''.

III. Le problème à résoudre

a) *La variable aléatoire ,,état du système''*

Quel que soit l'exercice k, début d'exercice c'est-à-dire au temps k, l',,état'' de la fortune du joueur est

ou bien l'état de ruine α, (quand on est ruiné on reste ruiné)

ou bien il n'appartient pas à l'état de ruine et dans ce cas la fortune est non négative: $0, 1, 2, \ldots j > 0 \ldots$ exprimé en unités monétaires.

L'ensemble des états du système aléatoire qui représente la fortune de l'assureur sera

$$\alpha;\ 0, 1, 2, \ldots j \ldots$$

et cela induit l'existence d'une variable aléatoire ,,état'' notée Y_k, qui définit les possibilités de la fortune de l'assureur, début du k^e exercice.

$$Y_1\, Y_2 \ldots Y_k \ldots \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{avec } Y_k \quad : \ Q_\alpha^k\, Q_0^k \ldots Q_j^k \ldots \\ Q_\alpha^k \geqslant 0 \quad Q_j^k \geqslant 0 \quad Q_\alpha^k + \sum\limits_{j=k} Q_j^k = 1 \end{array}\right. \tag{5}$$

Par définition, la suite des variables aléatoires $Y_1 \ldots Y_k \ldots$ définit le ,,state process''.

b) Dès lors le problème général de la dynamique stochastique appliqué au fonds monétaire disponible pour l'assureur peut s'énoncer comme suit:

Quels que soient les trois éléments constitutifs d'un processus de risque discret.

1°) la fortune f.
2°) le ,,risk process'' $X_0\ X_1\ X_2\ \ldots\ X_k\ \ldots$ (1)
3°) le ,,premium processus'' $M_0\ M_1\ \ldots\ M_k\ \ldots$ (2)

On demande de ,,calculer'' la suite de variables $\{Y_k\}$ qui définissent le ,,state process''.

Si ce problème général admet une solution, on constatera qu'ipso facto on zura la solution numérique du problème de la ruine, qui n'est qu'un aspect du state-process. Car si le ,,state process'' est connu, on obtient, en particulier, la suite des probabilités:

$$Q_\alpha^1\, Q_\alpha^2\, \ldots\, Q_\alpha^k\, \ldots$$

qui donne précisément les probabilités de ruine après 1, 2 ... k exercices ... Mais ce n'est là qu'un seul sous-produit de la méthode générale. On constatera qu'il y en a d'autres. C'est utile si nous voulons faire une synthèse de domaine life et non life.

§ 2. Le théorème de l'algorithme ou le principe de superposition

A) *Le principe de la superposition des effets exterieurs*

a) Ce théorème constitue le point central de la communication. Il domine toute la théorie des processus de risque définis au paragraphe précédant.

Aussi convient-il avant de développer la démonstration que nous donnions une idée concrète de son contenu.

Nous nous trouvons devant un problème itératif, de dynamique stochastique. Nous connaissons la situation initiale, la fortune de l'assureur au temps initial. C'est une donnée (dans chaque cas particulier) (un paramètre dans le cas général).

Résoudre le problème itératif consiste à ,,*fixer les règles*'' qu'il suffit de suivre aveuglément (et par suite qu'un ordinateur exécutera servilement) pour passer de la variable d'état quelconque Y_k à la variable d'état suivante Y_{k+1}. L'ensemble de ces règles constitue l'algorithme général de résolution.

1°) il donnera la solution quel que soit le processus particulier de la classe considérée; il est donc *uniformément applicable* et résoud tout problème de ruine.

2°) il constitue un algorithme, au sens moderne du mot, car les instructions à exécuter sont en *nombre fini*.

Tel est le sens précis que nous attribuons à la méthode de résolution que nous appelons „le théorème de l'algorithme".

b) Mais il y a plus. Le théorème de l'algorithme met en lumière que le passage de la variable d'état Y_k à la variable d'état Y_{k+1}, peut se faire *séparément en deux stades indépendants*. Il résulte de la *superposition de deux transformations successives:*

— la première ne tient compte que du premier facteur d'influence; le payement de la prime globale M_k du k^e exercice.
— la seconde fait intervenir uniquement le deuxième facteur d'influence, le payement aléatoire des sinistres, défini par la variable risque X_k de même exercice.

C'est ce résultat fondamental que nous appelons le principe de superposition des effets extérieurs; l'un et l'autre effet ne dépendent pas de l'organisme d'assurance, dès que nous supprimons l'action de principe d'équivalence de Borch, ils constituent des causes extérieures à l'organisme. La première transformation r_k, aura pour objet de définir une variable aléatoire intermédiaire Y_k, telle qu'au point de vue fonctionnel on ait:

$$\tilde{Y}_k = r_k(Y_k;\, M_k) \qquad (\alpha)$$

La deuxième transformation φ_k, permettra de passer de la variable intermédiaire $\tilde{Y}_k$ à la nouvelle variable d'état $\overline{Y}_{k+1}$; nous noterons

$$Y_{k+1} = \varphi_k(\tilde{Y}_k;\, X_k) \qquad (\beta)$$

La superposition de ces deux transformations donne la solution du problème itératif.

c) Notons pour finir une différence essentielle entre les deux transformations successives

— la première est une *pseudo-translation*, elle appartient au domaine des transformations certaines ou déterministes.
— la seconde par contre est une *transformation markovienne*; elle est très particulière mais elle appartient toujours au domaine des transformations stochastiques.

Ainsi se trouve *décomposée* l'évolution stochastique de la fortune de l'assureur. Nous pouvons donc énoncer le *principe général de la dynamique stochastique des processus de risque.*

Quel que soit le stade atteint, au cours du nouvel exercice, l'évolution de la fortune de l'assureur est toujours le résultat successif d'une pseudo-translation, suivie d'une transformation markovienne.

De plus, la première transformation ne dépend que de l'encaissement de l'exercice, la seconde transformation dépend uniquement des risques acceptés au cours du même exercice.

Il nous reste maintenant à énoncer et à justifier ce principe général.

B) *Les regles de l'algorithme*

Quels que soient les trois éléments variables d'un processus de risque, le passage d'une variable d'état Y_k à la suivante Y_{k+1} s'obtient en suivant les 3 règles ci-après:

Règle 1.

Si Y_k est défini par la suite $Q_\alpha^k\, Q_0^k \ldots Q_j^k \ldots Q_i^k$ on introduit *entre* Q_α^k et Q_0^k autant de zéros qu'il y a d'unités monétaires dans M_k. On définit de la sorte la variable *intermédiaire* $\tilde{Y}_k$ *„état après encaissement des primes* M_b; elle est défini par la suite:

$$Q_\alpha^k \underbrace{0\ 0 \ldots 0}_{M_k} \quad Q_0^k\, Q_1^k \ldots\ldots Q_i^k \tag{5}$$

Comme Q_0^k reste en place, ce n'est pas une translation pure, mais une *pseudo translation* qui déplace uniformément tous les termes de la suite Y_k, *sauf le premier.*

Regle 2.

A partir de la variable X_k du nouvel exercise on constrait le

a) tableau dit tableau des "restes", qui comporte deux lignes

$$\begin{cases} p_0^k\, p_1^k \ldots\ldots p_j^k \\ r_0^k = 1\ r_1^k \ldots\ldots r_j^k \end{cases} \tag{6}$$

$$\text{avec } r_l^k = \sum_{\rho \geqslant l} p_\rho^k$$

les restes r_l^k = prob dommage global du k^e exercice atteigne au moins l

https://doi.org/10.1017/S051503610000578X Published online by Cambridge University Press

b) la matrice de Markov de l'exercice k.

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1^k & r_2^k & & \dots & r_j^k & \dots & & \\ 0 & p_0^k & p_1^k & & & p_{j-1}^k & p_j^k & \dots & \\ 0 & 0 & p_0^k & p_1^k & \dots & p_{j-2}^k & p_{j-1}^k & p_j^k & \dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & p_0^k & p_1^k & \dots\dots\dots\dots & p_j^k & \dots & \end{bmatrix} \qquad (7)$$

ou la première ligne à la ligne des restes du tableau précédent.

les lignes suivantes reproduisent la première ligne du tableau des restes mais translatées d'un rang vers la droite; on complète par des zéros.

Cette matrice non négative $[M_k]$ dont toutes les colonnes possèdent la propriété que la somme de termes d'une même colonne est toujours unitaire est donc une *matrice markovienne*, mais très particulière puisqu'elle est de plus *triangulaire*.

Règle 3.

On effectue la *transformation tabulaire* de la variable intermédiaire $\tilde{Y}_k$ par la matrice Markovienne $[M_k]$ et on obtient la nouvelle variable état $\overline{Y}_{k+1}$.

$$\begin{array}{c|ccccccccc} {}_{Y_{k+1}} \diagdown {}^{Y_k} & q_\alpha^k & 0 & \dots\dots & \dots & 0 & q_0^k & q_1^k & \dots\dots & \\ \hline q_\alpha^{k+1} = & 1 & r_1^k & r_2^k & \dots\dots & r_{M+1}^k & r_{M+1}^k & \dots\dots & & \\ q_0^{k+1} = & 0 & p_0^k & p_1^k & \dots\dots & p_M^k & p_{M+1}^k & p_{M+2}^k & & \\ q_1^{k+1} = & 0 & 0 & p_0^k & p_1^k & & p_M^k & p_{M+1}^k & p_{M+2}^k & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array} \qquad (8)$$

Cela suppose qu'en *ligne opérationnelle supérieure* $\tilde{Y}_k$, on introduit les constituants de la variable aléatoire intermédiaire, fixée par la règle 1.

On effectue la multiplication „ligne par ligne" de la ligne opérationnelle par toutes les lignes de la matrice de Markov (indiqué par la flèche).

On obtient comme „output" en *colonne opérationnelle* Y_{k+1}, les constituants de Y_{k+1}.

En particulier, le premier élément q_α^{k+1} donne la valeur numérique de la probabilité de ruine à la fin du k^e exercice.

c) *La justification des règles.*

Elle est élémentaire. Au k^e exercice nous disposons d'une variable contradictoire X_k. On peut par suite calculer la probabilité d'atteindre un état quelconque α, 0, 1 ..... fin d'exercice, en décomposant par rapport à toutes les valeurs possibles du total des sinistres X_k de cet exercice.

Il suffit donc de prouver qu'en exécutant la multiplication ligne par ligne, nous effectuons bien cette décomposition prévue par rapport à X_k, variable spécifique du risk-process.

Il en est bien ainsi car:

$$q_\alpha^k + q_0^k r_{M_{k+1}}^k + q_1^k r_{M_{k+1}}^k \cdots + q_i^k r_{M_{k+i+1}}^k + \cdots \tag{9}$$

donne bien la somme des probabilités de différentes manières d'arriver à l'état de ruine fin du k^e exercice.

— le premier terme nous dit que si l'assureur est ruiné, il le reste.
— le second indique que si sa fortune est nulle au départ du k^e exercice et s'il encaisse la prime globale M_k, il sera néanmoins ruiné s'il débourse plus que M_k.
— en général le $(i + 1)^e$ terme que c'est une manière d'être ruiné que de cumuler au départ $i + M_k$, mais de subir des pertes supérieures à ce montant disponible.

Cette sommation représente bien q_α^{k+1}.

De même

$$q_0^k p_{M_k}^k + q_1^k p_{M_{k+1}}^k \cdots\cdots\cdots q_i^k p_{M_{k+i}}^k + \cdots\cdots\cdots \tag{10}$$

représente la somme des probabilités des différentes manières d'atteindre une fortune nulle fin d'exercice, chaque manière supposant que le disponible $(M_k + i)$ est consommé par le dommage payé.

https://doi.org/10.1017/S051503610000578X Published online by Cambridge University Press

En translatant systématiquement la deuxième ligne de $[M_k]$ d'un rang, le même raisonnement prouve que l'on a les probabilités des différentes manières d'atteindre fin d'exercice la fortune 1, 2, ... etc.

Ce raisonnement général justifie la validité de l'algorithme et ipso facto le principe de superposition.

En fait l'astuce de ce paragraphe ne réside pas dans la démonstration, mais dans la décomposition et la codification des opérations à effectuer.

Règle initiale.

A cet ensemble de 3 règles, qui conditionne la méthode itérative, il faut pour mettre le processus de calcul en route fixer la *première* suite à introduire en ligne opérationnelle. Elle doit représenter le disponible au départ. Or ce dernier vaut le cumul de la fortune initiale f_0 et du premier encaissement M_0 par suite, on mettra en ligne opérationnelle la suite:

$$0\ \underbrace{0\ 0\ \ldots\ldots\ 0}_{f_0 + M_0}\ 1\ 0\ 0\ \ldots\ldots \tag{11}$$

Le premier zéro exprime qu'au départ $q_\alpha^0 = 0$, le jeu est possible, l'assureur n'est pas ruiné.

§ 3. Les applications diverses

A) *Les problèmes non life — théorie de la solvabilité*

a) Un des buts essentiel poursuivi dans cette étude était comme nous l'avons dit au § 1 A, de résoudre numériquement le problème de la ruine sur un horizon limité.

Ce but est réalisé par l'algorithme général.

Notons simplement les données du problème principal des assurances non life, le problème *stationnaire*. Ce dernier suppose:

a) une fortune initiale f.

b) un risque annuel invariant, donc le „risk process"

$$X \equiv X_0 = X_1 \ldots = X_k = \ldots.$$

nous désignons par E_1 la valeur moyenne de cette variable globale.

https://doi.org/10.1017/S051503610000578X Published online by Cambridge University Press

c) un encaissement annuel invariant, donc le „premium process"

$\{M = M_1 = \ldots M_k = \ldots = E(1 + k) = E_{d_E}$

α_E étant le chargement de sécurité

Donc comme l'exige les conditions du marché, primes et risques sont liés; le jeu est presque équitable, mais favorable à l'assureur.

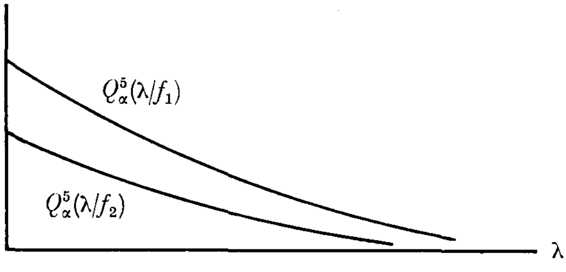
b) Ce modèle sera certainement dans l'avenir le *modèle central,* de l'assureur, car il suppose que „l'avenir prolonge le présent" et que toutes choses égales on se fixe pour objectif de se rendre compte de l'évolution du fonds de sécurité dans cette hypothèse de permanence. Avec ces données on peut s'attaquer à la *théorie de la solvabilité.*

Si on se fixe un horizon limité (5 ans par exemple) la valeur f_0 de la fortune propre de l'assureur, si on connait la variable X, le seul paramètre qui subsiste est le paramètre de sécurité λ.

Alors pour chaque valeur de λ, l'algorithme donnera la valeur $Q^5_\alpha(\lambda/f_0)$ d'être ruiné avant la fin du 5e exercice si la fortune initiale est f_0.

A l'aide de l'ordinateur on obtient une fonction décroissante de λ, car au plus fort le coefficient de sécurité au plus petite la probabilité de ruine.

On peut, dès lors, construire un *diagramme* reprenant les courbes $Q^5_\alpha(\lambda)$ pour différents niveaux de la fortune initiale f et il est bien certain que si $f_1 < f_2$ on aura, quel que soit λ Q



Ce diagramme est un diagramme de décision pour l'assureur, car il peut l'aider à fixer son comportement.

https://doi.org/10.1017/S051503610000578X Published online by Cambridge University Press

Il lui suffit de fixer un „niveau de solvabilité" — accepté volontairement ou imposé par les autorités de contrôle et d'admettre la règle de fonctionnement.

La valeur de λ, doit compte tenu de la fortune propre f être telle que la probabilité de ruine sur l'horizon de 5 ans soit inférieur au niveau de solvabilité accepté. Il est évident que le diagramme de décision fixe, quel que soit f, une valeur critique $\lambda^*_{(f)}$ en dessous de laquelle, il ne convient pas de tomber.

c) Au point de vue de l'algorithme, tout se simplifie puisque la pseudo-translation et la matrice de Markov restent invariante, ce qui permet d'ailleurs de simplifier l'algorithme.

B) *Les processus de „mécène"*

α) un mécène est un homme, ou un organisme qui accepte d'indemniser des risques sans paiement de primes.

On suppose donc:

1°) disposer d'un fonds d'indemnisation f.
2°) subir un „risk process" $X_0\ X_1\ \ldots\ X_k$
3°) admettre le „premium process" $o, o, o\ \ldots$

Il est bien évident que le marché capitaliste ne permet pas ce processus de risque; par contre c'est la forme admise a priori en régime collectiviste.

Le problème de l'évolution stochastique revient à se rendre compte de l'évolution du fonds d'indemnisation, c'est-à-dire de la probabilité de survie, sur un horizon limité.

β) Mais on se rend compte que tous les *processus d'usure* participent des mêmes caractéristiques et qu'en particulier le processus de mortalité, introduit par Dodson, et classique en assurance-vie peut se ramener à un processus de „mécène". Nous considérons le processus particulier.

a) la fortune initiale est nulle $f = o$
b) le risk process est défini par une suite de variables „indicateur"

$$X_0\ X_1\ \ldots\ X_k\ \ldots$$

https://doi.org/10.1017/S051503610000578X Published online by Cambridge University Press

X_k est relatif, à l'intervalle d'age $(k,k+1)$ et prend les valeurs

o avec la probabilité p_k
1 avec la probabilité $Q_k = 1 - p_k$

c) le premium process

quelque soit $k = 0,1 \ldots M_k = 0$

C'est là une certitude un processus de mécène. Le mouvement de la fortune f consiste donc à ce maintenir au niveau 0, le jeu prend fin dès qu'on passe à la fortune (-1).

Or cela décrit exactement le modèle de Dodson ou Q_k représente la probabilité de décès entre les âges k et $k+1$.

Ainsi le modèle de base des opérations de vie et les modèles d'usure classique de la théorie de la fiabilité appartiennent à la classe générale des processus de risque considéré dans cette note.

Si nous appliquons l'algorithme cette corrélation devient évidente

1°) dans tout processus de „mécène" $\tilde{Y}_k = Y_k$, il n'y a pas de pseudo-translation.

2°) quel que soit le temps, il n'y a que deux états
1°) l'état de ruine $\equiv$ état de décès
2°) la fortune $f = 0 \equiv$ état de vie

Dès lors le tableau opérationnel devient:

	Q_α^k	Q_0^k		
$Q_\alpha^{k+1} =$	1	Q_k	$= Q_\alpha^k + Q_0^k Q_k$	probabilité de décès au plus tard à l'âge k
$Q_0^{k+1} =$	0	p_k	$= p_k Q_0^k$	probabilité de survie à l'âge $k+1$

γ) Il y a moyen de considérer d'une manière similaire toutes les opérations viagères mais il y a lieu d'introduire le facteur intérêt, et de travailler sur les valeurs moyennes escomptées, des variables. L'algorithme donne alors la célèbre relation de Fourret entre réserves mathématiques successives. Ce point de vue a été développé dans nos leçons de Trieste.

Mais ce qui est intéressant c'est de signaler qu'en fait toute opération viagère est un jeu qui se joue sur la période „transitoire" de vie d'assuré. C'est la un aspect totalement différent du problème non-life, de la ruine, auquel on accorde probablement trop de considération. Ce n'est qu'un des aspects de l'ensemble de tous les jeux, que l'on pourrait considérer, sur la période de non-ruine de l'assureur. A cet ensemble appartient d'ailleurs les jeux de réassurance.

C) *Les processus de „filou"*

a) A l'opposé du mécène se trouve le filou, celui dont l'exigence de prime dépasse de loin les conditions normales du marché. Le jeu des usuriers participent de cette classe. Ils ne sont pas „acceptables" dans des conditions normales et pourtant ils existent et des malheureux se trouvent parfois contraints de les jouer.

b) Ce qui est aussi surprenant, c'est que de tels processus permettent de résoudre certains problèmes actuariels et en particulier le fameux problème des convolutions que les actuaires non life rencontrent toujours dans les processus de risque composés. A titre d'exemple prenons le processus de risque suivant:

1°) la fortune initiale est nulle

2°) le processus de risque est stationnaire et est fixé pour la variable „indicateur"

$$X \quad \begin{matrix} 0 \text{ avec la probabilité } p \\ 1 \text{ avec la probabilité } Q = 1 - p \end{matrix}$$

3°) le processus de paiement est stationnaire

$$M = 1 \quad 1 \quad 1 \ldots 1 \ldots$$

Il est évident qu'on a affaire à un processus de filou puisque le joueur rend la mise 1, si 0 sort, il l'empoche dans le cas contraire si 1 se présente. Il ne peut jamais être ruiné. Après k parties sa fortune propre variera entre 0 et k. Il est bien connu que la fortune prend la valeur i avec la probabilité de Bernoulli

$$p_i = C_k^i Q^i p^{k-i}$$

Par suite, en utilisant l'algorithme général, la variable état Y_k, doit coïncider avec la loi de Bernoulli qui est la variable somme

$$Z_k = X_1 + X_2 \ldots\ldots + X_k$$

c) Si nous appliquons l'algorithme

1°) Y_k est obtenu par la pseudo-translation d'un seul zéro,

2°) La matrice de Markov est invariante et prend la forme

$$\begin{matrix} 1 & q & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p & q & 0 & \\ 0 & 0 & p & q & 0 \end{matrix}$$

elle se réduit à deux diagonales caractéristiques,

3°) au stade k_1 on devra introduire en ligne opérationnelle:

$$0,\ 0,\ Q^k,\ C_k^1\, Q^{k-1}\, p,\ C_k^2\, Q^{k-2}\, p^2\ \ldots$$

et la multiplication tabulaire donnera:

1°) Q_α^{k+1} le filou n'est jamais ruiné.

2°) $Q_0^{k+1} = Q^{k+1}$

$$Q_1^{k+1} = p\,Q^k + C_k^1\, p\, Q^k = C_{k+1}^1\, Q^k\, p$$

$$\vdots$$

$$Q_i^{k+1} = pC_k^{i-1}\, Q^{k+1-i}\, p^{i-1} + Q\, C_k^i\, Q^{k-i}\, p^{i+1} = C_{k+1}^i\, Q^{k+1-i}\, p^i$$

Ainsi se trouve démontré par récurrence la loi de Bernoulli. Le Prof. Bühlman a fait remarquer que le prof. Polya avait utilisé la même méthode de récurrence.

d) la méthode se généralise, soit une variable X stationnaire dont on désire calculer numériquement les convolutions. En pratique, X aura un domaine d'arrivée fini que nous supposons être de 0 à R („range").

Dès lors le processus de „filou" suivant

1°) la fortune initiale est nulle

2°) le processus de risque est stationnaire

$$\forall_k\ X_k = X$$

3°) le processus de prime est invariant

$$\forall_k\quad M_k = R$$

Le raisonnement prouve que la „filou'' ne perdra jamais et au stade k, la variable d'état sera toujours la somme.

$$Z_k = X_1 + X_2 \ldots . + X_k$$

et l'algorithme réalise le calcul effectif des convolutions. On pourrait d'ailleurs non seulement vérifier la loi des grands nombres, mais de plus *calculer les probabilités de fluctuations* de Z_k/k *autour de la moyenne* E_x.

Pour k grand la tendance centrale joue. C'est généralement par l'approximation de la loi de Gauss qu'on évalue les chances d'évolution de Z_k/k autour de la moyenne.

Les processus de „filou'' permettent non seulement de constater cette tendance centrale, mais de plus ils nous donnent le moyen pratique d'estimer les possibilités de fluctuations dans le domaine de k petit, et cela quelque soit x.

C'est là un résultat théorique dont l'importance est non négligeable.

D) *Conclusions et résumé*

Partant du problème de la ruine, nous avons été amené à introduire une classe très générale de processus de risque discrets.

Nous avons prouvé que, quel que soit le processus particulier, un et un seul algorithme itératif donne la solution numérique du problème de l'évolution du système aléatoire induit par le processus.

De plus en nuançant le processus de risque et surtout le processus d'encaissement, on englobe dans une seule et même théorie non seulement les problèmes viagers et non viagers, mais également des problèmes non actuariels tels les processus d'usure de la recherche opérationnelle et le problème général des convolutions des variables aléatoires.

La généralité de la méthode, l'économie de pensée qu'elle apporte, son efficience sur le plan numérique, nous fait espérer que dans l'avenir elle appartiendra aux routines normales de l'actuaire et à l'ensemble des programmes des centres de calcul.