

ÜBER GEWISSE RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN MIT POSITIVER KRÜMMUNG

Professor Minoru Kurita zum 60. Geburtstag gewidmet

YÔTARO TSUKAMOTO*

Es ist wichtig und interessant, die Beziehungen zwischen Krümmung, Volumen, Geodätischen und topologischen Strukturen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung zu untersuchen.

Die folgende Sätze sind wohlbekannt.

SATZ A (*Heim* [4]). *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ mit Riemannscher Krümmung $K \geq 1$ und $\text{vol } M \geq \frac{1}{2} \text{vol } S^n$, wobei S^n eine Sphäre mit konstanter Krümmung 1 ist und $\text{vol } M$ das Volumen von M ist. Dann sind alle periodischen Geodätischen nicht kürzer als π .*

SATZ B (*Nagayoshi und Tsukamoto* [5]). *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ mit Riemannscher Krümmung $K \geq 1$ und $\text{vol } M \geq \frac{1}{2} \text{vol } S^n$. Dann ist M eine Homotopiesphäre oder isometrisch zum reellen projektiven Raum mit konstanter Krümmung 1.*

Hier beweisen wir den folgenden Satz.

SATZ. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$ mit Riemannscher Krümmung $K \geq 1$ und $\text{vol } M \geq \frac{1}{2} \text{vol } S^n$. Ferner gebe es eine periodische Geodätische minimaler Bogenlänge π . Dann ist M isometrisch zum reellen projektiven Raum mit konstanter Krümmung 1.*

1. Vorbereitungen

(a) **Volumen** (vgl. Berger-Gauduchon-Mazet [2]). Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, g die Riemannsche Metrik von

Received October 3, 1972.

* Von Sonderforschungsbereich "Theoretische Mathematik der Universität Bonn" unterstützt.

M und v_g das Volumenelement von M . Für $m \in M$ hat man das Volumelement v_m vom Tangentialraum M_m an m in M . Es sei \exp_m die Exponentialabbildung von M_m in M und U_m die maximale offene Umgebung um 0 von M_m , die \exp_m diffeomorph auf ihr Bild abbildet. Die Umgebung U_m heisst die injektive Umgebung von m . Für jeden Punkt $x \in U_m$ sei $\theta(x)$ die Jacobische Determinante von \exp_x . Dann haben wir

$$(1) \quad \text{vol } M = \int_{U_m} \theta \cdot v_m .$$

Wir verwenden Jacobifelder, um Volumen zu berechnen. Es sei $U_\varepsilon(m)$ eine normale Umgebung vom Radius $\varepsilon > 0$ um m in M . Für $0 < r < \varepsilon$ und Einheitsvektor u auf $U_\varepsilon(m)$ geben wir den Ausdruck von $\theta(ru)$. Es sei c_u die Geodätische von m mit der Anfangsrichtung u . Es sei $\{y_2, \dots, y_n\}$ eine orthonormale Basis vom orthogonalen Komplement u^\perp von u . Es sei $Y_i(s), i = 2, \dots, n$, Jacobifelder längs der Geodätischen c_u , so dass $Y_i(0) = 0$ und $Y'_i(0) = y_i/r$, wobei Y' die kovariante Ableitung von Y_i in der Richtung \dot{c}_u ist. Dann haben wir

$$(2) \quad \theta(ru) = \det (\langle Y_i(r), Y_j(r) \rangle)^{1/2}, \quad i, j = 2, \dots, n,$$

wobei \langle, \rangle das innere Produkt von M ist.

(b) Die Vergleichssätze von Rauch und Toponogov (vgl. Gromoll-Klingenberg-Meyer [3]).

Für $m \in M$ bezeichne man mit G_m die Menge aller 2-dimensionalen linearen Teilräume von M_m und $G_M := \bigcup_{m \in M} G_m$; $c: [0, l] \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve. Für $t \in [0, l]$ bezeichne man mit $G_{c,t}$ die Menge aller 2-dimensionalen linearen Teilräume $\sigma \subset M_{c(t)}$ mit dem Tangentenvektor $\dot{c}(t) \in \sigma$ und $G_c := \bigcup_{t \in [0, l]} G_{c,t}$. Man kann jeder Ebene $\sigma \in G_M$ die Riemannsche Krümmung $K_\sigma = K(u, v)$ zuordnen, indem man linear unabhängige Vektoren $u, v \in \sigma$ wählt.

VERGLEICHSSATZ VON RAUCH. *Es sei S^n eine n -dimensionale Sphäre mit konstanter Krümmung 1, M eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ($n \geq 2$); $c: [0, l] \rightarrow M, \bar{c}: [0, l] \rightarrow S^n$ normale Geodätische, Y, \tilde{Y} Jacobifelder längs c, \bar{c} mit $Y(0) = 0, \tilde{Y}(0) = 0$ und $\langle Y', \dot{c} \rangle(0) = \langle \tilde{Y}', \dot{\bar{c}} \rangle(0) = 0$ sowie $\|Y'(0)\| = \|\tilde{Y}'(0)\|$. c habe keine konjugierten Punkte in $(0, l)$. Ist dann die Krümmung von M längs c nicht kleiner als 1, d. h. $K_\sigma \geq 1$ für alle $\sigma \in G_{c(t)}$ und alle $t \in [0, l]$, so gilt $\|Y(t)\| \leq \|\tilde{Y}(t)\|, t \in [0, l]$.*

Haben wir $\|Y(t_0)\| = \|\tilde{Y}(t_0)\| \neq 0$ für $t_0 \in [0, l]$, so gilt $K(Y(t), \dot{c}(t)) = 1$ für alle $t \in [0, t_0]$.

VERGLEICHSSATZ VON TOPONOGOV. *Es sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n ($n \geq 2$), und $K_\sigma \geq k > 0$ für alle $\sigma \in G_M$. Es sei pqr ein geodätisches Dreieck auf M und $\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}$ ein geodätisches Dreieck auf $S^n(k)$ mit $d(\tilde{p}, \tilde{q}) = d(p, q)$, $d(\tilde{p}, \tilde{r}) = d(p, r)$ und dem Winkel $\sphericalangle \tilde{p} = \sphericalangle p$. Dann ist $d(q, r) \leq d(\tilde{q}, \tilde{r})$, (wobei $S^n(k)$ eine n -dimensionale Sphäre mit konstanter Krümmung k ist und d die Abstandsfunktion ist).*

2. Beweis von Satz

Es sei c eine periodische Geodätische minimaler Bogenlänge π . Es sei m ein Punkt von c . Es sei n ein beliebiger Punkt von M und r ein nächster Punkt auf c von n . Dann haben wir $d(n, r) \leq \pi/2$ (vgl. Berger [1]), und eine minimale Geodätische von n nach r ist orthogonal zu c in r . Wenn wir den Vergleichssatz von Toponogov verwenden und mit dem gleichen Argument wie im Beweis des Satzes von Berger ([5]) diskutieren, haben wir $d(m, n) \leq \pi/2$. Es sei U_m die injektive Umgebung von m . Dann liegt U_m im offenen Ball um 0 in M mit Radius $\pi/2$. Nach (1), (2), dem Vergleichssatz von Rauch und einer Eigenschaft von Grammscher Determinante haben wir

$$\text{vol } M \leq \frac{1}{2} \text{vol } S^n .$$

Daher haben wir $\text{vol } M = \frac{1}{2} \text{vol } S^n$. Nach (1), (2) und dem Vergleichssatz von Rauch stimmt U_m mit dem offenen Ball vom Radius $\pi/2$ um 0 in M_m überein und die Menge $\exp_m(U_m)$ ist isometrisch zur Hemisphäre von S^n . So ist M ein Raum mit konstanter Krümmung 1. Deshalb ist M isometrisch zu einem reellen projektiven Raum mit konstanter Krümmung 1, weil $\text{vol } M = \frac{1}{2} \text{vol } S^n$ ist.

LITERATUR

- [1] M. Berger: Les variétés riemanniennes à courbure positive, Bull., Soc., Belgique. **10**, 89–104 (1958).
- [2] M. Berger, P. Gauduchon und E. Mazet: Le spectre d'une variété riemanniennes, Springer-Verlag. Lecture notes **194**, 1971.
- [3] D. Gromoll, W. Klingenberg und W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Grossen, Springer-Verlag. Lecture notes **55**, 1968.
- [4] C. Heim: Une borne pour la longueur des géodésiques périodiques d'une variété riemanniennes compacte, These. Université Paris. 1971.

- [5] T. Nagayoshi and Y. Tsukamoto: On positively curved Riemannian manifolds with bounded volume, *Tohoku Math. J.*, **25**, 213–218 (1973).

*Mathematisches Institut
Universität Kyushu*