

Rapport de M. BRUNO DE FINETTI sur le Sujet I:

*La théorie des plus grandes valeurs et son application
aux problèmes de l'assurance*

I. AVANT-PROPOS

L'intérêt de ce sujet en soi-même, au point de vue des mathématiques, du calcul des probabilités et de la statistique — les différents aspects et questions qui peuvent le relier à des applications dans le domaine des assurances — le fait que des discussions à cet égard ont été commencées l'année dernière à Juan-les-Pins avec l'importante contribution de M. Franckx et favorisées ensuite par les notes introductives de M. Beard si riches en indications et suggestions — toutes ces choses auraient dû conduire, sinon à épuiser le sujet dans le présent colloque — à achever une base de discussion suffisamment complète et variée.

Sans doute, cela aurait été un miracle, et c'est loin d'être étonnant si cela ne s'est pas passé. En effet, c'est bien naturel que les communications à un congrès portent aux sujets en programme des contributions fragmentaires concernant des aspects particuliers choisis par chaque auteur d'après ses intérêts et son point de vue. Et ce fait en soi est fécond en ce qui concerne la pluralité des intérêts et des points de vue: seulement il serait souhaitable d'éviter le caractère partiel et fragmentaire du résultat d'ensemble. Je crois que la voie suivie par ASTIN pourrait amener à ce résultat heureux, et qu'il suffirait à ce but de la perfectionner quelque peu davantage: par exemple, en cherchant à favoriser par des contacts préalables, chaque année pour l'année suivante, la préparation (toujours libre et indépendante) d'un ensemble minimum de contributions suffisant pour le recouvrement d'au moins tous les traits essentiels du sujet. Toute suggestion de ce genre, il est bien entendu plus aisée de l'avancer que de la réaliser; mais, si elle n'est pas totalement utopique (et s'il n'y a pas de raison de craindre qu'elle décourage la présentation d'autres contributions), je pense que

ASTIN, qui se trouve dans la phase de formation d'une tradition et qui n'a besoin que de perfectionner des procédés déjà spontanément adoptés, est dans les conditions les meilleures pour y réussir.

Il semble que le sujet des valeurs extrêmes, considéré par rapport à ses possibilités d'application dans les problèmes concernant l'assurance, est susceptible de donner lieu à des réflexions et à des études suivant diverses directions; de ce fait, il semble souhaitable que l'existence de telles possibilités soit systématiquement explorée en se posant d'un point de vue général. Et je crois qu'ici encore il suffit simplement de rappeler le point de vue qui a été présenté à Juan-les-Pins par M. Borch, et qui a inspiré plusieurs travaux du même auteur: le point de vue qui relie, avec un esprit de synthèse approprié et significatif, l'assurance, avec ses problèmes tant pratiques que techniques et scientifiques, au domaine des théories économiques et de la théorie des décisions. Je ne sais pas si une telle exploration aurait pu amener à découvrir d'autres applications que celles envisagées, mais elle aurait été utile quand même: afin d'éclaircir les situations et acquérir une vision plus riche et plus nette des aspects qui ont de l'intérêt, ce sont toujours utiles tant des réflexions sur des questions dont l'acceptation est hors de discussion, soit des réflexions à conclusion négative, c'est-à-dire aboutissant à abandonner l'idée d'applications que l'on pouvait envisager mais qui ne semblent pas bien posées ou fécondes après une réflexion plus approfondie.

Les situations réelles du champ des assurances qui ont été envisagées par les auteurs des contributions à ce Colloque semblent être les trois suivantes:

— le problème du risque de ruine (ou d'une forte répercussion) pour un assureur (ou pour un complexe d'assureurs-réassureurs) à la suite d'un seul sinistre exceptionnellement élevé (cela semble implicitement l'aspect envisagé là où l'étude de questions mathématiques n'est pas directement reliée à un but particulier, comme dans les travaux de M. Franckx (Juan-les-Pins et ici) et celui de M. Fürst;

— le problème de la forme de réassurance du type "ECOMOR" introduit par M. Thépaut (cela est explicitement mentionné comme un but possible de l'objet du travail de Ammeter);

— le problème d'évaluations tirées de renseignements concernant

seulement le sinistre le plus élevé d'une série de périodes (cela est le problème posé par M. Beard et traité par M. Jung).

Je crois qu'il n'y a pas d'autres travaux présentés comme concernant le „Premier sujet” (bien qu'il n'y avait presque jamais d'indications spécifiant ce point, et bien qu'il n'y avait aucune obligation d'entendre trop rigoureusement les frontières entre les sujets); je pense toutefois utile de mentionner parfois, incidemment, des passages ou des aspects d'autres travaux s'il y a lieu de le faire par rapport à des considérations soulevées par des questions appartenant à notre sujet.

2. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

Peut-être, la tâche qui m'a été confiée pourrait être interprétée d'une façon bien simple, trop simple, en la réduisant à résumer les quelques travaux présentés; le résultat ne serait que de substituer à des exposés remarquables mais par leur nature fragmentaires dans leur ensemble, un résumé injustifiablement fragmentaire et mauvais. Je n'ai pas cependant la présomption d'individualiser et de combler les lacunes en traitant moi-même les sujets et aspects possibles qui n'ont pas été objet d'études présentées ici; tout ce qu'il semble raisonnablement possible et propre c'est de lier entre elles les considérations suggérées par tous les travaux d'après le tissu des idées générales auxquelles il faut les rattacher. Ce ne sera que de cette façon indirecte que l'exigence ou l'utilité d'une vision d'ensemble et l'existence éventuelle de questions pas traitées pourra ressortir.

Comme remarque préliminaire, il semble cependant nécessaire de rappeler l'utilité de placer toute question dans le cadre de la signification qui donne de l'intérêt effectif à la recherche. On peut évidemment se passer de cela (et même parfois on doit, étant donné des limitations de longueur, en temps ou en espace) lorsqu'on peut admettre que telles précisions préalables ont été suffisamment éclaircies par d'autres auteurs et que tout le monde les connaît et est d'accord (bien qu'il faut toujours y revenir de temps à autre, surtout lorsqu'il y a des développements nouveaux qui entraînent des réflexions nouvelles même sur les fondements). En général, ce qui ne semble pas être l'objet de considérations et d'explications suffisamment soignées, c'est le fait que derrière les questions de

détail, formellement mathématiques, on ait des questions réelles qu'il faut résoudre pour des buts réels, et que la formulation choisie soit bien appropriée par rapport à ce but; je voudrais dire „qu'elle soit zweckmässig", car ce mot allemand me semble le seul vraiment „approprié" pour dire „approprié".

Dans les problèmes actuariels (et d'autres disciplines ayant des sujets voisins, comme — par exemple — la recherche opérationnelle) ce caractère d'être approprié, de „Zweckmässigkeit", revient en général à l'un ou à l'autre de ces deux aspects: l'aspect *économique* proprement dit, lorsqu'il s'agit de décisions concernant directement la conduite dans la vie pratique (p. ex., dans notre cas, l'emploi de telle ou telle autre forme de réassurance, le choix de l'import maximal pour les risques des différents types, etc.), et l'aspect *instrumental*, qui est également économique dans le sens indirect de faire le plus sage emploi des informations et des moyens de calcul afin d'obtenir une base aussi adéquate que possible pour les décisions économiques proprement dites. On a à considérer cet aspect lorsqu'il s'agit, par exemple, d'une élaboration de données statistiques (comme, dans notre cas, la recherche des critères et des procédés qui — en tenant compte des renseignements connus et de la possibilité d'en obtenir davantage — nous donnent la façon la plus appropriée de déterminer les valeurs et les fonctions à adopter comme probabilités ou distributions de probabilités, p. ex. probabilité des sinistres et distribution selon montant du sinistre).

3. LES ASPECTS FONDAMENTAUX

Le premier aspect, proprement économique, n'exigerait (à mon avis) que l'application systématique des principes de la théorie des décisions (efficacement systématisée surtout par M. Savage, qui se trouve, presque par hasard, ici), d'après les lignes développées par M. Borch avec égard aux questions actuarielles. Comme M. Borch l'avait rappelé à cette occasion, l'application dans le domaine de l'assurance de ce point de vue (qui remonte à Daniel Bernoulli) a été faite en 1834 par Barrois, dans un mémoire qui a été cité maintes fois mais dont personne, avant Borch, semble avoir remarqué le contenu ou du moins son „actualité" à l'état actuel de la pensée. Ils consistent à associer, à la notion de probabilité qui a toujours été le fondement des théories de l'assurance, la notion de

l'utilité, nécessaire pour dépasser le niveau linéaire (des „jeux équitables”, valable comme première approximation et donc pratiquement pour des engagements limités) et entrer dans les questions où le „poids” du risque joue un rôle sans se voir obligé de recourir pour cela à des expédients. Dans d'autres cas, la théorie des décisions devra céder le pas à la théorie des jeux, qui considère les mêmes questions mais dans l'hypothèse que l'incertitude provient aussi de l'action d'autres individus agissant sous l'impulsion d'intérêts antagonistes.

En prenant ce point de vue comme point de départ, on parvient à faire ressortir le rôle de chaque résultat mathématique en tant que conclusion pratique. Ainsi, la recherche de M. Ammeter, très bien conduite et complète au point de vue mathématique, aurait gagné d'intérêt, à mon avis, si, contrairement à l'habitude générale de borner l'exposé à la question spécifique envisagée, on avait essayé d'analyser de quelle façon les conclusions obtenues sur la diminution du risque par l'élimination du plus grand sinistre pourraient être utilisées afin d'améliorer les possibilités de comparaison des avantages d'un système de réassurance du type ECOMOR envers d'autres alternatives. Au point de vue mathématique, le point particulier des résultats qui me semble surtout intéressant c'est d'avoir donné les moyens pour étudier la dépendance (et comme premier pas la corrélation) entre le montant du sinistre le plus élevé et le total des sinistres celui-là exclus. Il semble qu'il serait intéressant de dégager et d'interpréter ces conclusions, implicitement contenues dans les formules de M. Ammeter (p. ex., la corrélation dans le cas de la distribution de Pareto dans sa formule (15)), afin d'apprendre et discuter de quelle façon cela dépend de la forme de la distribution, du nombre des sinistres ou des risques.

Les autres travaux appartiennent essentiellement au domaine que nous avons appelé „instrumental”, et de ce fait il n'y a pas de motifs directs de les relier à telles questions économiques; l'autre aspect est par contre plus encore pressant, et il faudra en discuter le subdivisant en plusieurs points. Qu'il suffise d'exprimer, comme impression préalable, la sensation remarquable de réalisme associée à une claire vision mathématique des choses qui découle de plusieurs passages du travail de M. Jung. „We cannot get much out of little”; „There are no good solutions (as in most tail problems)

but if we want not too bad results, we must try to registrate all relevant information"; „It is necessary to use all available data and to avoid unnecessary dissipation of the information"; „There is a natural law which states that you can never get more out of a mincing machine than what you have put into it. That is: If the reinsurance people want actuarially sound premiums, they must get a decent information about the claims distribution”.

M. Jung dit qu'il donne la comparaison de la machine à hacher parce que, comme la plupart des auteurs, il aime citer soi-même; eh bien, afin de prouver combien je suis d'accord avec lui, je veux moi aussi rappeler que j'avais écrit la même chose avec à peu près les mêmes mots il y a plus de 30 ans (dans des leçons cyclostylées et dès longtemps épuisées): „Une meule, si perfectionnée qu'elle soit, ne peut produire de la farine s'il n'y a pas du blé”.

On pourrait en effet synthétiser les règles de la sagesse dans ces champs, c'est-à-dire les règles du comportement raisonnable et averti dans l'utilisation des possibilités d'information, en disant que des informations acquises l'on ne peut pas tirer plus que ce qu'elles contiennent et l'on ne doit pas en gaspiller une partie que ce soit; des informations accessibles il faut en acheter tant que le coût ne dépasse l'avantage qu'elles apportent dans la situation concrète à viser. De cette façon, l'aspect „instrumental” devient lui aussi, et pas trop indirectement, économique.

Qu'il suffise de rappeler la notion de „valeur d'une information” (devant une situation de choix donnée) et les applications particulièrement concrètes qu'en ont été faites par M. Grayson aux problèmes concernant la recherche de gisements de pétrole ¹⁾.

La théorie qui prétend exprimer le critère répondant de façon adéquate à ces exigences, est la théorie bayésienne (ou, si l'on préfère, néo-bayésienne); elle est encore controversée, comme c'est bien connu, et je ne veux répéter ici les raisons pour lesquelles j'en suis convaincu. En tout cas, si on accepte ce point de vue, il résulte que les critères d'autre genre, dits „objectivistes”, basés sur des prétextes variés, visent tour à tour à supprimer de l'information ou à en tirer des proliférations qui ne sauraient sans miracle ajouter

¹⁾ Voir: C. J. Grayson, *Decisions under Uncertainty: Drilling Decisions by Oil and Gas Operators*, Harvard Un., Boston, 1960.

quoi que ce soit à ce que l'on pouvait dire sans elles. C'est ainsi que lorsqu'on ne connaît que le montant du sinistre le plus élevé, on pense pouvoir gagner de l'information en faisant recours à des estimations des montants d'autres sinistres basées sur le seul connu : il est clair que, si l'on tient compte correctement de l'incertitude de l'évaluation, les conclusions ne sont pas plus précisées qu'en se passant des nouveaux montants, tandis que si l'on traite ceux-ci comme s'ils étaient des valeurs observées et non calculées la précision que l'on gagne n'est due qu'à une erreur. Et cela ne pourrait être utile que si l'erreur n'est pas trop grande et les calculs plus simples que par la voie exacte. M. Jung semble avoir clairement vu la nature de la question, pas seulement par les phrases citées, mais encore par des remarques bien à propos (comme l'explication d'un „astonishing result” par la nature élastique des relations asymptotiques).

Les exigences mentionnées impliquent en particulier que l'on admette le „Likelihood Principle”, c'est-à-dire, que la „Likelihood” est un „résumé exhaustif” des observations, contient tout ce qu'on peut en tirer. Le propre de la théorie bayésienne consiste à ajouter que le rôle de la Likelihood est de transformer la distribution initiale dans la distribution finale (comme multiplicateur pour les probabilités ou les densités). Un travail inspiré à ce point de vue est celui de M. Fürst, visant à déterminer la queue de la distribution d'après la connaissance des sinistres supérieurs à une limite donnée.

4. LES ÉLÉMENTS POUR LES APPLICATIONS

Bien entendu, le choix d'un critère n'est qu'un aspect préalable pour la façon de poser les questions ; toute application concrète d'un critère exige évidemment de préciser tous les éléments qu'il faut considérer et introduire afin que le problème soit bien posé et déterminé. Il faut préciser la situation des connaissances ou hypothèses initiales, ce qui reviendra, dans notre cas, à donner des indications :

- sur le nombre de sinistres (connu ou aléatoire, et dans ce cas considéré directement ou en le reliant à un processus où l'on peut faire référence au nombre, lui-même connu ou aléatoire et en particulier donné par un processus, des risques en cours, ou s'en passer),
- sur la distribution des montants des sinistres (formule com-

plètement précisée, ou avec, par exemple, des paramètres modifiables d'après l'expérience, et, dans ce cas, du moins si l'on vise à appliquer pleinement le critère bayésien, une distribution de probabilité initiale pour les paramètres),

— sur l'interdépendance éventuelle que l'on suppose entre les sinistres et entre leurs montants.

Et il faudra préciser davantage, si le problème est posé de façon à permettre le „learning from experience”, c'est-à-dire de modifier quelque part du modèle au fur et à mesure que l'on parvient à connaître des données nouvelles, quelles sont ces données dont l'on suppose pouvoir disposer (p. ex., chaque année pour l'année passée, l'entière distribution des sinistres avec ou sans détails par catégorie ou pays, etc., ou seulement le nombre des sinistres, le montant global, le montant maximum, ou d'autres renseignements partiels analogues).

Cela étant supposé donné, l'application du critère bayésien est univoque et directe (des déviations pouvant seulement être admises comme simplifications, le cas échéant). Si par contre on veut appliquer des critères différents, il y aura des questions propres à chaque méthode et à ses exigences. Étant donné que nous n'aurons des raisons pour revenir sur ce sujet, on peut se limiter à remarquer tout de suite ici comment les inconvénients bien connus de l'emploi des moments deviennent particulièrement graves dans le cas des valeurs extrêmes, si fortement liées à la forme de la queue de la distribution. Cela est particulièrement clair dans le cas de la distribution de Pareto, considérée comme exemple par Ammeter, dont les moments finis ne sont — comme il est bien connu — qu'un nombre limité (dépendant du paramètre): même l'écart standard peut être infini. Cela (en faisant abstraction de ce dernier cas) ne porte pas des conséquences sensibles pour le problème d'Ammeter qui concerne le total des sinistres à l'exclusion du sinistre le plus grand, bien que la considération de l'écart standard pour ce plus grand sinistre paraît peu appropriée en raison de la sensibilité à des hypothèses quelque peu fictives sur l'allure asymptotique de la queue. Ces remarques n'impliquent pas une aversion contre l'emploi des moments de second ordre dans les questions sur le risque, dans tous les cas où les dites circonstances ne jouent pas trop fortement: au contraire, c'est bien raisonnable, à mon avis, d'essayer de se

borner, autant que cela est possible et pas dangereux, à l'emploi de ces instruments simples qui semblent injustifiablement dédaignés depuis l'apparition d'instruments sans doute plus riches mais pas partout indispensables. C'est avec plaisir que j'ai trouvé ce point de vue soutenu par M. Bühlmann, dans une contribution qui ne concerne pas expressément le „Premier Sujet”, mais qu'il faudra mentionner à la suite de plusieurs points de contact avec des questions à discuter. Pour le moment, je veux signaler comme digne d'être appréciée, méditée et suivie l'attitude qu'il exprime par ces mots: „there remains an uneasy feeling about artificial assumptions, which are just made for mathematical convenience but are not necessarily related to the practical problems to which the theory of risk is applied”. On dira peut être, et pas sans raison, qu'il y a une contradiction entre la tendance envers une „distribution-free method” et la position bayésienne; le point de raisonnable accord réside dans le domaine pratique: le choix de la distribution est un élément fondamental pour le critère bayésien, et très délicat, qui ne peut être abandonné à l'arbitraire de la „convenance mathématique” sinon entre les limites découlant d'une analyse intrinsèque des questions envisagées. Une description et discussion des précautions pratiques pour ce choix dans des situations réelles se trouve p. ex. dans Schlaifer ¹⁾. Une méthode „distribution-free” n'est pas compatible en principe avec cela, mais cela n'empêche de l'utiliser si elle évite de faire dépendre les conclusions de particularités de la distribution qui pourraient être introduites sans que l'on se rende compte de leur portée, et si on peut s'assurer qu'elle conduit à des conclusions suffisamment approchées à celles exactes par rapport à une classe de distributions suffisamment large pour juger raisonnablement qu'il n'est pas nécessaire de se soucier des cas qui n'y rentrent pas.

Mais il y a une raison plus importante, et de tout autre nature,

¹⁾ R. Schlaifer, *Probability and Statistics for Business Decisions*, Mc Graw-Hill, N.Y. 1959, v. aussi R. Schlaifer e H. Raiffa, *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard Un. Press, Boston 1961. Pour des aspects plus généraux et théoriques du même sujet, voir B. de Finetti et L. J. Savage: „Sul modo di scegliere le probabilità iniziali” (pp. 81-147, più “English summary” pp. 148-151) in *Sui fondamenti della statistica* (Vol. I della collana “Biblioteca del “Mentron” S.C.”, Ist. Statistica d. Facoltà Sc. Stat. Attuar., Università Roma, 1962).

qui justifie l'emploi des variances dans plusieurs problèmes de ce genre: lorsqu'il s'agit de traiter d'*utilités espérées*, dans les limites entre lesquelles la deuxième approximation est valable (utilité = $x - kx^2$, x = gain à l'échelle monétaire), l'utilité espérée d'un gain aléatoire (en particulier, d'opérations d'assurance) est donnée par son espérance mathématique diminuée d'un terme proportionnel à la variance. Et cela nous amène à souligner de nouveau l'opportunité de ne jamais perdre de vue les liaisons avec les aspects économiques.

5. LE NOMBRE DES SINISTRES

La première des circonstances énumérées pose la question du choix du point de départ. Qu'est-ce que nous supposons donné, ou ce dont nous pensons évaluer directement les probabilités? Dans cette occasion, le choix semble avoir porté toujours sur le nombre des sinistres, dont on tire la distribution de probabilité d'hypothèses sur le processus qui les produit (dans le cas plus simple: distribution poissonnienne). Cela est en accord avec la façon de voir de la théorie collective du risque, mais ce n'est pas la seule voie d'aborder la question. Ou pourrait bien partir de plus loin, de la connaissance des risques assurés, comme le fait Bühlmann (dans ses considérations qui ne concernent pas directement notre sujet — comme on a déjà dit — mais s'y rattachent). Comme base, ce procédé est même une base plus adéquate, comportant plus d'information (si elle est accessible), bien que son utilité soit limitée n'allant au delà de l'évaluation des sinistres séparément, sans aider dans le problème des cumuls, particulièrement important pour la réassurance. En dehors de cela, il n'y aurait rien à changer dans les formulations basées sur les „sinistres” en y remplaçant sinistres par „risques” traités comme „sinistres admettant zéro comme valeur possible”.

Une question qui se pose en tout cas est celle qui consiste à se demander de quels sinistres, ou de quels risques, on doit prendre note. Dans le problème qui nous occupe, des sinistres très élevés, ce n'est pas trop à propos de prendre comme référence le nombre global des sinistres (ou des risques), y compris ceux qui ne sauraient en aucun cas, par l'objet même de l'assurance, atteindre des valeurs élevées. Sans doute, il suffit formellement de compenser ce fait par

la correspondante altération de la distribution des sinistres, comme cela a lieu automatiquement et exactement dans une situation stationnaire. Mais si l'on cherche à connaître ou prévoir les variations du portefeuille ou du nombre des sinistres à attendre, il ne vaut que bien peu de se borner à des chiffres globaux si la composition peut changer. Une réponse complète est sans doute celle de M. Franckx (et d'autres) qui consiste à envisager la possibilité de subdiviser les risques (et donc les sinistres) dans un nombre quelconque (peut-être même dans une infinité dénombrable) de classes de risques „homogènes". Mais la question pratiquement essentielle consisterait à discuter jusqu'à quel point et d'après quels critères il est possible et avantageux de pousser telle subdivision. Quelques considérations à ce sujet se trouvent dans Bühlmann mais à un niveau un peu abstrait. En général, il me semble que ces aspects sont considérés, peut-être, comme trop modestes pour mériter une attention réelle de la part des mathématiciens, tandis que l'intérêt de leur discussion semble ne pas être simplement pratique mais important au point de vue conceptuel.

Une position à part a, à cet égard, le travail de M. Fürst, qui considère un problème où il ne fait intervenir que les sinistres au delà d'une limite donnée, qu'il suppose pouvoir connaître directement. Evidemment, les mêmes problèmes qu'auparavant se poseraient même pour lui (ou pour quelqu'un qui voudrait utiliser son procédé) lorsqu'il voudrait les utiliser dans l'avenir en tenant compte des tendances à varier dans le nombre des risques assurés (ou des sinistres à attendre) et de leurs montants.

6. LA DISTRIBUTION DES SINISTRES

On peut introduire une distribution ou plusieurs, cela si l'on adopte un classement des risques (et donc des sinistres) d'après ce qui a été dit tout à l'heure et qu'il ne faut pas répéter.

Mais il y a quand même des aspects liés à tout cela dont il faut parler. Je pense qu'il vaut mieux, jusqu'au moment éventuel où l'on trouverait qu'une certaine distribution est tout à fait satisfaisante à tout point de vue (et je ne crois pas à ce miracle), de considérer séparément le problème d'une distribution adéquate pour des buts différents. Les travaux de Delaporte (dont fait mention Delaporte) et de Benktander et Segerdahl (dont fait mention

Ammeter) proposent des distributions des Types de Pearson et respectivement de Pareto; dans notre sujet M. Ammeter considère de ce fait la distribution de Pareto, tandis que M. Jung et M. Fürst (d'après une suggestion qui semble indirectement suggérée par les notes de M. Beard) adoptent la distribution exponentielle. Il peut bien se donner que toute forme de distribution soit satisfaisante pour des buts différents, c'est-à-dire, donne une bonne approximation dans des segments différents de la distribution. A certains effets c'est important de connaître bien le nombre des petits sinistres, en d'autres cas ce qui importe c'est une adaptation en moyenne, ici ce sont les sinistres de l'intervalle des plus grands sinistres que l'on peut réellement s'attendre (ce qui n'est pas la même chose que l'allure asymptotique, laquelle, mathématiquement, est définie seulement par le prolongement arbitraire de la queue dans la région des sinistres qui dépasseraient des millions de millions de fois tout montant que l'on sache nommer (serait-ce la valeur d'une masse d'or grande comme la voie lactée?). A ce compte, la forme de la distribution ne devrait pas compter grand'chose si l'on en fait un usage direct sans s'appuyer, sciemment ou inscivement, sur des propriétés qui en utilisent l'allure, non seulement dans l'intervalle qui importe, mais dans les régions fictives de son prolongement vers l'infini.

A ce compte, la voie très simple suivie par M. Fürst semble la moins dangereuse, étant donné que la distribution au-dessous du niveau qui intéresse ici est ignorée et que l'on n'utilise que les Likelihoods dans les points des sinistres observés. Il faudrait peut-être examiner davantage combien le choix d'une allure exponentielle a toutefois de l'influence sur les conclusions, et insérer plus directement dans le schéma l'évaluation de la probabilité au point initial.

Pour ce qui a trait à la distribution de probabilité pour les paramètres, qui intervient dans l'application de ces schémas pour la détermination de la distribution, il faut remarquer un autre cas du même type que celui de Barrois signalé l'année dernière à Juanles-Pins par M. Borch (et mentionné tout à l'heure). Dans le travail de Arthur L. Bailey, „Credibility Procedures”, de 1950 (Casualty Actuarial Society, 37) concernant „Laplace's generalization of Bayes'rule and the combination of collateral knowledge

with observed data”, on trouve des problèmes actuariels de cette nature posés et traités d’une façon qui semble correspondre exactement aux critères neo-bayesiens (y inclus le choix des distributions “conjuguées” dans la terminologie de Raiffa-Schlaifer ¹): Beta pour le cas de Bernoulli, Gamma pour le cas de Poisson). J’ai dit „semble”, et cette forme dubitative est justifiée par le fait que je n’ai pu voir que peu de temps la dite note (à l’occasion de la visite à Rome de M. Allen L. Mayerson, qui y a tenu à l’Inst. des Actuaires une conférence sur la „Credibility Theory”), et que le langage est quelque peu différent de celui qui s’est développé ensuite. Une raison ultérieure de perplexité c’est le fait que personne ne semble avoir remarqué jusqu’ici cet exploit, mais ça n’est pas trop étonnant étant donné qu’il y a peu d’entente entre les mondes des actuaires, des statisticiens, des probabilistes, pris dans leur ensemble, bien qu’il y ait des remarquables éléments de contact, comme des points singuliers, dont le prototype est M. Cramér (et, antérieurement, M. Cantelli). Il faut ajouter — à mon avis c’est un grand mérite — que des actuaires comme Bailey (et des ingénieurs comme Fry et Molina), avec le réalisme du monde vivant parmi les applications effectives, n’avaient jamais cessé d’être bayesiens lorsque la vogue objectiviste dominait presque incontestée dans la statistique.

7. LES HYPOTHÈSES D’INTERDÉPENDANCE

Ce dernier point, la troisième des circonstances énumérées au début du n. 4, est sans doute le plus difficile à éclaircir car il est presque impossible d’éviter de sous-entendre quelques hypothèses ou d’oublier quelques détails nécessaires pour les préciser et illustrer dans leur portée pratique. M. Bühlmann dit avec raison à ce propos que „The independence hypothesis is so common to be made that many authors forget to mention it”. M. Bühlmann, qui a contribué remarquablement au développement de la théorie des éléments aléatoires échangeables (par son ouvrage *Austauschbare stochastische Variablen und ihre Grenzwertsätze*, Univ. Cal. Publ. Statist., 1, 1960), introduit ici l’hypothèse plus faible de l’échangeabilité. Cela conduit à des développements semblables à ceux de M. Franckx (The Astin Bull., II, 3, pp. 416-417), si je devine correctement le

¹) Voir note (o).

terme (pour moi nouveau) de „indépendance à posteriori” (comme „indépendance conditionnellement aux événements E_i ”).

Peut-être les conditions que pose M. Bühlmann sont quelque peu plus faibles, mais ce n'est pas une analyse des différences éventuelles que je crois utile à ce moment, où il semble plus convenable d'envisager des questions plus génériques. Et je voudrais notamment exprimer mon avis sur l'opportunité qu'il y aurait eu, peut-être, à élargir davantage les conditions: précisément, si on abandonne l'hypothèse si restrictive de l'indépendance (et si équivoque, étant donné qu'il est si facile de la considérer sous-entendue), il me semble plus naturel d'arriver à l'échangeabilité proprement dite, directement, et non à un niveau intermédiaire, où l'élargissement des hypothèses s'applique séparément aux probabilités et aux distributions. Sans doute, il s'agit somme toute d'une question de goût, sur laquelle l'antique proverbe dit qu'il n'y a pas lieu de discuter. Mais il y a aussi un aspect psychologique: j'avoue qu'avant de réfléchir attentivement sur les formules et d'analyser quelque peu les énoncés, j'avais cru que l'on avait considéré le cas de l'échangeabilité, et seulement plus tard j'ai aperçu que les définitions étaient beaucoup plus restrictives. Peut-être j'ai été conduit à me tromper car je trouvais plus naturel les hypothèses plus larges, mais peut-être d'autres personnes aussi peuvent être induites à penser que l'élargissement présenté est moins limité de ce qui se passe en réalité.

Il vaut mieux éviter d'expliquer des différences entre énoncés de définitions ou d'hypothèses, et éclaircir la différence en donnant un exemple qui rentre dans la formulation plus large qui serait à mon avis plus naturelle mais qui ne rentre pas dans les schémas dont il est question. Il s'agit de l'exemple que l'on peut imaginer ou construire de la façon suivante. Il y a un paramètre inconnu (d'après la formulation bayésienne, un nombre aléatoire; mais il n'y a pas lieu d'insister sur cette question); soit θ (et supposons $1/4 \leq \theta \leq 1/2$). La probabilité de sinistre, pour chaque risque soit $p = \theta$, c'est-à-dire la même pour tous les risques d'une même période et dépendant de la valeur de ce paramètre (qui pourrait indiquer une circonstance extérieure influençant sur tous les risques, peut-être la température ou d'autres facteurs météorologiques); supposons encore que, conditionnellement à la déter-

mination de θ , les événements sont indépendants. Le montant de chaque sinistre dépend d'une distribution exponentielle (ou n'importe quelle autre; le choix n'est utile qu'afin de fixer les idées), dont la valeur moyenne v dépend elle aussi de θ , soit $v = C/\theta$ ($C =$ constante donnée).

On peut présenter la même chose sous un aspect plus direct et intuitif. Si l'on admet que l'arrivée des sinistres peut ne pas dépendre du schéma usuel de l'indépendance, il semble bien „naturel” (et je ne prétends exprimer par ce mot qu'une impression personnelle) d'admettre que cela peut se manifester de façon différente pour les „petits sinistres” et pour les „grands sinistres” (et plus en général pour les sinistres de différent montant). L'hypothèse contraire, que tout changement ne peut que se produire dans la même mesure pour les sinistres de n'importe quelle importance (qu'elle semble plus ou moins naturelle), me semble susceptible d'échapper au lecteur si l'on ne la fait suffisamment ressortir et si on n'insiste quelque peu à expliquer les raisons qui conduisent à l'adopter.

Naturellement, le fait que p est supposé croissant et les sinistres en moyenne décroissants avec θ n'a rien d'essentiel (on pourrait les supposer croissants tous les deux, ou faire changer la forme de la distribution, etc.); le choix est fait pour montrer, avec cet exemple, qu'il n'y pas raison de rejeter comme „certainly unreasonable” une estimation qui montre l'existence d'une corrélation négative entre la fréquence des sinistres et leur montant moyen, tandis que l'analyse séparée des composantes traitées comme indépendantes (par hypothèse) l'élimine. En réalité, ce qu'il faut souligner c'est qu'il n'y a pas des procédés ou des résultats qui soient „raisonnables” ou „déraisonnables” en soi, mais que tout procédé présuppose des prémisses, c'est-à-dire des évaluations de probabilités initiales, par rapport auxquelles les conclusions (quelles qu'elles soient, si elles découlent des données réellement observées) sont irréfutables (mais n'ont aucune valeur pour quelqu'un qui n'accepterait pas telles prémisses).

On peut remarquer encore (pour mettre mieux en rapport cet exemple avec la façon de présenter les choses dans les travaux de M. Franckx et de M. Bühlmann) que notre hypothèse correspond à peu près à supposer que la distribution des montants peut dépendre

de la fréquence des sinistres (et cela est en fait exclu, mais, si quelque chose ne m'a échappé, sans l'énoncer explicitement). Toutefois, le paramètre et la fréquence ne sont pas la même chose, et l'indépendance conditionnée à l'une est incompatible avec celle à l'autre (qui peut au plus être valable de façon approchée).

Il serait souhaitable — il semble — que de toute hypothèse et condition on ne se borne pas à donner l'énoncé mathématique mais prenne le soin d'expliquer la vraie nature. Cela revient maintes fois à souligner que — contrairement à ce qu'on laisse croire d'habitude — ces conditions n'ont pas une signification par rapport aux phénomènes et au monde réel où ils se déroulent, mais ont trait par contre à l'état de nos connaissances, à l'information dont on dispose, à l'incertitude due à la limitation de nos connaissances et informations. Qu'il suffise de remarquer par exemple que des événements quelconques sont toujours échangeables pourvu que nous soyons dépourvus de tout moyen de les individualiser et connaître. Si je ne peux connaître des assurés-vie que par leur numéro de police, et je ne dispose d'aucun indice pour des suppositions variées concernant l'âge ou l'état de santé etc. d'après ce numéro de police, la probabilité de décès est pour tous la moyenne du portefeuille.

Et l'on pourrait continuer longuement, en ajoutant sans cesse des nouveaux exemples pour des considérations semblables. Mai j'ai déjà dépassé peut-être les limites que j'avais posées à ma tâche d'aujourd'hui, et sans doute les limites de votre supportation. Veuillez m'en excuser, et permettez-moi de vous remercier de votre attention, et de remercier, aussi de la part de vous tous, les auteurs des travaux qui font l'objet de la discussion que j'ai eu l'honneur d'ouvrir.