

Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles

ETIENNE GHYS

Université des Sciences et Techniques de Lille I, 59650 Villeneuve d'Ascq, France

(Received 15 July 1982 and revised 6 June 1983)

Abstract. We consider Anosov flows on closed 3-manifolds which are circle bundles. Our main result is that, up to a finite covering, these flows are topologically equivalent to the geodesic flow of a surface of constant negative curvature. The same method shows that, if M is a closed hyperbolic manifold of any dimension, all the geodesic flows which correspond to different metrics on M and which are of Anosov type are topologically equivalent.

Introduction

Les exemples classiques de flots d'Anosov se situent sur les variétés infra-homogènes, c'est à dire du type $K \backslash G / \Gamma$ où G est un groupe de Lie, K un sous-groupe compact, et Γ un sous-groupe uniforme discret. Le flot est obtenu par l'action à gauche d'un sous-groupe à un paramètre de G commutant avec K (cf. [16]). En dimension trois, ce procédé mène à deux familles d'exemples. La première est celle constituée des suspensions d'automorphismes hyperboliques du tore T^2 . La variété est alors un fibré en tores sur le cercle, espace homogène d'un groupe de Lie résoluble de dimension trois. La seconde famille est la généralisation naturelle des flots géodésiques des surfaces à courbure négative constant. La variété ambiante est un espace homogène du type $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) / \Gamma$ et le flot est induit par le sous-groupe des matrices diagonales. Ces variétés sont des fibrés de Seifert et possèdent un revêtement fini qui est un fibré en cercles.

Récemment, des exemples ont montré qu'il existe d'autres variétés de dimension trois admettant des flots d'Anosov et que de tels flots peuvent même ne pas être transitifs. (cf. [4], [5], [7]). On peut alors se demander s'il existe de nouveaux flots d'Anosov sur les variétés infra-homogènes. Dans cette direction, J. Plante montre dans [12] que si M^3 est un fibré en tores sur le cercle, alors tout flot d'Anosov de M^3 est topologiquement équivalent à la suspension d'un automorphisme hyperbolique du tore.

Nous nous intéressons ici aux flots d'Anosov sur les variétés du type $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) / \Gamma$. Pour simplifier, nous nous limiterons en fait au cas des fibrés en cercles. Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME A. *Soit M^3 une 3-variété fermée orientable qui est un fibré en cercles au dessus d'une surface orientable Σ . Supposons qu'il existe un flot d'Anosov φ , sur M^3 .*

Alors:

- (1) M^3 est un revêtement fini du fibré unitaire tangent de Σ , qui est alors de genre supérieur ou égal à deux;
- (2) le flot φ_t est topologiquement équivalent au relevé dans M^3 du flot géodésique de Σ muni d'une métrique à courbure strictement négative quelconque; en particulier, le flot φ_t est transitif.

La première partie de ce travail contient une description des flots géodésiques des surfaces ainsi que la démonstration du fait que si deux métriques d'une même surface ont leurs courbures strictement négatives, les flots géodésiques associés sont topologiquement équivalents. Ceci justifie l'expression: 'le flot géodésique de Σ '.

Une première étape naturelle de la démonstration du théorème A consiste à montrer que l'on peut supposer la fibration transverse au feuilletage stable du flot φ_t . Si ce feuilletage stable était de classe C^2 , ceci serait une conséquence immédiate du théorème principal de [17] (voir aussi [9]).

Dans notre cas, le feuilletage stable n'est a priori que de classe C^1 . L'étude faite dans la deuxième partie comble cette lacune. Elle montre que, même si le théorème de [17] est faux en classe C^1 , il s'applique dans notre cas particulier.

Nous sommes alors en mesure de montrer, dans la troisième partie, que les orbites du flot donné sont 'presque' des géodésiques. Ceci nous permet d'en déduire une description précise du comportement des orbites à l'infini qui mène à la construction de l'équivalence topologique souhaitée, faite dans la quatrième partie.

Enfin, les mêmes techniques appliquées en dimension supérieure donnent le résultat suivant, généralisant celui de la première partie.

THÉORÈME B. *Soit M^n une n -variété fermée admettant une métrique à courbure négative constante. Si g_1 et g_2 sont deux métriques de M^n telles que les flots géodésiques associés sont de type Anosov, alors, ces flots sont topologiquement équivalents.*

Ce travail a été réalisé lors d'un séjour à l'I.M.P.A. (Rio de Janeiro) que je tiens à remercier pour son hospitalité. Après la rédaction de ce travail, l'auteur a eu connaissance d'un preprint de M. Gromov ([6]) où certaines constructions sont similaires, en particulier le procédé de moyennisation utilisé à la fin de la partie 4.

1. Les flots géodésiques sur une surface

Soit Σ une surface fermée orientable. Notons $T_1(\Sigma)$ le fibré des demi-droites tangentes à Σ . La variété $T_1(\Sigma)$ est un fibré en cercles au dessus de Σ .

Si g est une métrique riemannienne sur Σ , on peut construire le flot géodésique φ_t^g sur $T_1(\Sigma)$ de la façon suivante. Soit Δ une demi-droite tangente à Σ en un point x et soit $u(s)$ l'unique géodésique de (Σ, g) telle que $u(0) = x$ et $\dot{u}(0) \in \Delta$. On pose alors:

$$\varphi_t^g(x, \Delta) = (x', \Delta')$$

où $x' = u(t)$ et Δ' est l'unique demi-droite tangente à Σ contenant $\dot{u}(t)$.

Si la courbure de (Σ, g) est strictement négative, il est bien connu que le flot φ_t^g est un flot d'Anosov (c.f. [1]). Rappelons que deux flots sont dits topologiquement

équivalents s'il existe un homéomorphisme entre les variétés supportant ces flots, envoyant les orbites du premier flot sur celles du second, tout en préservant l'orientation de ces orbites.

PROPOSITION 1.1. *Si g_1 et g_2 sont deux métriques de Σ à courbures strictement négatives, les deux flots $\varphi_t^{g_1}$ et $\varphi_t^{g_2}$ sont topologiquement équivalents. Cette classe d'équivalence sera appelée le flot géodésique de Σ .*

Démonstration. Les hypothèses de la proposition impliquent immédiatement que le genre de Σ est supérieur ou égal à deux.

Les flots d'Anosov étant structurellement stables (cf. [1]) cette proposition découle de la connexité de l'espace des métriques riemanniennes de Σ à courbures strictement négatives. (Nous laissons au lecteur la démonstration de ce dernier point.) □

Le groupe fondamental d'un fibré en cercles au dessus de la sphère ou du tore étant à croissance polynomiale, ces fibrés ne peuvent supporter de flots d'Anosov (cf. [13]). En d'autres termes, on pourra supposer par la suite que le genre de Σ est supérieur ou égal à deux.

Donnons une description du flot géodésique qui nous sera utile par la suite. Soit D^2 le disque de Poincaré et soit Γ le groupe fondamental de Σ . Donner une métrique riemannienne à courbure négative -1 sur Σ revient à identifier Γ à un sous-groupe du groupe des isométries de D^2 opérant proprement sans point fixe sur D^2 . L'action de Γ sur D^2 se prolonge de manière naturelle à une action de Γ sur le cercle à l'infini, noté S_∞^1 . Etant donnée une demi-droite Δ tangente à D^2 en un point x , nous pouvons considérer la géodésique $u(t)$ telle que $u(0) = x$ et $\dot{u}(0) \in \Delta$. Cette géodésique converge, quand t tend vers $+\infty$, vers un point x_∞ de S_∞^1 . Ceci permet d'identifier $T_1(\Sigma)$ avec le quotient de $D^2 \times S_\infty^1$ par la relation d'équivalence identifiant, pour tout γ de Γ , les points (x, x_∞) et $(\gamma \cdot x, \gamma \cdot x_\infty)$.

Moyenant cette identification, nous avons les propriétés suivantes:

- (1) l'orbite du flot géodésique relevé dans $D^2 \times S_\infty^1$ passant par (x, x_∞) est la courbe $t \mapsto (u(t), x_\infty)$ où u est l'unique géodésique de D^2 passant par x et convergeant vers x_∞ quand t tend vers $+\infty$;
- (2) le relevé du feuilletage stable (de codimension un) du flot géodésique est le feuilletage dont les feuilles sont les $D^2 \times \{*\}$.

2. Le feuilletage stable transverse à la fibration

Dans toute la suite, M désignera une 3-variété fermée fibrée en cercles sur une surface Σ de genre supérieur à deux. Soit $p: M \rightarrow \Sigma$ la fibration et φ_t un flot d'Anosov sur M . Nous noterons $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u, \mathcal{F}^{ss}, \mathcal{F}^{uu}$ les feuilletages stable, instable, fortement stable et fortement instable respectivement. Les feuilletages de codimension un \mathcal{F}^s et \mathcal{F}^u sont de classe C^1 . (Pour toutes ces notions, cf. [1].) Tous les objets considérés sont supposés orientables.

Le but de cette partie est de montrer le résultat préliminaire suivant:

PROPOSITION 2.1. *Il existe une autre fibration transverse à \mathcal{F}^s .*

Si \mathcal{F}^s était de classe C^2 , ceci serait une conséquence immédiate du théorème suivant, dû à W. Thurston.

THÉORÈME 2.2. *Si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension un, de classe C^2 , sans feuilles compactes, sur M , alors il existe une autre fibration transverse à \mathcal{F} .*

Considérons la suite exacte d'homotopie de la fibration:

$$0 \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\Sigma) \rightarrow 0.$$

Soit Z l'image de $\pi_1(S^1)$ dans $\pi_1(M)$ et δ un générateur de Z . Le sous-groupe Z est le centre de $\pi_1(M)$. Soit \hat{M} le revêtement de M associé à Z ; ce revêtement est difféomorphe à $\mathbb{R}^2 \times S^1$.

PROPOSITION 2.3. *Soit \mathcal{F} un feuilletage de M , de codimension un et de classe C^1 . Il existe une fibration en cercles transverse à \mathcal{F} si et seulement si le feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ relevé de \mathcal{F} dans \hat{M} est conjugué à un feuilletage produit $\mathbb{R}^2 \times S^1$ (i.e. dont les feuilles sont $\mathbb{R}^2 \times \{*\}$).*

Démonstration. Il est bien connu que la condition est nécessaire. J. Franks montre dans [3, pages 82 à 84] que si i est un plongement d'une surface dans une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) où \mathcal{F} est de codimension 1 et de classe C^1 , alors i peut être arbitrairement approché par un plongement en position générale par rapport à \mathcal{F} .

Comme le fait remarquer J. Plante dans [11, partie 2], ceci implique que les théorèmes de Novikov (cf. [2]) et de Roussarie (cf. [15]) sont valables pour les feuilletages de classe C^1 . En effet, les démonstrations de ces théorèmes n'utilisent la différentiabilité des feuilletages considérés que pour la mise en position générale de surfaces plongées.

De la même façon, la démonstration des théorèmes 1, 2, 3 et 4 de [9] n'utilisent la différentiabilité C^2 du feuilletage que pour pouvoir se référer aux théorèmes de Novikov et de Roussarie et pour pouvoir mettre certains tores (et certains anneaux) en position générale. Ces théorèmes sont donc valables pour des feuilletages de classe C^1 . Seul le théorème 5 de [9] (qui est celui que nous appelons 2.2 dans cet article) ne s'étend pas en classe C^1 . Sa démonstration fait usage du théorème de Schwartz concernant les ensembles minimaux des feuilletages singuliers des surfaces, de classe C^2 . Effectivement, un contre-exemple C^1 au théorème de Schwartz fournit un contre-exemple C^1 au théorème 2.1 ci-dessus (voir [17]).

Le début de la démonstration du théorème 5 de [9, page 592] s'adapte immédiatement; en utilisant les théorèmes 1, 2, 3 et 4, on peut construire une fibration en cercles p' de M , isotope à p et transverse à \mathcal{F} au-dessus du 1-squelette d'une décomposition cellulaire de Σ . Soit c une 2-cellule ouverte (on peut d'ailleurs supposer qu'il n'y a qu'une 2-cellule). La fibration p' est triviale au-dessus de c , de sorte que $p'^{-1}(c)$ est difféomorphe à $c \times S^1$. Le revêtement $r: \hat{M} \rightarrow M$ est lui aussi trivial au-dessus de $p'^{-1}(c)$, c'est à dire qu'il existe un ouvert U de \hat{M} tel que la restriction de r à U soit un difféomorphisme sur $p'^{-1}(c)$. L'adhérence \bar{U} de U dans \hat{M} est homéomorphe à $\bar{D}^2 \times S^1$ où \bar{D}^2 désigne le disque fermé. Puisque $\hat{\mathcal{F}}$ est conjugué à un produit $\mathbb{R}^2 \times S^1$, que $\bar{D}^2 \times S^1$ est compact et que \mathcal{F} est transverse à

p' au-dessus du 1-squelette, on en déduit que les feuilles de la restriction de \mathcal{F} à \bar{U} sont toutes compactes et donc homéomorphes à \bar{D}^2 . En d'autres termes, la restriction de \mathcal{F} à \bar{U} est conjuguée à un produit $\bar{D}^2 \times S^1$. Nous disposons donc d'une fibration en cercles de $\bar{D}^2 \times S^1$, transverse aux disques $\bar{D}^2 \times \{*\}$ au voisinage du bord $(\partial D^2) \times S^1$. Il est immédiat que cette fibration est isotope, relativement au bord, à une fibration partout transverse aux disques $\bar{D}^2 \times \{*\}$. Cette isotopie induit une isotopie dans M puisque la restriction de r à U est un difféomorphisme. On obtient alors la fibration en cercles transverse à \mathcal{F} que nous souhaitons. \square

Remarquons que, si nous savions que tous les points de M sont non errants pour φ_r , nous pourrions appliquer [19] qui montre que, dans ce cas, \mathcal{F}^s est un produit. Ne faisant pas cette hypothèse, nous montrerons directement que \mathcal{F}^s est un produit.

Soit \tilde{M} le revêtement universel de M et $\tilde{\mathcal{F}}^s$ le feuilletage relevé. Rappelons qu'une feuille de \mathcal{F}^s est un cylindre ou un plan suivant qu'elle contient ou non une orbite périodique de φ_r . Une orbite périodique d'un flot d'Anosov n'étant pas homotope à zéro, il s'en suit que $\tilde{\mathcal{F}}^s$ est un feuilletage par plans. Ce feuilletage est alors défini par une fibration $\tilde{M} \rightarrow V$ où V est une variété de dimension 1, orientée, simplement connexe mais éventuellement non séparée. (cf. [10], [14]).

Le groupe fondamental de M opère sur \tilde{M} et sur V . Si f_1 et f_2 sont deux éléments de V , nous dirons que f_1 et f_2 ne sont pas séparés, et nous noterons $f_1 \approx f_2$, si tout voisinage de f_1 rencontre tout voisinage de f_2 . On dit que f_1 est un point de branchement s'il existe f_2 différent de f_1 tel que $f_1 \approx f_2$.

LEMME 2.4. *Si $f \in V$ et $n \in \mathbb{Z}^*$, alors $\delta^n f$ et f sont séparés (et en particulier différents).*

Démonstration. Soit $\text{Fix}(\delta^n)$ l'ensemble des points fixes de δ^n et $\text{Fix}^\sim(\delta^n)$ l'ensemble des f tels que $\delta^n f \approx f$. Puisque V n'est pas nécessairement séparée, $\text{Fix}(\delta^n)$ n'est pas nécessairement fermé. Cependant $\text{Fix}^\sim(\delta^n)$ est fermé. Par ailleurs, $\text{Fix}^\sim(\delta^n) - \text{Fix}(\delta^n)$ ne contient que des points de branchements de V . Une variété de dimension 1, simplement connexe, à base dénombrable ne contient qu'un nombre dénombrable de points de branchements (vérification aisée). Par conséquent, $\text{Fix}^\sim(\delta^n) - \text{Fix}(\delta^n)$ est dénombrable.

D'autre part, $\text{Fix}(\delta^n)$ est dénombrable, car un point fixe de δ^n correspond à une feuille de \mathcal{F}^s non simplement connexe qui contient donc une unique orbite périodique de φ_r . Celles ci sont en nombre dénombrable. Par conséquent, $\text{Fix}^\sim(\delta^n)$ est un fermé dénombrable de V .

Puisque Z est le centre de $\pi_1(M)$, le fermé $\text{Fix}^\sim(\delta^n)$ est $\pi_1(M)$ -invariant. On obtient donc dans M un fermé saturé coupant toute transversale sur un nombre dénombrable de points. Si ce fermé était non vide, il contiendrait un minimal qui ne pourrait être qu'une feuille compacte de \mathcal{F}^s ce qui est impossible. On en déduit que $\text{Fix}^\sim(\delta^n)$ est vide. \square

LEMME 2.5. *Pour tout f de V , l'orbite de f par Z est fermée dans V .*

Démonstration. Soit \leq l'ordre partiel naturel dans V , i.e. $f_0 \leq f_1$ s'il existe une application croissante de $[0, 1]$ dans V envoyant 0 sur f_0 et 1 sur f_1 . Si l'orbite de f par Z n'est pas fermée, il existe un intervalle compact de V contenant une infinité

d'itérées $\delta^n(f)$. Par conséquent, quitte à remplacer f par $\delta^{n_0}(f)$ et δ par δ^{-1} , il existe un entier positif n_1 tel que $\delta^{n_1}(f) > f$. Ceci permet de construire un plongement croissant de \mathbb{R} dans V dont l'image V_1 est invariante par δ^{n_1} . Cette sous-variété V_1 est la réunion des intervalles $\delta^k(I)$ où I désigne l'intervalle joignant f à $\delta^{n_1}(f)$. (L'intervalle I est bien défini car V est simplement connexe.) Supposons que $\delta^n(f)$ appartienne à V_1 et considérons alors l'intersection $\delta^n(V_1) \cap V_1$. C'est un intervalle (non vide) de V_1 car V est simplement connexe. S'il n'est pas égal à V_1 tout entier, il est du type $\{f \in V_1 \mid f < a\}$ ou $\{f \in V_1 \mid f > b\}$ ou $\{f \in V_1 \mid a < f < b\}$. Puisque V_1 et $\delta^n(V_1)$ sont invariants par δ^{n_1} , le point a (ou b) est fixe par δ^{n_1} ce qui est impossible par le lemme précédent. En d'autres termes, $\delta^n(V_1) \supset V_1$. De même $\delta^n(V_1) \subset V_1$. Par conséquent, $\delta^n(f) \in V_1$ si et seulement si $\delta^n(V_1) = V_1$. L'ensemble des tels n est un sous-groupe de \mathbb{Z} engendré par un entier positif n_2 .

La suite $f_k = \delta^{kn_2}(f)$ est alors une suite monotone de V_1 et contient tous les points de V_1 qui sont dans l'orbite de f par \mathbb{Z} . Puisque nous supposons que cette orbite possède un point d'accumulation, l'orbite de f par le sous-groupe d'indice fini $n_2 \cdot \mathbb{Z}$ possède aussi un point d'accumulation f_∞ qui est alors une limite des f_k et vérifie par conséquent $\delta^{n_2}(f_\infty) \approx f_\infty$, ce qui est exclu par le lemme 2.4. □

COROLLAIRE 2.6. *Les feuilles de \mathcal{F}^s sont toutes des plans fermés. Le feuilletage \mathcal{F}^s est défini par une fibration:*

$$M/Z = \hat{M} \rightarrow \hat{V} = V/Z.$$

Le groupe fondamental de \hat{V} est isomorphe à \mathbb{Z} .

LEMME 2.7. *La variété \hat{V} est en fait séparée, difféomorphe à S^1 .*

Démonstration. Soit C l'ensemble des points f de \hat{V} tels que $\hat{V} - \{f\}$ soit connexe (c'est le 'cycle fondamental'). Puisque le groupe fondamental de \hat{V} est isomorphe à \mathbb{Z} , l'ensemble C est non vide. On vérifie facilement que tout point de la frontière $\bar{C} - \overset{\circ}{C}$ de C est un point de branchement. Cette frontière est alors un fermé dénombrable qui est clairement invariant par l'action de $\pi_1(\Sigma)$ sur \hat{V} . Les feuilles correspondantes de M forment alors un fermé saturé 'transversalement dénombrable'. L'absence de feuilles compactes de \mathcal{F}^s implique que cette frontière est vide et donc, par connexité de \hat{V} que $\hat{V} = C$. Il est alors facile de vérifier que la seule variété de dimension 1, à groupe fondamental infini cyclique qui n'est séparée par aucun point est le cercle S^1 . □

Démonstration de la proposition 2.1. D'après [10], l'espace des feuilles de \mathcal{F}^s étant difféomorphe à S^1 , le feuilletage \mathcal{F}^s est un produit $\mathbb{R}^2 \times S^1$. On en déduit la proposition 2.1 à l'aide de la proposition 2.3. □

3. Le comportement des orbites à l'infini

D'après la partie précédente, nous supposerons la fibration p transverse au feuilletage stable \mathcal{F}^s . On en déduit (cf. [2]) que le feuilletage \mathcal{F}^s peut être défini par suspension. Autrement dit, si nous notons $\tilde{\Sigma}$ le revêtement universel de Σ , on a :

$$M = \tilde{\Sigma} \times S^1 / (x, \theta) \sim (\gamma \cdot x, H(\gamma)(\theta))$$

où $\gamma \cdot x$ désigne l'action de l'élément γ de $\pi_1(\Sigma)$ sur l'élément x de $\tilde{\Sigma}$ et où

$$H: \pi_1(\Sigma) = \Gamma \rightarrow \text{Diff}(S^1)$$

est un morphisme de groupes (l'holonomie globale de \mathcal{F}^s). Selon cette identification le feuilletage \mathcal{F}^s est identifié au feuilletage produit sur $\tilde{\Sigma} \times S^1$ (identifié à \hat{M}).

Considérons une métrique riemannienne sur Σ à courbure négative -1 . Nous pouvons alors construire une métrique g_0 sur M telle que les fibres de p soient orthogonales aux feuilles de \mathcal{F}^s et telle que p soit une submersion riemannienne de M sur Σ muni de la métrique à courbure constante choisie. Dans ces conditions, $\tilde{\Sigma}$ est identifié au disque de Poincaré D^2 et Γ à un sous-groupe de $\text{Isom}(D^2) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Soit π la projection naturelle de $\tilde{\Sigma} \times S^1 \simeq D^2 \times S^1$ sur $\tilde{\Sigma} \simeq D^2$ et soit $\hat{\varphi}_t$ le relevé du flot φ_t dans \hat{M} . Si (x, θ) est un point de \hat{M} , l'orbite de (x, θ) par $\hat{\varphi}_t$ est située dans une feuille de \mathcal{F}^s . Pour étudier le comportement de $\hat{\varphi}_t(x, \theta)$ quand t tend vers $+\infty$, nous étudierons donc la courbe de D^2 définie par

$$t \mapsto \pi \hat{\varphi}_t(x, \theta).$$

LEMME 3.1. *Soit d_h la distance hyperbolique de D^2 . Il existe une constante strictement positive C_1 telle que pour tout t_1, t_2, x, θ , on a :*

$$\frac{1}{C_1} |t_2 - t_1| \leq d_h(\pi \hat{\varphi}_{t_1}(x, \theta), \pi \hat{\varphi}_{t_2}(x, \theta)) \leq C_1 |t_2 - t_1|.$$

(C'est-à-dire que la courbe $t \mapsto \pi \hat{\varphi}_t(x, \theta)$ se comporte 'presque' comme une géodésique.)

Démonstration. Construisons dans M une autre métrique riemannienne g_1 (de classe C^0) de telle sorte que :

- (1) le champ X associé à φ_t soit de longueur 1;
- (2) les sous-espaces fortement stables et instables soient orthogonaux à X .

Munissons \hat{M} de la métrique relevée. Fixons un point θ de S^1 et soit d_θ la métrique de D^2 obtenue par restriction de cette métrique relevée à $D^2 \times \{\theta\}$. Par compacité de M , il existe une constante C_1 telle que :

$$\frac{1}{C_1} g_1 \leq g_0 \leq C_1 g_1.$$

La même inégalité vaut pour les métriques relevées dans \hat{M} , et donc pour les métriques induites sur $D^2 \times \{\theta\}$. Puisque g_0 induit la métrique hyperbolique sur chaque feuille de \mathcal{F}^s , on obtient :

$$\frac{1}{C_1} d_\theta \leq d_h \leq C_1 d_\theta.$$

(Cette inégalité est valable aussi bien pour les métriques riemanniennes que pour les distances associées.)

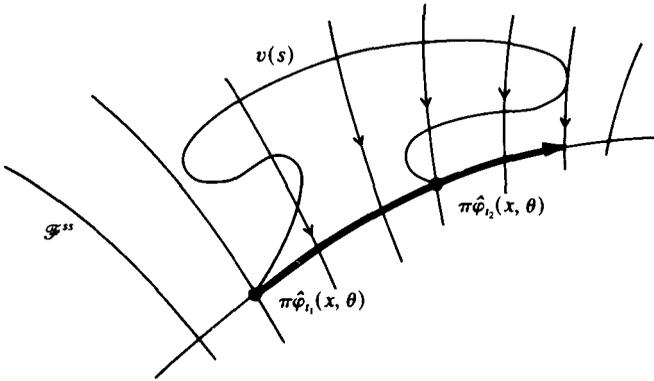
Il nous suffit alors de montrer l'égalité suivante :

$$d_\theta(\pi \hat{\varphi}_{t_1}(x, \theta), \pi \hat{\varphi}_{t_2}(x, \theta)) = |t_2 - t_1|.$$

Puisque la longueur de X est 1, il est clair que :

$$d_\theta(\pi \hat{\varphi}_{t_1}(x, \theta), \pi \hat{\varphi}_{t_2}(x, \theta)) \leq |t_2 - t_1|.$$

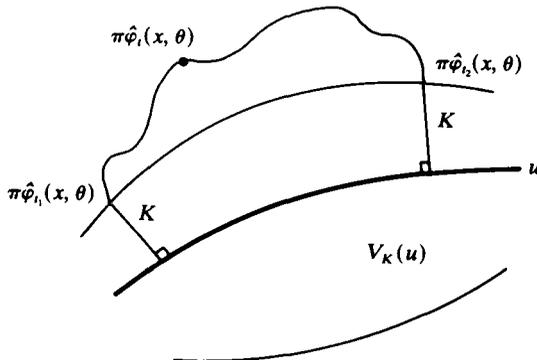
L'autre inégalité s'obtient de la façon suivante. Soit $v(s)$ un chemin de $D^2 \times \{\theta\}$ joignant $\hat{\varphi}_{t_1}(x, \theta)$ et $\hat{\varphi}_{t_2}(x, \theta)$. La projection de ce chemin, dans $D^2 \times \{\theta\}$, le long de \mathcal{F}^{ss} , sur l'orbite de (x, θ) par $\hat{\varphi}_t$ est certainement d_θ -plus courte que le chemin $v(s)$. Ceci découle de l'orthogonalité de X et \mathcal{F}^{ss} et de l'invariance de \mathcal{F}^{ss} par φ_t . La longueur de cette projection étant clairement supérieure à $|t_2 - t_1|$, le résultat est obtenu. \square



LEMME 3.2. *Il existe une constante $C_2 > 0$ telle que toute courbe $t \mapsto \pi\hat{\varphi}_t(x, \theta)$ reste à une distance inférieure à C_2 d'une unique géodésique de D^2 (pour la métrique d_h).*

Démonstration. Ce lemme est une conséquence du lemme 3.1 de la même façon que la proposition 5-9-2 de [18] est une conséquence du lemme 5-9-1. L'argument principal est le suivant. Soit $u(t)$ une géodésique quelconque de D^2 et soit, pour $K > 0$, $V_K(u)$ l'ensemble des points de D^2 situés à une distance inférieure à K de u . La projection orthogonale de $D^2 - V_K(u)$ sur u contracte les longueurs par un facteur supérieur à $\text{ch } K$. Supposons que les réels t_1, t_2 soient tels que:

$$\begin{aligned} \pi\hat{\varphi}_{t_1}(x, \theta) &\in \partial V_K(u), \\ \pi\hat{\varphi}_{t_2}(x, \theta) &\in \partial V_K(u) \\ \pi\hat{\varphi}_t(x, \theta) &\notin V_K(u) \quad \text{pour } t \in]t_1, t_2[\end{aligned}$$



La longueur de la courbe

$$t \in [t_1, t_2] \mapsto \pi \hat{\varphi}_t(x, \theta)$$

est inférieure à $C_1|t_2 - t_1|$, sa projection orthogonale sur u a donc une longueur inférieure à $C_1|t_2 - t_1|/\text{ch } K$. Ceci montre que la distance entre $\pi \hat{\varphi}_{t_1}(x, \theta)$ et $\pi \hat{\varphi}_{t_2}(x, \theta)$ est inférieure à $(C_1|t_2 - t_1|/\text{ch } K) + 2K$. Cette distance est par ailleurs supérieure à $|t_2 - t_1|/C_1$. Donc

$$|t_2 - t_1| \left(\frac{1}{C_1} - \frac{C_1}{\text{ch } K} \right) \leq 2K.$$

Si K est suffisamment grand, ceci donne une majoration du type $|t_2 - t_1| \leq K'$. Par conséquent, le diamètre d'une composante connexe bornée de l'ensemble $\{t, \pi \hat{\varphi}_t(x, \theta) \notin V_K(u)\}$ est uniformément borné.

La portion de la courbe $\pi \hat{\varphi}_t(x, \theta)$ située entre t_1 et t_2 reste donc à une distance uniformément bornée de la géodésique joignant $\pi \hat{\varphi}_{t_1}(x, \theta)$ à $\pi \hat{\varphi}_{t_2}(x, \theta)$. Il s'en suit que cette géodésique converge vers une géodésique limite lorsque t_1 converge vers $-\infty$ et t_2 converge vers $+\infty$. Cette géodésique limite reste alors à une distance uniformément bornée de la courbe $\pi \hat{\varphi}_t(x, \theta)$. C'est évidemment la seule géodésique qui satisfait cette propriété car deux géodésiques distinctes ne sont pas à distance bornée. □

COROLLAIRE 3.3. Munissons \bar{D}^2 de la métrique euclidienne d_e et soit S_∞^1 le bord de \bar{D}^2 . Alors, les limites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \pi \hat{\varphi}_t(x, \theta) = F_{+\infty}(x, \theta)$$

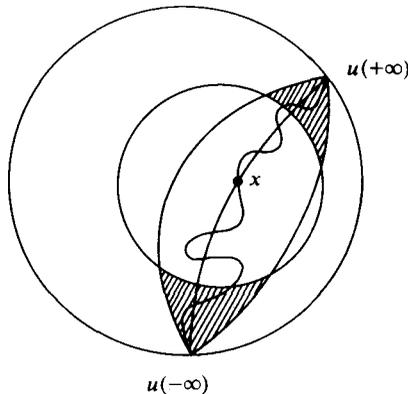
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \pi \hat{\varphi}_t(x, \theta) = F_{-\infty}(x, \theta)$$

existent au sens de d_e , appartiennent à S_∞^1 et dépendent continûment de (x, θ) .

Démonstration. Soit $u(s)$ l'unique géodésique de D^2 restant à une distance bornée de $\pi \hat{\varphi}_t(x, \theta)$ et soient $u(+\infty)$ et $u(-\infty)$ ses deux points à l'infini sur S_∞^1 . Puisque

$$d_h(x, \pi \hat{\varphi}_t(x, \theta)) \geq \frac{|t|}{C_1},$$

le point $\pi(\hat{\varphi}_t(x, \theta))$ doit appartenir à l'une des deux zones hachurées de la figure suivante:



Ceci montre que:

$$\pi\hat{\varphi}_t(x, \theta) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u(+\infty)$$

$$\pi\hat{\varphi}_t(x, \theta) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} u(-\infty)$$

quitte à inverser les dénominations de $u(+\infty)$ et $u(-\infty)$. Ces limites sont au sens de la métrique euclidienne d_e et sont uniformes sur tout compact de $D^2 \times S^1$. \square

LEMME 3.4. *Le point $F_{+\infty}(x, \theta)$ de S^1_∞ ne dépend pas de x .*

Démonstration. Ceci résulte directement du fait que φ_t est un flot d'Asonov et que \mathcal{F}^s est le feuilletage stable de φ_t . Nous noterons $F_{+\infty}(\theta)$ le point $F_{+\infty}(x, \theta)$. \square

Le groupe Γ opérant par isométries sur D^2 opère de manière naturelle sur S^1_∞ .

LEMME 3.5. *Pour tout γ de Γ , et pour tout θ de S^1 , on a:*

$$F_{+\infty}(H(\gamma)(\theta)) = \gamma \cdot F_{+\infty}(\theta).$$

Démonstration. Puisque le flot $\hat{\varphi}_t$ est le relevé de φ_t , on a évidemment:

$$\hat{\varphi}_t(\gamma \cdot x, H(\gamma)(\theta)) = (\gamma \cdot \pi\hat{\varphi}_t(x, \theta), H(\gamma)(\theta)).$$

Donc:

$$\pi\hat{\varphi}_t(\gamma \cdot x, H(\gamma)(\theta)) = \gamma \cdot \pi\hat{\varphi}_t(x, \theta).$$

Faisant tendre t vers $+\infty$ et utilisant le lemme 3.4, on obtient l'égalité désirée. \square

LEMME 3.6. *$F_{+\infty}: S^1 \rightarrow S^1_\infty$ est surjective.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, l'image de S^1 est invariante par l'action de Γ sur S^1_∞ , elle est par ailleurs compacte. L'action de Γ sur S^1_∞ étant minimale (cf. [18]), on en déduit que $F_{+\infty}$ est surjective. \square

Etudions maintenant l'injectivité de $F_{+\infty}$ et $F_{-\infty}$.

LEMME 3.7. *Si $F_{-\infty}(x, \theta) = F_{-\infty}(x', \theta)$, alors (x, θ) et (x', θ) appartiennent à la même orbite de $\hat{\varphi}_t$.*

Démonstration. Deux orbites négatives différentes de $\hat{\varphi}_t$, situées dans une même feuille de \mathcal{F}^s s'éloignent exponentiellement l'une de l'autre. Elles ne peuvent donc pas rester à distance bornée d'une même géodésique de D^2 . \square

LEMME 3.8. *$F_{+\infty}: S^1 \rightarrow S^1_\infty$ est un revêtement.*

Démonstration. Il reste à montrer que $F_{+\infty}$ est localement injective. Si θ_1 et θ_2 sont suffisamment proches, il existe deux points x_1 et x_2 de D^2 tels que (x_1, θ_1) et (x_2, θ_2) appartiennent à la même feuille du feuilletage instable $\hat{\mathcal{F}}^u$ relevé dans $D^2 \times S^1$. Si $F_{+\infty}(\theta_1) = F_{+\infty}(\theta_2)$, les deux orbites positives de (x_1, θ_1) et (x_2, θ_2) resteraient à distance bornée, ce qui est impossible. \square

4. La construction de l'équivalence topologique

Soit $(x, \theta) \in D^2 \times S^1$ et $u(x, \theta)$ l'unique géodésique de D^2 joignant $F_{+\infty}(\theta)$ à $F_{-\infty}(x, \theta)$. Soit $w(x, \theta)$ la projection orthogonale de x sur $u(x, \theta)$. Considérons

l'application suivante:

$$(x, \theta) \in D^2 \times S^1 \mapsto (w(x, \theta), F_{+\infty}(\theta)) \in D^2 \times S^1_\infty.$$

Cette application continue passe au quotient en une application continue h de

$$M = D^2 \times S^1 / (x, \theta) \sim (\gamma \cdot x, H(\gamma)(\theta))$$

vers:

$$D^2 \times S^1_\infty / (x, \theta) \sim (\gamma \cdot x, \gamma \cdot \theta).$$

Cette deuxième variété est le fibré unitaire tangent à Σ et l'application h obtenue envoie clairement une orbite de φ_t sur une orbite du flot géodésique de Σ .

LEMME 4.1. h est surjective.

Démonstration. Il suffit de démontrer que, pour tout θ , l'application:

$$x \in D^2 \mapsto w(x, \theta) \in D^2$$

est surjective. La condition:

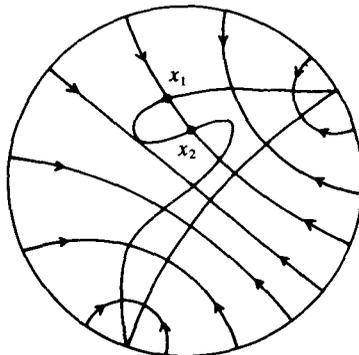
$$d_h(x, w(x, \theta)) \leq C_2$$

montre que cette application s'étend continûment à D^2 par l'identité de S^1_∞ . Le degré de cette extension est donc 1 et l'application considérée est donc surjective. □

LEMME 4.2. Si $h(m) = h(m')$ et si m et m' sont suffisamment proches alors m et m' appartiennent à la même orbite de φ_t .

Démonstration. Soit $\hat{h}: D^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1_\infty$ le relèvement de h . Le lemme 3.7 joint au lemme 3.8 montre que si $\hat{h}(\hat{m}) = \hat{h}(\hat{m}')$ et si \hat{m} et \hat{m}' sont proches, alors \hat{m} et \hat{m}' sont sur la même orbite de $\hat{\varphi}_t$. Si maintenant m et m' sont deux points proches de M tels que $h(m) = h(m')$, ils possèdent des relevés proches \hat{m} et \hat{m}' tels que $\hat{h}(\hat{m})$ et $\hat{h}(\hat{m}')$ se projettent sur le même point de M . Puisque \hat{h} est uniformément continue (c'est le relevé de $h: M \rightarrow M$), les points $\hat{h}(\hat{m})$ et $\hat{h}(\hat{m}')$ sont proches et se projettent sur le même point de M . On a donc $\hat{h}(\hat{m}) = \hat{h}(\hat{m}')$. Les points m et m' sont donc sur la même orbite de φ_t . □

L'application h n'est donc pas un revêtement qu'à cause du défaut d'injectivité de h le long d'une orbite. Ceci arrive lorsque deux points de la même courbe $\pi\hat{\varphi}_t(x, \theta)$ ont la même projection orthogonale sur $u(x, \theta)$.



$$w(x_1, \theta) = w(x_2, \theta)$$

Pour rendre h localement injectif, nous allons le modifier en utilisant un procédé de moyenne. Notons $\psi(s, \cdot)$ le flot géodésique sur $T_1(\Sigma)$. Puisque h envoie une orbite de φ_t sur une orbite $\psi(s, \cdot)$ il existe une fonction continue $a(t, m)$ telle que:

$$h(\varphi_t(m)) = \psi(a(t, m), h(m))$$

L'application a vérifie la 'condition de cocycle' suivante:

$$a(t_1 + t_2, m) = a(t_1, \varphi_{t_2}(m)) + a(t_2, m).$$

Soit T un réel positif. Définissons $h': M \rightarrow T_1(\Sigma)$ par:

$$h'(m) = \psi\left(\frac{1}{T} \int_0^T a(\tau, m) d\tau, h(m)\right).$$

LEMME 4.3. $h'(\varphi_t(m)) = \psi(a'(t, m), h'(m))$, où

$$a'(t, m) = \frac{1}{T} \int_0^T [a(t + \tau, m) - a(\tau, m)] d\tau.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} h'(\varphi_t(m)) &= \psi\left(\frac{1}{T} \int_0^T a(\tau, \varphi_t(m)) d\tau, h(\varphi_t(m))\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{T} \int_0^T a(\tau, \varphi_t(m)) d\tau, \psi(a(t, m), h(m))\right). \end{aligned}$$

Utilisant la relation de cocycle pour $t_2 = t$ et $t_1 = \tau$, on obtient:

$$\begin{aligned} h'(\varphi_t(m)) &= \psi\left(\frac{1}{T} \int_0^T [a(t + \tau, m) - a(\tau, m)] d\tau + a(t, m), h(m)\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{T} \int_0^T a(t + \tau, m) d\tau, h(m)\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{T} \int_0^T a(t + \tau, m) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^T a(\tau, m) d\tau, h'(m)\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{T} \int_0^T [a(t + \tau, m) - a(\tau, m)] d\tau, h'(m)\right). \end{aligned} \quad \square$$

LEMME 4.4. Pour T suffisamment grand, h' est un revêtement.

Démonstration. Etudions l'injectivité locale du relevé \hat{h}' de h' , de $D^2 \times S^1$ dans $D^2 \times S^1_\infty$. Si \hat{m} est un point de $D^2 \times S^1$, on a:

$$\hat{h}'(\hat{\varphi}_t(\hat{m})) = \hat{\psi}(a'(t, \hat{m}), \hat{h}'(\hat{m}))$$

où on désigne par $\hat{\psi}$ le relevé de ψ et par $a'(t, \hat{m})$ le réel $a'(t, m)$ (m est la projection de \hat{m} dans M .)

Le lemme 4.2 s'étend immédiatement à \hat{h}' ; c'est à dire que si $\hat{h}'(\hat{m}_1) = \hat{h}'(\hat{m}_2)$ et si \hat{m}_1 et \hat{m}_2 sont proches, alors \hat{m}_1 et \hat{m}_2 sont sur la même orbite de $\hat{\varphi}_t$, i.e. il existe t_0 tel que $\hat{m}_2 = \hat{\varphi}_{t_0}(\hat{m}_1)$.

Puisque $\hat{\varphi}_t$ n'a pas d'orbites périodiques, la condition $\hat{h}'(\hat{m}_1) = \hat{h}'(\hat{m}_2)$ s'écrit $a'(t_0, \hat{m}_1) = 0$, ou encore:

$$\frac{1}{T} \int_0^T a(t_0 + \tau, m) \, d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T a(\tau, m) \, d\tau.$$

Autrement dit, il suffit de trouver T tel que pour tout m , l'application:

$$t \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T a(t + \tau, m) \, d\tau = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} a(\tau, m) \, d\tau$$

soit croissante. Cette application est dérivable et sa dérivée est:

$$t \mapsto \frac{1}{T} (a(t + T, m) - a(t, m)).$$

Géométriquement, cette différence est la distance orientée sur la géodésique $u(x, \theta)$ entre les points $w(\pi\hat{\varphi}_t(x, \theta), \theta)$ et $w(\pi\hat{\varphi}_{t+T}(x, \theta), \theta)$. Le lemme 3.1 montre clairement que cette distance tend uniformément vers $+\infty$ quand T tend vers $+\infty$.

Par conséquent, si T est suffisamment grand, l'application \hat{h}' est localement injective et donc un homéomorphisme local. Il en est donc de même pour h' . La compacité de M et de $T_1(\Sigma)$ montre alors que h' est un revêtement.

Ceci achève la démonstration du lemme 4.4 et du théorème A. □

Une généralisation directe du lemme 4.4 en dimension supérieure semble difficile car le feuilletage stable n'est plus nécessairement de codimension 1 et les arguments de la partie 2 ne s'appliquent donc plus. Cependant, la même méthode nous donne le résultat suivant, généralisant la proposition 1.1.

THÉORÈME. 4.5. *Soit M^n une n -variété fermée admettant une métrique riemannienne à courbure négative constante. Soient g_1 et g_2 deux métriques riemanniennes sur M tels que les flots géodésiques associés sur le fibré unitaire tangent à M soient de type Anosov. Alors, ces flots géodésiques sont topologiquement équivalents.*

Démonstration. D'après [8], le feuilletage stable du flot géodésique de g_1 (ou de g_2) est transverse à la fibration en sphères S^{n-1} du fibré unitaire tangent à M . La démonstration est alors exactement celle faite aux parties 3 et 4 en remplaçant D^2 par B^n et S_∞^1 par S_∞^{n-1} . Dans ce cas, le revêtement $F_{+\infty}: S^{n-1} \rightarrow S_\infty^{n-1}$ est trivial si $n > 1$. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature. *Proc. Steklov Institute*, **90** (1967).
- [2] C. Camacho & A. Lins. Teoria geométrica das folheações. IMPA, Projeto Euclides (1979).
- [3] J. Franks. Anosov diffeomorphisms. *Proc. Sympos. Pure Math.* (Amer. Math. Soc.), **14** (1970), 61–91.
- [4] J. Franks & B. Williams. Anomalous Anosov flows. *Springer Lecture Notes in Math.* n° 819, 158–174.
- [5] S. Goodman. Dehn surgery on Anosov flows (à paraître).
- [6] M. Gromov. Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group. Preprint.
- [7] M. Handel & W. Thurston. Anosov flows on new three manifolds. *Invent. Math.* **59** (2) (1980), 95–103.
- [8] W. Klingenberg. Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type. *Ann. of Math.* **99** (1974), 1–13.

- [9] G. Levitt. Feuilletages des variétés de dimension trois qui sont des fibrés en cercles. *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 572–594.
- [10] C. F. B. Palmeira. Open manifolds foliated by planes. *Ann. of Math.* (1978), **107**, 109–131.
- [11] J. Plante. Foliations of 3-manifolds with solvable fundamental group. *Invent. Math.* **51** (1979), 219–230.
- [12] J. Plante. Anosov flows, transversally affine foliations and a conjecture of Verjovsky. Preprint.
- [13] J. Plante & W. Thurston. Anosov flows and the fundamental group. *Topology* **11** (1972), 147–150.
- [14] G. Reeb. Les espaces localement numériques non séparés et leurs applications à un problème classique. Colloque de Topologie de Strasbourg, 1955, (proceedings).
- [15] R. Roussarie. Plongements dans les variétés et classification des feuilletages sans holonomie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), 101–142.
- [16] P. Tomter. Anosov flows on infra-homogeneous spaces. *Proc. Symp. Pure Math.* **14** (1970), 299–328.
- [17] W. Thurston, Foliations on 3-manifolds which are circle bundles. Thesis, Berkeley 1972.
- [18] W. Thurston. The geometry and topology of 3-manifolds. Lecture notes, Princeton University.
- [19] A. Verjovsky. Codimension one Anosov flows. *Bol. Soc. Mexicana*, **19** (1974), pp. 49–77.