Canad. Math. Bull. Vol. **31** (2), 1988

CONTINUITÉ DES CARACTÈRES DANS LES ALGÈBRES DE FRÉCHET À BASES

PAR

M. AKKAR, M. EL AZHARI ET M. OUDADESS

ABSTRACT. In [1] and [2] T. Husain and J. Liang show the following results: R1. Every character on a Fréchet algebra with a Schauder basis $(x_i)_{i \geqq 1}$ such that: (1) $x_i x_j = x_j x_i = x_j$ if $i \leqq j$, (2) $P_i(x_i) \neq 0$ and $P_i(x_{i+1}) = 0$ (where $(P_i)_{i \geqq 1}$ is a denumerable family of semi-norms defining the topology of the algebra) is continuous. R2. Every character on a Fréchet algebra with orthogonal and unconditional Schauder basis is continuous. The proofs of these last results are very long and introduce complex calculation without aid of spectral theory of locally m-convex algebras. We give here short proofs of these results with aid of a characterization of elements of the spectrum in locally m-convex algebras with values of characters.

1. **Introduction.** Nous améliorons le résultat de [2] et simplifions les démonstrations en utilisant le fait que dans une algèbre A, localement multiplicativement convexe commutative complète, pour tout x de A, λ est dans le spectre de x s'il existe un caractère continu F tel que λ est l'image de x par F (cf [3]).

Nous montrons que les algèbres considerées dans [2] sont semi-simples et que l'ensemble des caractères de telles algèbres est équipotent à N. Par ailleurs nous donnons des démonstrations simples des résultats de [1] en utilisant le fait déjà cité.

2. **Préliminaires.** Soit A une algèbre, A est dite une algèbre localement multiplicativement convexe (en abrégé a.l.m.c.) si A est munie d'une topologie définie par une famille $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de seminormes d'espace vectoriel vérifiant en outre $p_\lambda(xy) \leqq p_\lambda(x)p_\lambda(y)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tous x, y de A.

Une a.l.m.c. complète métrisable est dite une algèbre de Fréchet. On note $M^*(A)$ l'ensemble des caractères algébriques non nuls de A, $M(A)$ désigne l'ensemble des caractères continus non nuls de A.

Soit E un espace vectoriel topologique (en abrégé e.v.t.), E est dit à base s'il existe une suite $(x_i)_{i \geqq 1}$ d'éléments de E telle que pour tout x de E il existe

---

Reçu par la rédaction le 26 mai 1986, et, sous une forme révisée, le 8 juillet 1987.

AMS Subject Classification (1980): 46H15.

une suite unique $(\alpha_i)_{i \geqq 1}$ d'éléments de $\mathbf{C}$ tel que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$

$(x_i)_{i \geqq 1}$ est dite une base de Schauder si pour tout $i \geqq 1$ l'application linéaire $\alpha_i(\alpha_i(x) = \alpha_i)$ est continue, on sait d'après ([4], p. 49) que toute base d'un espace de Fréchet (espace localement convexe métrisable complet) est une base de Schauder.

$(x_i)_{i \geqq 1}$ est dite orthogonale si $x_i x_j = 0$ pour tous i, j tels que $i \neq j$.

3. **Algèbres à bases.**

PROPOSITION 3.1. *Soit A une* a.l.m.c. *commutative complète à base $(x_i)_{i \geqq 1}$ verifiant* (1) $x_i x_j = x_j$ $i \leqq j$. *Alors pour tout $n \geqq 2$* sp $x_n = \{0, 1\}$ *et pour tout $n \geqq 1$* $\mathrm{sp}(x_n - x_{n+1}) = \{0, 1\}$.

PREUVE. Remarquons d'abord que A est unitaire d'unité x_1. Pour tout $n \geqq 2$, $x_n^2 = x_n$ d'où $\mathrm{Sp}\, x_n \subset \{0, 1\}$. x_n est non inversible d'après (1), $0 \in \mathrm{Sp}\, x_n$. Il reste à prouver que $1 \in \mathrm{Sp}\, x_n$. Supposons le contraire; il existe $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ tel que $(x_1 - x_n) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = x_1$. En faisant un calcul simple on obtient $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i - (\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i) x_n = x_1$. Si $n = 2$ on aura $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_1 = 0$ ce qui est absurde; si $n \geqq 3$ on aura $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_i = 0$ pour $2 \leqq i \leqq n - 1$ et $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = 0$, ce qui est absurde.

Si $n \geqq 1$ on vérifie facilement que $x_n - x_{n+1}$ n'est pas inversible; ainsi $0 \in \mathrm{Sp}(x_n - x_{n+1})$. Si $n = 1$ on a $x_1 - (x_1 - x_2) = x_2$, d'où $1 \in \mathrm{Sp}(x_1 - x_2)$. Supposons que $1 \notin \mathrm{Sp}(x_n - x_{n+1})$ pour tout $n \geqq 2$; il existe $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ tel que $(x_n - x_{n+1} - x_1)y = x_1$, en developpant le premier membre de cette égalité on obtient

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i = x_1 \text{ avec } \beta_i = -\alpha_i \text{ pour } i \notin \{n, n + 1\}$$

$$\beta_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$$

$$\beta_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i.$$

Comme $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i = x_1$, il s'ensuit que $\beta_1 = 1$, $\beta_i = 0$ pour $i \geqq 2$. Si $n = 2$ on aura $\beta_1 = -\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = \alpha_1 = 0$ ce qui est absurde. Si $n = 3$ on aura $\beta_1 = -\alpha_1 = 1$, $\beta_i = -\alpha_i = 0$ pour $2 \leqq i \leqq n - 1$ et $\beta_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = 0$ ce qui est absurde.

THÉORÈME 3.2. *Soit A une* a.l.m.c. *commutative complète à base $(x_i)_{i \geqq 1}$ vérifiant*

(1) $$x_i x_j = x_j,\ i \leqq j,$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1988-025-9 Published online by Cambridge University Press

(2) $$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \in A.$$

Alors A est à caractères continus.

PREUVE. Soit f un caractère algébrique (non nul). Comme $x_i^2 = x_i$, pour tout i, on a $f(x_i) \in \{0, 1\}$. Supposons que $f(x_i) = 1$ pour tout i. On considère l'élément $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in A$. On a $f(\sum_{i=k}^{\infty} x_i) \geqq 0$ pour tout $k \geqq 1$. En effet pour chaque k, il existe un caractère continu F_k tel que:

$$f\left(\sum_{i=k}^{\infty} x_i\right) = F_k\left(\sum_{i=k}^{\infty} x_i\right) = \sum_{i=k}^{\infty} F_k(x_i) \geqq 0.$$

Pour tout n on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f\left(\sum_{i=n}^{\infty} x_i\right) \\ &= n + f\left(\sum_{i=n}^{\infty} x_i\right). \end{aligned}$$

On aura $f(x) \geqq n$ pour tout n ce qui est absurde, d'où l'existence d'un certain m tel que $f(x_m) = 0$. Comme pour tout $i \geqq m$ $x_i = x_i x_m$ on aura que $f(x_i) = 0$ pour tout $i \geqq m$, soit $k + 1$ le plus petit entier tel que $f(x_{k+1}) = 0$, on a que

$$f(x_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leqq i \leqq k \\ 0 & i > k. \end{cases}$$

On considère l'élément $x_k - x_{k+1}$, comme $\mathrm{Sp}(x_k - x_{k+1}) = \{0, 1\}$ d'après Proposition 3.1, il existe un caractère continu F tel que

$$F(x_k - x_{k+1}) = F(x_k) - F(x_{k+1}) = 1,$$

il s'ensuit que $F(x_k) = 1$ et $F(x_{k+1}) = 0$, ainsi on a mis en evidence un caractère continu F tel que

$$F(x_i) = \begin{cases} 1 & 1 \leqq i \leqq k \\ 0 & i > k \end{cases}$$

soit

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A, \; x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + x_{k+1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i x_i,$$

d'où $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ de même $F(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ donc $f(x) = F(x)$ pour tout x i.e. $f = F$.

REMARQUE 3.3. Le théorème 3.2 constitue une amélioration du résultat de [2] affirmant que toute algèbre A de Fréchet à base $(x_i)_{i \geqq 1}$ vérifiant

$$(1') \qquad x_i x_j = x_j x_i = x_j \; i \leqq j$$

$$(2') \qquad p_i(x_i) \neq 0 \text{ et } p_i(x_{i+1}) = 0$$

est à caractères continus. L'algèbre A est commutative, car elle est à produit continu et, pour tous i, j, $x_i x_j = x_j x_i$. (1′) et (2′) entrainent que $p_i(x_j) = 0$ pour $i < j$, d'ou pour toute suite $(x_i)_{i \geqq 1}$ dans $\mathbf{C}$ on a que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ en particulier $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \in A$.

REMARQUE 3.4. On peut ne pas utiliser la condition $p_i(x_i) \neq 0$ dans [2]. En effet, on montre que pour tout $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$, $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$, k dépend seulement de f; ainsi on a $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x)$. Or puisque l'algèbre est de Fréchet les α_i sont continues, d'ou f est continu, car $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

4. **Propriétés.**

PROPOSITION 4.1. *Soit A une* a.l.m.c. *commutative complète à base* $(x_i)_{i \geqq 1}$ *vérifiant*

$$(1) \qquad x_i x_j = x_j \; i \leqq j$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in A$$

alors card $M^*(A)$ = card N.

PREUVE. Soit $f \in M^*(A)$. Alors il existe $k \geqq 1$ (k est unique) tel que $f(x_i) = 0 \; i > k$, $f(x_i) = 1 \; 1 \leqq i \leqq k$. On définit l'application ψ par

$$\psi : M^*(A) \to N \backslash \{0\}$$
$$f \to \psi(f) = k$$

ψ est injective, en effet $\psi(f) = \psi(g)$ entraine que $f(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i \geqq 1$. Soit

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i, \quad x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + x_{k+1} \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

d'ou on obtient que $f(x) = g(x)$ pour tout x de A, i.e. $f = g$. ψ est surjective; en effet, soit $k \in N\backslash\{0\}$; on considère l'élément $x_k - x_{k+1}$; d'après Proposition 3.1, il existe $f \in M^*(A)$ tel que $f(x_k - x_{k+1}) = 1$. Il s'ensuit que $f(x_k) = 1$ et $f(x_{k+1}) = 0$ d'ou $\psi(f) = k$.

REMARQUE 4.2. On n'a pas utilisé le fait que A est à caractères continus.

PROPOSITION 4.3. *Soit A une* a.l.m.c. *commutative complète à base* $(x_i)_{i \geqq 1}$ *telle que* $(1) x_i x_j = x_j$, $i \leqq j$. *Alors A est semi-simple* (*i.e.* $\operatorname{Rad} A = (0)$).

PREUVE. Soit

$$x \in \operatorname{Rad} A, \; x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

on écrit x sous la forme

$$x = \alpha_1 x_1 + x_2 \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i x_i,$$

d'après Proposition 3.1, il existe un caractère f tel que $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = 0$. Comme $f(x) = \alpha_1$ et $x \in \operatorname{Rad} A$ on a $\alpha_1 = 0$. En répétant ceci jusqu'à l'ordre $n - 1$, on aura

$$x = \alpha_n x_n + x_{n+1} \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i$$

le même procédé en traine que $\alpha_n = 0$ d'ou $\operatorname{Rad} A = (0)$.

EXEMPLE. Soit l'algèbre $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ des suites complexes munie de la topologie définie par la famille de semi-normes $(q_i)_{i \in \mathbf{N}}$

$$q_n((x_i)_{i \in \mathbf{N}}) = |x_n|$$

$\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est une algèbre de Fréchet à base $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$

$$e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ termes}}, 1, 1 \ldots)$$

et on a $e_n e_m = e_m$ pour $n \leqq m$.

5. Algèbres à bases orthogonales.

THÉORÈME 5.1. *Soit A une algèbre de Fréchet à base $(x_i)_{i \geqq 1}$ orthogonale telle que* (1) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i \in A$ *dès que* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ *et* $|a_i| \leqq 1$. *Alors A est à caractères continus.*

PREUVE. On peut supposer que $x_i^4 = x_i^3$ pour tout $i \geqq 1$ (cf [1]). Soit f un caractère, s'il existe un certain $k \geqq 1$ tel que $f(x_k) \neq 0$ ($f(x_k) = 1$), pour tout $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ on a $f(x) = \alpha_k$ car $x x_k = \alpha_k x_k^2$, ainsi f est continu puisque l'algèbre est de Fréchet. Il reste à montrer que si $f(x_i) = 0$ pour tout $i \geqq 1$, alors f est nulle. Soit $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ avec $(\alpha_i)_{i \geqq 1}$ ne possédant aucune sous suite constante non nulle. Supposons que $f(x) \neq 0$, on a $f(x) = f(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i x_i)$ pour tout $k \geqq 1$; pour chaque $k \geqq 1$, il existe un caractère continu F_k tel que

$$f\left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i x_i\right) = F_k\left(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i x_i\right)$$

$$= \alpha_r \text{ avec } r \geqq k$$

d'ou pour tout $k \geqq 1$ il existe $r \geqq k$ tel que $\alpha_r = f(x)$ ce qui est contradictoire, donc $f(x) = 0$.

On note par (P) la propriété suivante : si $f(x) \neq 0$ il existe un caractère continu (non nul) tel que $f(x) = F(x)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ (x est quelconque), supposons $f(x) \neq 0$; on considère $I = \{i \geqq 1/\alpha_i = f(x)\}$. En utilisant (P), il existe $e \geqq 1$ tel que $f(x) = \alpha_e$, ainsi $I \neq \emptyset$ si I est fini, il existe $k \geqq 2$ tel que $I \subset \{1, \ldots, k - 1\}$. $f(x) = f(\sum_{i=k}^{\infty} \alpha_i x_i) = \alpha_e$ $e \geqq k$ d'après (P) ainsi $e \notin I$ ce qui contredit la définition de I.

Si I est infini, soient $(a_i)_{i \geqq 1}$ et $(b_i)_{i \geqq 1}$ deux suites définies par

$$a_i = 1 \text{ si } i \in I, \quad b_i = 1 \text{ si } i \notin I,$$

$$a_i = 0 \text{ si } i \notin I, \quad b_i = 0 \text{ si } i \in I.$$

On a d'après (1) que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_i x_i$ sont des éléments de A

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_i x_i.$$

Posons $\alpha = \alpha_i$ pour tout $i \in I$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha_i x_i = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

d'après (1) on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} a_i x_i\right) + f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{i}\right) a_i x_i\right)$$

d'ou

$$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = 0 \text{ car} \left(\frac{1}{i} a_i\right)_{i \geqq 1}, \left(\left(1 - \frac{1}{i}\right) a_i\right)_{i \geqq 1}$$

ne possèdent pas de sous suites constantes non nulles.

Donc $f(x) = f(\sum_{i=1}^{\infty} b_i \alpha_i x_i)$, en utilisant (P) $f(x) = b_e \alpha_e = \alpha_e$ ce qui entraine que $e \in I$, ce qui est contradictoire car si $e \in I b_e$ serait nulle.

Donc f est nulle.

COROLLAIRE 5.2. *Soit A une algèbre de Fréchet à base* $(x_i)_{i \geqq 1}$ *orthogonale telle que pour toute suite* $(\alpha_i)_{i \geqq 1}$ de $\mathbf{C}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in A$ *alors A* est à caractères continus.

RÉFÉRENCES

1. T. Husain and J. Liang, *Multiplicative functionals on Fréchet algebras with bases*, Can. J. Math. Vol XXIX n° 2 (1977), pp. 270-276.

2. T. Husain and J. Liang, *Continuity of multiplicative linear functionals on Fréchet algebras with bases*, Bull. Soc. Roy. Sc Liège **46** (1977), pp. 8-11.

3. E. A. Michaël, *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).

4. H. H. Schaefer, *Topological vector spaces* (MacMillan New York 1964).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
AVENUE OUED AKREUCH
TAKADDOUM, RABAT, B.P. 5118
MAROC