



Caractérisation des exemples de Lattès et de Kummer

Serge Cantat

ABSTRACT

Lattès and Kummer examples are rational transformations of compact kähler manifolds that are covered by an affine transformation of a compact torus. We present a few ergodic characteristic properties of these examples. The main results concern the case of surfaces.

RÉSUMÉ

Les exemples de Lattès et de Kummer sont les transformations rationnelles des variétés kählériennes compactes qui sont revêtues par un endomorphisme affine d'un tore. Nous étudions certaines propriétés caractéristiques de ces exemples, notamment en dimension 2.

1. Introduction

1.1 Endomorphismes dilatants

Soit M une variété compacte. Un endomorphisme f de M de classe \mathcal{C}^1 est *dilatant* s'il existe une métrique riemannienne sur M et un nombre réel χ strictement plus grand que 1 tels que

$$\|Df(v)\| \geq \chi \|v\|$$

pour tout vecteur v tangent à M .

Deux mesures de probabilité f -invariantes sont naturellement associées à un tel endomorphisme. La première, notée ν_f , est l'unique mesure de probabilité invariante qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de M ; si f est de classe \mathcal{C}^k , avec $2 \leq k \leq \omega$, alors ν_f est déterminée par une densité strictement positive de classe \mathcal{C}^{k-1} (voir [Sac74]). La seconde mesure, notée μ_f , est l'unique mesure d'entropie maximale de f . En général, μ_f n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et diffère donc de ν_f . Pour les endomorphismes du cercle définis par $\tau_d(z) = z^d$, $d \neq -1, 0, 1$, ces deux mesures coïncident avec la mesure de Haar du cercle.

D'après les travaux de Shub et Gromov, seules les infra-nilvariétés possèdent des endomorphismes dilatants et deux endomorphismes dilatants qui sont homotopes sont conjugués par un homéomorphisme (voir [Shu69] et [Gro81]). En particulier, l'entropie topologique d'un endomorphisme dilatant f est déterminée par son action f_* sur le groupe fondamental de M .

Appliquons ceci lorsque M est le cercle et que f est un endomorphisme dilatant de degré d et de classe \mathcal{C}^k . Il existe alors un homéomorphisme h du cercle conjuguant f à τ_d . L'entropie topologique de f est égale à $\log(|d|)$ et la mesure d'entropie maximale μ_f est égale à l'image réciproque $h^*\lambda$, où λ est la mesure de Haar du cercle. Pour que μ_f coïncide avec ν_f , il faut donc que h soit absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Il s'agit d'un phénomène rare. On dispose en effet du résultat suivant : deux endomorphismes du cercle f et g dilatants et de classe \mathcal{C}^k qui sont conjugués

Received 3 October 2006, accepted in final form 20 February 2008.

2000 Mathematics Subject Classification 37C40, 37F99, 14J28, 14J32, 14J50, 14E05.

Keywords: holomorphic dynamics, algebraic surfaces, Lattès examples.

Supported by the ANR project Simplexe.

This journal is © Foundation Compositio Mathematica 2008.

par un homéomorphisme absolument continu le sont automatiquement par un difféomorphisme de classe C^k (pour $2 \leq k \leq \omega$, voir [SS85]).

Dans certaines situations proches des situations holomorphes qui seront traitées dans cet article, la rigidité entraînée par l'égalité de ν_f et μ_f est encore plus forte. Par exemple, deux produits de Blaschke dilatants qui sont conjugués par un homéomorphisme absolument continu sont en fait conjugués par une homographie (voir [SS85, p. 289]). Ainsi lorsque f est un produit de Blaschke dilatant de degré d qui n'est pas conjugué à τ_d par une homographie, la mesure μ_f n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Nous retiendrons que, en dimension 1, la lissité ou l'absolue continuité de la mesure d'entropie maximale μ_f rigidifie la situation : l'endomorphisme est alors conjugué (respectivement C^k -conjugué, respectivement homographiquement conjugué) à l'endomorphisme de même degré le plus simple, à savoir τ_d .

De tels résultats ne sont plus valables en dimension plus grande que 1 pour les raisons suivantes. Si f et g sont conjugués par un difféomorphisme h les valeurs propres de Df en un point fixe p sont égales à celles de Dg en $h(p)$. Si μ_f est lisse, le jacobien de f en ses points périodiques est égal à d , où d est le degré topologique. En dimension 1, ceci fixe les valeurs propres de Df , mais en dimension plus grande, seul le produit des valeurs propres est ainsi fixé ; on peut donc changer les valeurs propres et anihiler l'existence d'une conjugaison lisse tout en préservant la mesure d'entropie maximale.

Exemple 1.1. Soient ϵ un nombre réel strictement positif et f_ϵ l'endomorphisme du tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ défini par

$$f_\epsilon(x, y) = (2x + 2\epsilon \sin(2\pi y), x + 2y + \epsilon \sin(2\pi y)).$$

L'endomorphisme f_ϵ est isotope à l'endomorphisme linéaire f_0 et la mesure de Haar du tore est l'unique mesure d'entropie maximale de f_ϵ . Puisque les valeurs propres de Df_ϵ aux points fixes de f_ϵ varient avec ϵ , l'endomorphisme f_0 n'est en général pas conjugué à f_ϵ par un difféomorphisme.

Dans cet article, nous allons obtenir des résultats analogues aux résultats rappelés ci-dessus mais pour des endomorphismes holomorphes et des transformations méromorphes de variétés complexes compactes kählériennes de dimension supérieure à 1. Nous ferons deux hypothèses. La première est de nature dynamique et consiste à supposer que la mesure d'entropie maximale de l'endomorphisme est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. La seconde est de nature cohomologique. L'hypothèse analogue pour les endomorphismes dilatants serait que f est isotope à une transformation linéaire dont tous les exposants de Lyapounoff sont égaux.

1.2 Dynamique des transformations rationnelles cohomologiquement dilatantes

Soient M une variété complexe compacte kählérienne de dimension d et $f : M \dashrightarrow M$ une transformation méromorphe de M . Nous noterons $d_t(f)$ le degré topologique de f ; au choix, $d_t(f)$ peut être défini comme le cardinal de l'ensemble $f^{-1}\{x\}$ pour un point générique de M ou comme l'entier par lequel f_* multiplie la classe fondamentale de M . La transformation f détermine également des opérateurs linéaires f^* sur chacun des groupes de cohomologie de Dolbeault de M . En général, il se peut que $(f \circ f)^*$ diffère de $f^* \circ f^*$. On considère donc, pour chaque groupe de cohomologie $H^{p,p}(M, \mathbb{R})$, la suite d'opérateurs $((f^k)^*)_{k \in \mathbb{N}}$ et l'on définit le p -ième degré dynamique $\lambda_p(f)$ par la formule

$$\lambda_p(f) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \| (f^k)^* \|^{1/k},$$

où $\| \cdot \|$ est une norme sur l'espace des endomorphismes linéaires de $H^{p,p}(M, \mathbb{R})$. En particulier, le degré topologique de f est égal à $\lambda_d(f)$. Si κ est une forme de Kähler sur M , il se trouve que

$$\lambda_p(f) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \int_M (f^k)^* \kappa^p \wedge \kappa^{d-p} \right\}^{1/k}.$$

Le lecteur pourra consulter [DS03], [Gue05] et [DS05] pour ce type de propriétés.

DÉFINITION 1.2. Une transformation rationnelle $f : M \dashrightarrow M$ d'une variété complexe compacte kählérienne de dimension d est dite *cohomologiquement dilatante* si $d_t(f) > \lambda_p(f)$ pour tout entier p compris entre 0 et $d - 1$.

Suite aux travaux de Fornaess et Sibony, Briend et Duval, Dinh et Sibony, et Guedj, nous savons que ces transformations jouissent de propriétés dynamiques remarquables qui les apparentent aux endomorphismes dilatants des variétés compactes. En particulier, les résultats suivants sont valables pour toute transformation rationnelle f sur une variété projective qui est cohomologiquement dilatante (voir [FS94, BD99, BD01, DS02a, DS03, Gue05, DS05, CLB05, DS06]) :

- (a) la transformation f possède une unique mesure invariante d'entropie maximale ; cette entropie vaut $\log(d_t(f))$;
- (b) toute fonction quasi-pluri-sous-harmonique est intégrable pour la mesure μ_f ; en particulier, μ_f ne charge pas les sous-ensembles analytiques stricts de M ;
- (c) parmi les mesures qui satisfont cette propriété, μ_f est caractérisée par la relation $f^* \mu_f = d_t(f) \mu_f$;
- (d) les points périodiques s'équirépartissent pour cette mesure et les exposants de Lyapounoff de cette mesure sont strictement positifs ;
- (e) les fonctions höldériennes satisfont un théorème limite central pour cette mesure.

Remarque 1.3. Il paraît donc intéressant de comparer plus précisément la dynamique des transformations rationnelles cohomologiquement dilatantes à celle des endomorphismes dilatants. Remarquons toutefois que tout endomorphisme holomorphe dilatant d'une variété compacte kählérienne est revêtu par une transformation affine d'un tore (ceci résulte sans peine de [Gro81] et [BG88] ou des arguments de [Can04]).

1.3 Exemples de Lattès et de Kummer

Les résultats de Shub et Gromov montrent que tout endomorphisme dilatant f est conjugué topologiquement au modèle algébrique auquel f est isotope. Dans le monde des transformations méromorphes, l'analogie de ces modèles algébriques est fourni par les exemples de Kummer.

DÉFINITION 1.4. Soit f une transformation méromorphe d'une variété complexe compacte M . Nous dirons que f est un *exemple de Kummer* s'il existe un tore complexe compact A , un groupe fini G d'automorphismes de A et un endomorphisme affine F de A tels que :

- (1) F passe au quotient en un endomorphisme \overline{F} de la surface A/G ;
- (2) il existe une transformation birationnelle $\pi : M \dashrightarrow A/G$ telle que $\pi \circ f = \overline{F} \circ \pi$.

Nous dirons que f est un *exemple de Lattès* si les modules des valeurs propres de la partie linéaire de F sont égaux et strictement supérieurs à 1.

Exemple 1.5. Commençons par rappeler le cas de la dimension 1 (voir [Mil06] pour les détails). Si une courbe possède un exemple de Lattès, le genre de cette courbe est égal à 0 ou 1. Pour construire un exemple de Lattès sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, on se donne une courbe elliptique E , un groupe fini cyclique non trivial G d'automorphismes de E fixant un point base e et une transformation affine $F : E \rightarrow E$ qui

commute à G . Le cardinal de G est alors égal à 2, 3, 4 ou 6, la courbe E/G est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et F passe au quotient en un exemple de Lattès $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Plus précisément, il existe une unique structure d'orbifold sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec des points singuliers situés sur l'ensemble post-critique de f pour laquelle f devient un endomorphisme d'orbifold. Suivant le cardinal de G , les listes des indices des singularités de l'orbifold valent $\{2, 2, 2, 2\}$, $\{3, 3, 3\}$, $\{2, 4, 4\}$ ou $\{2, 3, 6\}$; le revêtement de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ramifié aux trois ou quatre points de l'ensemble post-critique de f avec la liste d'indices de ramification ainsi prescrite coïncide avec E . L'endomorphisme f détermine donc l'application $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, le groupe G et la transformation affine F .

On remarquera que, en dimension 1, la distinction entre exemples de Kummer et exemples de Lattès n'a pas vraiment lieu d'être car tout exemple de Kummer dont le degré topologique est strictement supérieur à 1 est un exemple de Lattès.

Exemple 1.6. Soit $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ un exemple de Lattès de dimension 1. L'action diagonale de f sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^d$ détermine un exemple de Lattès de dimension d qui commute à l'action du groupe symétrique S_d par permutation des coordonnées. Passant au quotient, nous obtenons un exemple de Lattès sur $\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$.

Les deux exemples qui suivent concernent les surfaces K3. Ces dernières sont caractérisées par les deux propriétés suivantes : elles sont simplement connexes et possèdent une 2-forme holomorphe qui ne s'annule pas. Ces surfaces jouent un rôle central dans la classification d'Enriques–Kodaira. Nous les retrouverons fréquemment dans ce texte car les trois grandes familles de surfaces kählériennes compactes qui possèdent des transformations rationnelles cohomologiquement dilatantes sont les surfaces rationnelles, les tores, les surfaces K3 et leurs cousines les surfaces d'Enriques.

Exemple 1.7. Soient $A = \mathbb{C}^2/\Lambda$ un tore complexe compact et σ l'involution $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Soient L un endomorphisme linéaire du plan \mathbb{C}^2 qui préserve le réseau Λ et F_L l'endomorphisme de A déterminé par L . Les relations suivantes sont immédiates :

$$\begin{cases} d_t(F_L) = \det(L)^2, \\ \lambda_1(F_L^*) = \rho(L)^2, \end{cases}$$

où $\rho(L)$ est le rayon spectral de L . Puisque F_L commute avec σ , il est possible de passer au quotient sur la surface A/σ , dite surface de Kummer. Ceci détermine un endomorphisme de la surface de Kummer singulière ou, au choix, une transformation méromorphe de la surface de Kummer désingularisée. Ces transformations sont des exemples de Kummer et ce sont des exemples de Lattès lorsque $\rho(L)^2 = \det(L)$.

Exemple 1.8 (voir [BV94, BL94, Bar98]). Soit C une courbe elliptique et A le tore $C \times C$. Soit Φ un endomorphisme de A induit par une homothétie de \mathbb{C}^2 . Soit η la transformation d'ordre 3 définie par $\eta(x, y) = (y, -x - y)$. La surface A/η est une surface K3 avec neuf singularités cuspidales localement isomorphes à la singularité $uv = w^3$. L'endomorphisme Φ détermine une transformation rationnelle de la désingularisée de A/η pour laquelle $d_t(\Phi) = \rho(\Phi^*)^2$. Voici une construction alternative de A/η en se donnant C comme cubique lisse du plan projectif. La courbe duale de C est une sextique C' possédant neuf cusps, un par point d'inflexion de C . Le revêtement double du plan projectif dual ramifié le long de C' est isomorphe à A/η . Les surfaces K3 possèdent au plus neuf singularités cuspidales; celles qui en possèdent exactement neuf sont toutes obtenues de la sorte (voir [Bar98]).

1.4 Caractérisation des endomorphismes de Lattès

Les travaux de Zdunick en dimension 1, puis de Berteloot, Dupont et Loeb en dimension supérieure conduisent à la caractérisation suivante de certains endomorphismes de Lattès. Cet énoncé montre notamment que l'Exemple 1.1 n'a pas d'analogue pour les endomorphismes holomorphes de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

THÉORÈME A. *Soit $g : M \rightarrow M$ un endomorphisme holomorphe d'une variété projective complexe. Supposons qu'il existe une classe de Kähler $[\kappa]$ et un réel $\delta > 1$ tels que $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$. Si la mesure d'entropie maximale de g est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, g est un exemple de Lattès.*

Nous présenterons en annexe les adaptations nécessaires pour déduire ce résultat des travaux de Berteloot, Dupont et Loeb (voir [BL01, BD05]). Signalons dès à présent que l'existence d'une unique mesure d'entropie maximale pour g résulte des travaux de Briend et Duval, puis de Dinh et Sibony, mentionnés ci-dessus (voir [DS02a, Théorème 5.4.12]). Cet énoncé doit être pondéré par la remarque suivante : très peu de variétés possèdent des endomorphismes holomorphes et l'existence d'un endomorphisme g pour lequel il existe un tel couple $(\delta, [\kappa])$ avec $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$ est très restrictive (voir le dernier paragraphe de [Can03]); les exemples principaux sont les endomorphismes des espaces projectifs.

Remarque 1.9. Soit g un endomorphisme d'une variété projective M . Supposons que M et g soient définis sur un corps de nombres et qu'il existe un fibré en droites ample L sur M et un entier q strictement plus grand que 1 tels que $g^*L = L^{\otimes q}$ (on parle parfois de système dynamique polarisé, voir notamment [Zha06]). Il est alors possible d'associer à g une hauteur canonique \hat{h}_L vérifiant $g^*\hat{h}_L = q\hat{h}_L$ (voir [CS93] et [CG97], ou [Cha99] et [Zha95] pour le point de vue de la théorie d'Arakelov); cette hauteur se décompose en une somme de hauteurs aux places finies et aux places archimédiennes. Le théorème A montre que les hauteurs archimédiennes ne sont lisses que si g est un exemple de Lattès. Il serait intéressant d'obtenir des caractérisations plus arithmétiques de ces exemples.

1.5 Transformations méromorphes des surfaces

Le but principal de cet article est d'étendre le théorème précédent au cadre des transformations rationnelles. Nous ne traiterons que le cas des surfaces, mais les hypothèses faites seront plus souples que celles du théorème précédent.

Lorsque $f : X \dashrightarrow X$ est une transformation rationnelle d'une surface, on dispose de trois nombres, le degré topologique $d_t(f)$, le premier degré dynamique $\lambda_1(f)$ (que nous noterons simplement $\lambda(f)$) et le rayon spectral $\rho(f^*)$ de l'application linéaire $f^* : H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{1,1}(X, \mathbb{R})$, défini par

$$\rho(f^*) = \limsup_{k \rightarrow +\infty} (\| (f^*)^k \|^{1/k}).$$

Nous verrons au § 2.8 que les inégalités

$$d_t(f) \leq \lambda(f)^2 \leq \rho(f^*)^2$$

sont toujours valables. Le résultat principal que nous obtiendrons concerne le cas *résonnant*, ou *extrémal*, $d_t(f) = \rho(f^*)^2$ (ce qui force l'égalité $\lambda(f) = \rho(f^*)$).

Cette condition de résonance entre $d_t(f)$ et $\rho(f^*)$ n'est pas invariante par conjugaison birationnelle de f (tout comme la notion de transformation rationnelle algébriquement stable ou celle de feuilletage réduit au sens de Seidenberg). Ce qui compte, c'est donc que f soit birationnellement conjuguée à une transformation rationnelle pour laquelle cette résonance est satisfaite. C'est le cas pour tous les exemples de Lattès. Nous renvoyons à [Fav03] pour une discussion et des exemples instructifs. Le lecteur y trouvera en particulier des exemples simples pour lesquels $\lambda(f) < \rho(f^*)$ alors que $\lambda(f)^2 = d_t(f)$.

THÉORÈME B. *Soit f une transformation rationnelle d'une surface complexe compacte X dont le degré topologique est strictement plus grand que 1.*

- (a) *Si la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle et si $d_t(f) = \lambda(f)^2$, alors f est un exemple de Lattès.*

(b) Si X est kählérienne, si $d_t(f) = \rho(f^*)^2$ et si la mesure d'entropie maximale de f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors f est un exemple de Lattès.

Les deux énoncés sont reliés par la remarque suivante (voir la Proposition 3.16): lorsque la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle, la mesure d'entropie maximale de f est automatiquement lisse. L'assertion (a) peut donc être pensée comme un corollaire de l'assertion (b). Nous avons séparé ici les deux énoncés car la preuve que nous donnons de (a) ne fait pas usage d'outils provenant des systèmes dynamiques. En résumé, nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.10. Une transformation rationnelle f d'une surface projective complexe est un exemple de Lattès si, et seulement si f est birationnellement conjuguée à une transformation rationnelle f' pour laquelle $d_t(f')$ est égal à $\rho(f'^*)^2$ et $\mu_{f'}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le résultat qui suit montre que la minimalité des exposants de Lyapounoff de f vis-à-vis de la mesure μ_f est une propriété caractéristique des exemples de Lattès (voir [Dup06] pour les endomorphismes).

COROLLAIRE 1.11. Soit f une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante d'une surface complexe compacte kählérienne. Si ses exposants de Lyapounoff satisfont la condition de minimalité

$$\chi_1 = \chi_2 = \frac{1}{2} \log(d_t(f)/\rho(f^*)),$$

alors f est un exemple de Lattès.

Démonstration. On sait d'après [Gue05] que les exposants de Lyapounoff de f satisfont l'inégalité

$$\chi_1 + \chi_2 \geq \frac{1}{2} \log(d_t(f)).$$

L'inégalité $d_t(f) \leq \rho(f^*)^2$ et l'égalité

$$\chi_1 = \chi_2 = \frac{1}{2} \log(d_t(f)/\rho(f^*))$$

montrent alors que $d_t(f)$ est égal à $\rho(f^*)^2$. D'après [Dup06, Théorème 1.1], la mesure μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Le théorème précédent s'applique donc pour conclure. □

L'Exemple 1.1 montre que le Théorème B n'a pas d'analogue dans le monde des endomorphismes analytiques dilatants. Au § 3.7 nous verrons que la condition de 'résonance cohomologique' est nécessaire.

THÉORÈME C. Il existe une surface projective complexe X et une transformation rationnelle f de X qui vérifient les propriétés suivantes :

- (a) f est cohomologiquement dilatante et $\lambda(f) = \rho(f^*)$;
- (b) la dimension de Kodaira de X est nulle ;
- (c) l'unique mesure d'entropie maximale de f est lisse ;
- (d) f n'est pas topologiquement conjuguée à un exemple de Kummer.

Remarque 1.12. Si f est un difféomorphisme holomorphe d'une surface projective complexe dont l'entropie topologique est strictement positive, alors f possède une unique mesure d'entropie maximale (voir [Can01a]). Pour les exemples de Kummer, cette mesure est lisse et, dans [Can99] et [McM04], l'auteur et McMullen demandent si cette propriété caractérise les exemples de Kummer parmi les difféomorphismes holomorphes d'entropie positive. L'exemple fourni par le Théorème C montre que ce n'est pas le cas pour ce qui concerne les transformations rationnelles non inversibles.

Les méthodes employées pour obtenir ces énoncés permettront également de caractériser les exemples de Kummer par leur groupe de symétries lorsque la dimension de Kodaira de X est nulle (voir le § 3.6).

THÉORÈME D. *Soit $f : X \dashrightarrow X$ une transformation rationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne dont le degré topologique est strictement supérieur à 1. Supposons que la dimension de Kodaira de X est nulle et que f commute à une infinité d'automorphismes de X . Alors f est un exemple de Kummer.*

Il serait intéressant d'étendre ce type de résultat aux transformations rationnelles du plan projectif qui commutent avec une infinité de transformations birationnelles. Nous renvoyons le lecteur à [Din01], [DS02b] et [Can06] pour des questions similaires.

2. Transformations rationnelles des surfaces

Dans cette partie, nous décrivons quelques propriétés classiques concernant l'action des transformations rationnelles des surfaces complexes compactes sur les groupes de cohomologie de ces surfaces. Nous en tirerons des conséquences importantes lorsque la dimension de Kodaira de la surface est nulle.

2.1 Cohomologie

Si X est une surface complexe compacte, nous noterons $H^k(X, A)$ ses groupes de cohomologie à coefficients dans un anneau commutatif A . Nous noterons $\langle | \rangle$ la forme d'intersection sur le deuxième groupe de cohomologie de X . Les groupes $H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ désigneront les groupes de cohomologie de Dolbeault. Nous nous intéresserons tout particulièrement au groupe $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ ainsi qu'aux deux cônes suivants :

- (i) $H_{\text{psef}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$, le cône pseudo-effectif, constitué des classes de cohomologie des courants positifs fermés ;
- (ii) $H_{\text{nef}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$, le cône numériquement effectif, ou cône nef, constitué des classes de cohomologie $[\alpha]$ qui intersectent positivement tout élément de $H_{\text{psef}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$.

Lorsque X est kählérienne, le cône nef coïncide avec l'adhérence du cône de Kähler de X .

La classe de cohomologie ou d'homologie d'une forme, d'un courant ou d'une courbe V sera notée $[V]$. Si C est une courbe, le courant d'intégration sur C sera noté $\{C\}$.

2.2 Opération sur la cohomologie

Soient X et Y deux surfaces complexes compactes et $f : X \dashrightarrow Y$ une application méromorphe dominante. Soient Γ_f le graphe de f et $\pi_1 : \Gamma_f \rightarrow X$ et $\pi_2 : \Gamma_f \rightarrow Y$ les deux projections de ce graphe sur X et Y , de sorte que f soit égale à $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. Il se peut que Γ_f soit une sous-variété singulière de $X \times Y$. Dans ce cas, nous désingulariserons Γ_f sans pour autant changer les notations.

Soit α une forme différentielle de bidegré (p, q) sur Y . La forme différentielle $\pi_2^* \alpha$ détermine un courant de bidegré (p, q) sur Γ_f qui peut être poussé en un courant sur X à l'aide de π_1 . Le courant $(\pi_1)_*(\pi_2)^* \alpha$ obtenu par ce procédé sera noté $f^* \alpha$. Si α et β sont cohomologues, $f^* \alpha$ et $f^* \beta$ le sont aussi, ce qui montre que f^* induit un opérateur linéaire entre les groupes de cohomologie de Dolbeault de X et de Y ,

$$f^* : H^{p,q}(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^{p,q}(X, \mathbb{C}).$$

De manière analogue, la composée de $(\pi_1)^*$ et de $(\pi_2)_*$ détermine un opérateur linéaire $f_* : H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{p,q}(Y, \mathbb{C})$.

Remarque 2.1. (i) Les opérateurs f^* et f_* agissent au niveau des groupes de cohomologie à coefficients réels $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ et $H^{1,1}(Y, \mathbb{R})$.

(ii) Soit T un courant positif fermé de type $(1, 1)$ défini localement par un potentiel u (localement $T = i\partial\bar{\partial}u$). Nous pouvons alors définir l'image réciproque de T par π_2 en posant localement $(\pi_2)^*T = i\partial\bar{\partial}(u \circ \pi_2)$. Ceci permet d'étendre l'action de f^* et f_* aux $(1, 1)$ -courants positifs fermés.

(iii) Dualement, f^* correspond à l'action suivante sur les courbes : si C est une courbe tracée sur Y , $f^*(C)$ est l'image par la projection π_1 de la transformée totale $(\pi_2)^*(C)$.

2.3 Propriétés élémentaires

Nouse avons (voir [DF01, p. 1143]) :

- (i) f^* et f_* respectent les groupes de cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z} ou \mathbb{R} ;
- (ii) f^* et f_* respectent les cônes nef et pseudo-effectif ;
- (iii) f^* et f_* sont adjoints pour l'intersection ; ainsi, pour tout élément $[\alpha]$ du groupe $H^{1,1}(Y, \mathbb{R})$, et tout élément $[\beta]$ du groupe $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$,

$$\langle f^*[\alpha] | [\beta] \rangle = \langle [\alpha] | f_*[\beta] \rangle.$$

2.4 Indétermination et composition

Le lieu d'indétermination d'une application méromorphe dominante $f : X \dashrightarrow Y$ sera noté $\text{Lnd}(f)$. Nous désignerons par $\text{Exc}(f)$ l'union des courbes de X contractées par f sur des points de Y . Soit $g : Y \dashrightarrow Z$ une autre application méromorphe. Supposons que f contracte une courbe C sur un point d'indétermination q de g . L'ensemble

$$\{(x, z) \in X \times Z; \exists y \in Y, (x, y) \in \Gamma_f \text{ et } (y, z) \in \Gamma_g\}$$

contient alors une composante irréductible de dimension 2 se projetant sur C dans X et sur le diviseur effectif $g(q)$ dans Z . Cet ensemble est donc strictement plus gros que l'adhérence de Zariski des couples $(x, g(f(x)))$ où x varie hors de $\text{Lnd}(f)$ et de $f^{-1}(\text{Lnd}(g))$. Ce phénomène est responsable du problème suivant : en général, $f^* \circ g^*$ et $(g \circ f)^*$ ne coïncident pas.

PROPOSITION 2.2 (voir [DF01, p. 1144]). *Soient $f : X \dashrightarrow Y$ et $g : Y \dashrightarrow Z$ deux applications méromorphes dominantes entre surfaces complexes compactes. Pour tout élément $[\alpha]$ du cône nef $H_{\text{nef}}^{1,1}(Z, \mathbb{R})$,*

$$(g \circ f)^*[\alpha] \leq f^* \circ g^*[\alpha],$$

avec égalité dès que $f(\text{Exc}(f))$ et $\text{Lnd}(g)$ sont disjoints. Cette condition est nécessaire au cas d'égalité lorsque $[\alpha]$ est une classe de Kähler.

2.5 Formule d'aller-retour

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme holomorphe surjectif et si T est un courant positif fermé sur Y , alors $f_*f^*T = d_t(f)T$ où $d_t(f)$ est le degré topologique de f . Pour généraliser cette relation dans le cadre méromorphe, il convient d'introduire quelques notations. Pour cela, factorisons la projection $\pi_1 : \Gamma_f \rightarrow X$ en une suite de contractions de courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -1 ,

$$\pi_1 = \epsilon_1 \circ \epsilon_2 \circ \dots \circ \epsilon_m,$$

avec $X = X_0$, $X_m = \Gamma_f$ et chaque $\epsilon_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ une contraction. Notons E_i le diviseur exceptionnel de ϵ_i , E'_i sa transformée stricte dans Γ_f et \hat{E}_i sa transformée totale. Soient F_i les images des E'_i par π_2 et G_i les images des \hat{E}_i : chaque G_i est donc un diviseur effectif qui s'écrit comme une somme

pondérée des courbes F_j . Avec ces notations, on obtient la ‘formule d’aller-retour’ (voir [DF01, p. 1150])

$$f_*f^*T = d_t(f)T + \sum_{i=1}^m \langle [T] | [G_i] \rangle \{G_i\}$$

pour tout courant positif fermé T sur Y ($\{G_i\}$ désigne le courant d’intégration sur le diviseur G_i). De même, si $[\alpha]$ est un élément de $H^2(Y, \mathbb{C})$, alors

$$f_*f^*[\alpha] = d_t(f)[\alpha] + \sum_{i=1}^m \langle [\alpha] | [G_i] \rangle [G_i].$$

En particulier, nous en déduisons la relation

$$\langle f^*[\alpha] | f^*[\beta] \rangle = d_t(f) \langle [\alpha] | [\beta] \rangle + \sum_{i=1}^m \langle [\alpha] | [G_i] \rangle \langle [G_i] | [\beta] \rangle.$$

2.6 Degré topologique et formes holomorphes

Les groupes $H^4(X, \mathbb{Z})$ et $H^4(Y, \mathbb{Z})$ sont canoniquement isomorphes à \mathbb{Z} . L’application linéaire f_* est le morphisme ‘identité’ entre ces groupes et f^* est la multiplication par le degré de f , noté $d_t(f)$.

Considérons maintenant les groupes de Dolbeault $H^{2,0}(X, \mathbb{C})$ et $H^{2,0}(Y, \mathbb{C})$. Chaque élément de ce groupe est représenté par une unique 2-forme holomorphe. Si Ω est une telle forme sur Y , $f^*\Omega$ est une forme holomorphe en dehors de $\text{Ind}(f)$; celle-ci se prolonge donc en une forme holomorphe globale sur X par le procédé d’Hartogs. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux formes holomorphes sur Y ,

$$f^*\Omega_1 \wedge f^*\overline{\Omega_2} = f^*(\Omega_1 \wedge \overline{\Omega_2}) = d_t(f)\Omega_1 \wedge \overline{\Omega_2}.$$

Ainsi, f^* agit comme une similitude de rapport $\sqrt{d_t(f)}$ entre les espaces $H^{2,0}(Y, \mathbb{C})$ et $H^{2,0}(X, \mathbb{C})$ munis des produits scalaires hermitiens

$$\langle \Omega | \Omega' \rangle = \int \Omega \wedge \overline{\Omega'}.$$

Une étude analogue est bien entendu valable pour l’action de f^* sur les sections des puissances positives $K_X^{\otimes k}$ du fibré canonique.

2.7 Dimension de Kodaira et ramification

Supposons désormais que f est une transformation rationnelle dominante d’une surface complexe compacte X dans elle-même. Notons $\text{Crit}(f)$ l’ensemble des points de X où le déterminant jacobien de f s’annule. C’est un diviseur effectif qui contient $\text{Exc}(f)$.

Supposons un instant que la dimension de Kodaira de X est nulle et fixons une section non-nulle Ω du fibré $K_X^{\otimes k}$, avec k strictement positif. Quitte à multiplier Ω par un nombre réel strictement positif, la mesure positive définie localement par

$$\mu_X = (\Omega \wedge \overline{\Omega})^{1/k}$$

détermine une mesure de probabilité sur X qui ne dépend pas des choix de k et Ω . Cette mesure est canoniquement associée à la structure complexe de X et sera baptisée ‘mesure canonique’. Les arguments du paragraphe précédent fournissent les lemmes suivants (voir aussi [Kob98, § 7.6]).

LEMME 2.3. *Soit X une surface complexe compacte dont la dimension de Kodaira est nulle. Si f est une transformation rationnelle de X , alors $f_*\mu_X = \mu_X$ et $f^*\mu_X = d_t(f)\mu_X$.*

LEMME 2.4. *Soit X une surface complexe compacte minimale dont la dimension de Kodaira est nulle. L’ensemble critique de toute transformation rationnelle dominante de X est vide. En particulier, $\text{Exc}(f)$ est vide et donc $(f^*)^n = (f^n)^*$ pour tout entier positif n .*

2.8 Degré dynamique et rayon spectral

Munissons l'espace vectoriel réel $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ d'une norme $\|\cdot\|$ et notons également $\|\cdot\|$ la norme d'opérateurs associée. Nous noterons $\lambda(f)$ le rayon spectral de la suite d'opérateurs $(f^n)^*$, défini par

$$\lambda(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(f^n)^*\|^{1/n}.$$

Nous noterons $\rho(f^*)$ le rayon spectral de l'opérateur f^* . Les résultats principaux de ce texte concernent le cas d'égalité $d_t(f) = \rho(f^*)^2$; le lemme suivant montre qu'il s'agit d'un cas extrémal (voir par exemple [Gue05]).

LEMME 2.5. *Soit f une transformation rationnelle dominante d'une surface complexe compacte kählérienne. Si $d_t(f)$ est strictement supérieur à 1, alors $\lambda(f)$ et $\rho(f^*)$ sont également strictement supérieurs à 1. D'autre part,*

$$d_t(f) \leq \lambda(f)^2 \leq \rho(f^*)^2.$$

Remarque 2.6. (i) Puisqu'il se peut que $(f^n)^*$ diffère de $(f^*)^n$, il arrive que le rayon spectral de f^* majore strictement $\lambda(f)$ (voir [Fav03]).

(ii) Lorsque la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle, le Lemme 2.4 montre que f ne contracte aucune courbe, ce qui entraîne $(f^n)^* = (f^*)^n$. Dans ce cas, $\lambda(f)$ est égal à $\rho(f^*)$.

(iii) Puisque f^* et f_* sont adjoints pour la forme d'intersection sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$, le rayon spectral de f^* est égal à celui de f_* , i.e. $\rho(f_*) = \rho(f^*)$.

2.9 Classes et courants invariants

Rappelons que f est désormais une transformation rationnelle dominante d'une surface complexe compacte X qui est kählérienne. Les cônes convexes saillants $H_{\text{nef}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ et $H_{\text{psef}}^{1,1}(X, \mathbb{R})$ sont donc d'intérieur non vide. Puisque f^* et f_* préservent ces cônes, ils y admettent des vecteurs propres; le théorème de Perron–Frobenius assure d'ailleurs l'existence d'une classe nef $[\alpha]$ (respectivement $[\beta]$) telle que $f^*[\alpha] = \rho(f^*)[\alpha]$ (respectivement $f_*[\beta] = \rho(f^*)[\beta]$).

LEMME 2.7.

- (a) *Pour tout élément $[\alpha]$ du cône pseudo-effectif qui est un vecteur propre pour f^* (respectivement f_*), il existe un courant positif fermé T qui est un vecteur propre pour f^* (respectivement f_*) et dont la classe de cohomologie est égale à $[\alpha]$.*
- (b) *Lorsque la valeur propre de $[\alpha]$ diffère de 1 et que la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle, ce courant est unique.*

Démonstration. Notons $\mathcal{C}_+([\alpha])$ l'ensemble des courants positifs fermés T dont la classe de cohomologie $[T]$ est égale à $[\alpha]$. C'est un convexe compact (car X est kählérienne) non vide (car la classe $[\alpha]$ est pseudo-effective). Si ν désigne la valeur propre de $[\alpha]$, $(1/\nu)f^*$ agit linéairement et continûment sur $\mathcal{C}_+([\alpha])$, donc y possède un point fixe, ce qui montre la première assertion.

Supposons maintenant que la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle. Soit k un entier strictement positif suffisamment divisible pour que $K_X^{\otimes k}$ ait des sections non nulles. Nous pouvons alors choisir une section Ω de ce fibré qui soit un vecteur propre pour f^* . La mesure μ définie localement par $(\Omega \wedge \bar{\Omega})^{1/k}$ est donc une mesure lisse satisfaisant $f^*\mu = d_t(f)\mu$ et $f_*\mu = \mu$ (cf. § 2.7). Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{C}_+([\alpha])$. Il existe alors une unique fonction intégrable $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$T_1 = T_2 + i\partial\bar{\partial}u \quad \text{et} \quad \int_X u d\mu = 0.$$

La quantité $\Delta(T_1, T_2) = \int_X |u| d\mu$ est nulle précisément lorsque T_1 et T_2 coïncident. Supposons maintenant que T_1 et T_2 sont deux points fixes de $(1/\nu)f^*$. D'une part

$$\frac{1}{\nu}f^*(T_1 - T_2) = T_1 - T_2 = i\partial\bar{\partial}u,$$

d'autre part

$$\frac{1}{\nu}f^*(T_1 - T_2) = i\partial\bar{\partial}\left(\frac{1}{\nu}u \circ f\right).$$

Puisque f_* préserve μ , $u \circ f$ est aussi de moyenne nulle. Nous en déduisons donc que

$$\Delta(T_1, T_2) = \int_X |u| d\mu = \int_X \frac{1}{\nu}|u \circ f| d\mu = \frac{1}{\nu} \int_X |u|f_* d\mu = \frac{1}{\nu}\Delta(T_1, T_2),$$

ce qui montre que $\Delta(T_1, T_2)$ s'annule lorsque ν est différent de 1. □

3. Dimension de Kodaira positive

Dans cette partie nous montrons la première assertion du Théorème B, dont voici l'énoncé.

THÉORÈME 3.1. *Soit f une transformation rationnelle non inversible d'une surface complexe compacte X dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Si $d_t(f) = \lambda(f)^2$, alors f est un exemple de Lattès.*

Nous distinguerons plusieurs cas suivant la géométrie de la surface X . Nous pourrions traiter directement le cas général, mais cela alourdirait la présentation. En utilisant le B, A, BA de la classification d'Enriques–Kodaira, les difficultés apparaîtront progressivement et nous obtiendrons régulièrement des résultats plus précis que ce qu'annonce le Théorème B.

Dans la suite de cette partie, f sera donc une transformation rationnelle non inversible d'une surface complexe compacte X dont la dimension de Kodaira est positive ou nulle. Nous pouvons en outre supposer, ce que nous ferons, que X est une surface minimale.

3.1 Dimension de Kodaira strictement positive

Soit X une surface dont la dimension de Kodaira, notée $\text{kod}(X)$, est strictement positive. Lorsque $\text{kod}(X)$ est égale à 2, toute transformation méromorphe dominante de X est un automorphisme d'ordre fini (voir [Kob98, p. 376, Théorème 7.6.1]). Lorsque $\text{kod}(X)$ est égale à 1, la fibration d'Iitaka $\Theta : X \rightarrow B$ détermine une fibration elliptique (singulière) sur X qui est invariante par toute transformation méromorphe de X . Plus précisément, à toute application méromorphe dominante $f : X \dashrightarrow X$ est associé un automorphisme $\bar{f} : B \rightarrow B$ d'ordre fini tel que $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$. La transformation méromorphe f permute donc périodiquement les fibres génériques de Θ en y agissant comme un endomorphisme de degré $d_t(f)$. En particulier, les quantités $d_t(f)$ et $\rho(f^*)$ sont égales et ne satisfont jamais $d_t(f) = \rho(f^*)^2 > 1$.

3.2 Tores, surfaces hyperelliptiques

Le paragraphe précédent nous permet désormais de supposer que la dimension de Kodaira de X est égale à 0. Dans cette situation, X possède un unique modèle minimal qui peut être :

- (a) un tore ou l'un de ses quotients par un groupe fini d'automorphismes sans point fixe (on parle de surface hyperelliptique, voir [BPV84, p. 148]),
- (b) une surface de Kodaira primaire ou secondaire (voir [BPV84, pp. 146–147]),
- (c) une surface K3 ou le quotient d'une telle surface par une involution holomorphe sans point fixe (on parle de surface d'Enriques).

Dans ce paragraphe nous traitons le premier cas. Le deuxième cas concerne des surfaces non kählériennes. Il fait l'objet de l'Annexe B. Nous y expliquons que la relation $d_t(f) = \rho(f^*)^2$ ne peut avoir lieu pour une transformation méromorphe d'une surface de Kodaira.

Remarquons dès à présent que, lorsque X est un tore, une surface hyperelliptique ou une surface de Kodaira, le revêtement universel de X est biholomorphe au plan affine complexe \mathbb{C}^2 . Ainsi, toute application de la droite projective complexe à valeurs dans X est constante et toute transformation méromorphe de X est un endomorphisme.

Toutes les surfaces hyperelliptiques sont construites par le procédé suivant. On se donne deux courbes elliptiques E et C , un groupe fini G de translations sur C et un morphisme de G dans les automorphismes de E dont l'image ne contient pas que des translations. La surface X est alors le quotient de $E \times C$ par l'action diagonale de G . La projection de X sur C est la fibration d'Albanese de X et est donc invariante par tout endomorphisme de X .

Exemple 3.2. Soit E une courbe elliptique et G le groupe d'automorphismes de $E \times E$ d'ordre 2 engendré par l'involution $(x, y) \mapsto (-x, y + \epsilon)$ où ϵ est un point de torsion d'ordre 2 de E . Les endomorphismes de $E \times E$ de la forme $(2dx + 2d'y, 2d'y)$ passent au quotient et déterminent des endomorphismes de X qui sont des exemples de Kummer. Ce sont des exemples de Lattès lorsque d est égal à d' .

PROPOSITION 3.3. *Soit $f : M \dashrightarrow M$ une transformation rationnelle dominante d'une variété complexe compacte M . Si $K_M^{\otimes q}$ est trivial pour un certain entier $q > 0$, f se relève en une transformation rationnelle d'un revêtement fini M' de M dont le fibré canonique est trivial.*

Démonstration. Ce résultat résulte du 'covering-trick'. Nous en donnons une preuve détaillée car nous utiliserons régulièrement cet argument dans les paragraphes suivants, avec moins de détails.

L'hypothèse entraîne l'existence d'une section Ω de $K_M^{\otimes q}$ qui est unique à un facteur multiplicatif près. Il existe donc un nombre complexe non nul β tel que $f^*\Omega = \beta\Omega$ et $f_*\Omega = (d_t(f)/\beta)\Omega$. Notons K_1 l'espace total du fibré K_M , K_q celui de $K_M^{\otimes q}$ et $p_q : K_1 \rightarrow K_q$ l'élévation à la puissance q dans les fibres. Soit n la dimension de la variété M . Puisque $f^*\Omega = \beta\Omega$, le lieu critique de f est vide. Nous pouvons définir une transformation méromorphe f_* de K_1 dans K_1 par

$$f_*(x, \xi) = (f(x), (\beta/d_t(f))^{1/q} f_*\xi_x), \quad \forall x \in M, \quad \forall (x, \xi_x) \in K_1,$$

où $f_*\xi_x$ est défini par la formule

$$f_*\xi_x(v_1, \dots, v_n) = \xi_x(Df_{f(x)}^{-1}(v_1), \dots, Df_{f(x)}^{-1}(v_n)), \quad \forall v_1, \dots, v_n \in T_x M.$$

De même, f s'étend en une transformation méromorphe $f_*(x, \eta) = (f(x), f_*(\eta))$ de K_q , avec $f_* \circ p_q = p_q \circ f_*$. Notons alors M' la sous-variété de K_1 constituée des points (x, ξ) de K_1 pour lesquels $p_q(x, \xi) = \Omega_x$. La variété M' est un revêtement de M de degré q (si Ω s'annulait, ce revêtement serait ramifié le long des zéros de Ω) dont le fibré canonique est trivial et $f_* : K_1 \dashrightarrow K_1$ relève f en une transformation méromorphe de M' . □

Sur une surface hyperelliptique, le fibré canonique n'est pas trivial, mais l'une de ses puissances $K_X^{\otimes q}$ l'est, avec $q \in \{2, 3, 4, 6\}$. Par construction, le revêtement d'ordre q de cette surface obtenu par le 'covering-trick' est un tore. Nous obtenons donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4. *Toute transformation méromorphe dominante d'une surface hyperelliptique est un exemple de Kummer.*

3.3 Surfaces K3 et surfaces d'Enriques

Nous abordons maintenant la situation la plus délicate : celle des surfaces K3 ou de leurs quotients, les surfaces d'Enriques. Ceci terminera l'étude des transformations rationnelles des surfaces dont la

dimension de Kodaira est positive ou nulle. Le second cas délicat sera celui des surfaces rationnelles, qui sera traité dans la partie suivante.

Le point de départ est le lemme suivant, qui utilise les notations des paragraphes 2.5 et 2.8.

LEMME 3.5. *Soient X une surface complexe compacte, $f : X \dashrightarrow X$ une transformation méromorphe dominante et $[\alpha]$ une classe nef telle que $f^*[\alpha] = \lambda[\alpha]$, avec $\lambda^2 = d_t(f)$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\forall i = 1, \dots, m, \langle [\alpha] | [G_i] \rangle = 0$;
- (ii) $f_*[\alpha] = \lambda[\alpha]$;
- (iii) les transformations linéaires f_* et f^* préservent l'hyperplan $[\alpha]^\perp$ de $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ constitué des classes de cohomologie orthogonales à $[\alpha]$ pour la forme d'intersection.

Démonstration. La formule d'aller-retour conduit à l'égalité

$$\sum_{i=1}^m \langle [\alpha] | [G_i] \rangle^2 = 0,$$

ce qui montre le premier point. Appliquant à nouveau la formule d'aller-retour nous obtenons la propriété (ii). Le troisième point résulte alors de ce que f^* et f_* sont adjoints pour la forme d'intersection. □

3.4 Endomorphismes d'orbifolds

Soit Y un ensemble analytique complexe compacte de dimension k . Les singularités de Y sont des *singularités quotient* si, pour chaque point a de Y , on dispose d'un voisinage \mathcal{U} de a et d'un isomorphisme $\varphi : \tilde{\mathcal{U}}/G \rightarrow \mathcal{U}$ où :

- (i) $\tilde{\mathcal{U}}$ est un ouvert de \mathbb{C}^k contenant l'origine et $\varphi(0) = a$;
- (ii) le groupe G est un sous-groupe fini du groupe linéaire $GL(k, \mathbb{C})$;
- (iii) les points fixes de chaque élément de G forment un ensemble de codimension 2 (ce que l'on peut toujours supposer quitte à changer G et φ).

Si l'on restreint l'ouvert \mathcal{U} , le groupe G s'identifie au groupe fondamental local de Y au voisinage de a ; l'uniformisation $(\tilde{\mathcal{U}}, G, \varphi)$ de Y au voisinage de a est alors unique à isomorphisme près. Il est donc possible d'associer à Y une structure d'orbifold qui ne dépend que de sa structure d'espace analytique (voir [Thu77] et [Cam04]).

Par la suite, les variétés à singularités-quotient seront munies de cette structure d'orbifold. Les notions de métrique hermitienne, métrique kählérienne, forme holomorphe ou endomorphisme seront à prendre au sens des orbifolds (voir [Thu77] et [Cam04]).

PROPOSITION 3.6. *Soit X une surface K3 ou une surface d'Enriques. Soit f une transformation rationnelle de X pour laquelle $d_t(f) = \lambda(f)^2$. Il existe une surface singulière Y et un morphisme birationnel $\epsilon : X \rightarrow Y$ tels que les singularités de Y sont des singularités isolées de type quotient et $\epsilon \circ f \circ \epsilon^{-1} : Y \rightarrow Y$ est un endomorphisme d'orbifold.*

Remarque 3.7. Lorsque Y n'a que des singularités de type quotient, toute application holomorphe $f : Y \rightarrow Y$ est automatiquement un endomorphisme d'orbifold. Il suffira donc de montrer que $\epsilon \circ f \circ \epsilon^{-1}$ est holomorphe.

Démonstration. Notons λ le nombre $\lambda(f)$. D'après le § 2.7, nous savons que le lieu critique de f est vide, que $(f^*)^n$ coïncide avec $(f^n)^*$ pour tout entier positif n et que le rayon spectral $\rho(f^*)$ est égal à λ . Le § 2.9 montre alors qu'il existe au moins une classe nef non nulle $[\alpha]$ telle que $f^*[\alpha] = \lambda[\alpha]$.

(i) Supposons tout d’abord qu’il soit possible de choisir une telle classe $[\alpha]$ pour laquelle $\langle [\alpha] | [\alpha] \rangle > 0$. Le théorème de l’indice de Hodge assure alors que la forme d’intersection est définie négative en restriction à l’hyperplan $[\alpha]^\perp$. Les courbes situées dans cet hyperplan sont donc en nombre fini et le théorème de Grauert permet de les contracter : ceci détermine un morphisme birationnel $\epsilon : X \rightarrow Y$ vers une surface normale à singularités isolées.

Puisque $c_1(X)$ est nulle, chaque courbe E située dans $[\alpha]^\perp$ est une courbe rationnelle lisse d’auto-intersection -2 . Les singularités de Y sont donc des singularités de Klein de type A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 ; il existe donc un voisinage de chaque singularité qui est isomorphe au quotient d’un voisinage de l’origine dans \mathbb{C}^2 par un sous-groupe fini de $SL(2, \mathbb{C})$ (voir [Lau71] et [DHS79]). Puisque $[\alpha]^\perp$ est invariant sous l’action de f^* et f_* , f induit une transformation holomorphe de Y .

(ii) Supposons désormais que toute classe nef $[\alpha]$ satisfaisant $f^*[\alpha] = \lambda[\alpha]$ est d’auto-intersection nulle. Ceci signifie que l’espace propre de valeur propre λ pour f^* intersecte le cône nef sur une demi-droite isotrope $\mathbb{R}^+[\alpha]$. Cette demi-droite contient nécessairement un élément non nul de $H^2(X, \mathbb{Z})$. Considérons en effet l’espace propre $V_{d_t(f)}$ de $(f^*)^2$ associé à la valeur propre entière $\lambda^2 = d_t(f)$. La droite $\mathbb{R}[\alpha]$ coïncide avec le noyau de la restriction de la forme d’intersection à $V_{d_t(f)}$. Comme $V_{d_t(f)}$ et la forme d’intersection sont définis sur \mathbb{Q} , la droite $\mathbb{R}^+[\alpha]$ est elle-même définie sur \mathbb{Q} , ce qui prouve l’affirmation.

Nous pouvons donc supposer que $[\alpha]$ est une classe entière. Soit $L([\alpha])$ l’unique fibré en droites sur X de classe de Chern $[\alpha]$ (sur une surface K3 ou une surface d’Enriques, $\text{Pic}^0(X)$ est trivial). La formule de Riemann–Roch fournit l’estimation

$$h^0(X, L([\alpha])) + h^0(X, L([\alpha])^*) \geq 2.$$

Comme $[\alpha]$ est une classe nef, $h^0(X, L([\alpha])^*)$ est nul et le fibré $L([\alpha])$ possède un pinceau de sections qui détermine une fibration elliptique sur X (appliquer la formule d’adjonction). La classe $[\alpha]$ étant une classe propre pour f^* et f_* , la fibration $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ainsi construite est préservée par f ; il existe donc un endomorphisme \bar{f} de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tel que $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$. De $f^*[\alpha] = \lambda[\alpha]$, nous déduisons que l’image réciproque d’une fibre générique F de π est l’union de λ fibres – autrement dit, le degré de \bar{f} est égal à λ . De même, l’image par f d’une fibre générique F_z revêt λ fois la fibre image $F_{\bar{f}(z)}$.

Pour conclure, il suffit maintenant de démontrer les deux lemmes suivants. □

LEMME 3.8. *Soit $f : X \dashrightarrow X$ une transformation méromorphe dominante d’une surface complexe compacte. Soit $\pi : X \rightarrow B$ une fibration elliptique (éventuellement singulière) de X . Supposons que f préserve la fibration π , ce qui signifie qu’il existe un endomorphisme \bar{f} de B tel que $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$. Si le degré topologique de \bar{f} est strictement supérieur à 1, la fibration π est isotriviale.*

Démonstration. Pour chaque point b de la base B , nous noterons E_b la fibre $\pi^{-1}(b)$. L’invariant modulaire des fibres de π détermine une fonction méromorphe $J : B \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pour des courbes dans une même classe d’isogénie, l’invariant J prend des valeurs dans un ensemble discret de \mathbb{C} ; si m est une valeur régulière de π , il existe donc un voisinage \mathcal{U} de m dans B tel que toutes les fibres de π au-dessus de \mathcal{U} qui sont isogènes à E_m sont en fait isomorphes à E_m . Ainsi, s’il existe une suite de fibres isogènes à E_m qui tend vers E_m , l’invariant modulaire J est constant et la fibration est isotriviale.

Puisque f est dominante, la restriction de f à une fibre générique E_b est un revêtement de E_b sur $E_{\bar{f}(b)}$. Le long d’une orbite de \bar{f} , les fibres de π sont donc toutes isogènes.

Puisque le degré de \bar{f} est strictement supérieur à 1 sa dynamique est riche (voir [Mil99]). En particulier, si l’on choisit un point au hasard m dans l’ensemble de Julia de \bar{f} , l’orbite de m est infinie, évite les valeurs critiques de π et possède une sous-suite $\bar{f}^{n_j}(m)$ qui converge vers m : ceci détermine une suite de fibres E_j qui tendent vers E_m et qui sont toutes isogènes à E_m . La fibration est donc isotriviale. □

LEMME 3.9. Soit $f : X \dashrightarrow X$ une transformation méromorphe dominante d’une surface complexe compacte. Soit $\pi : X \rightarrow B$ une fibration elliptique isotriviale de X . Si f préserve la fibration π , il existe un morphisme birationnel $\epsilon : X \rightarrow Y$ vers un orbifold Y et un endomorphisme f' de l’orbifold Y tel que $f' \circ \epsilon = \epsilon \circ f$.

Démonstration. Dans toute la suite, nous noterons E la fibre générique de π et \mathbb{D} le disque unité de \mathbb{C} . Les fibres singulières des fibrations elliptiques isotriviales sont connues (voir [BPV84, § V.10]). Quitte à effectuer un morphisme birationnel $X \rightarrow Y$ qui préserve la fibration π mais qui transforme X en une surface singulière Y , nous pouvons supposer que le voisinage de chaque fibre singulière de $\pi : X \rightarrow B$ devient dans Y un voisinage isomorphe au quotient du produit $\mathbb{D} \times E$ par l’action d’un groupe fini cyclique d’ordre 2, 3, 4 ou 6. Ce groupe agit par rotations sur le disque \mathbb{D} et multiplie simultanément la fibre E par une racine de l’unité (voir [BPV84, § V.10]). Les singularités de la surface Y situées le long de chaque fibre singulière sont des singularités-quotient qui correspondent aux points fixes de G . Les fibres singulières de X correspondent dans Y à des courbes rationnelles lisses (de type E/G) qui passent par les singularités de Y .

Montrons que la transformation rationnelle f devient holomorphe sur Y . Supposons que F soit une fibre de π sur laquelle f possède un point d’indétermination z . Notons F_0 la fibre de π contenant l’image de la fibre F . Puisque F_0 contient le diviseur $f(z_0)$ constitué de courbes rationnelles, la fibre F_0 est singulière. Nous pouvons donc fixer un voisinage \mathcal{U} de F et un voisinage \mathcal{V} de F_0 tels que : (i) $f(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ et (ii) \mathcal{U} est isomorphe au quotient du produit $\mathbb{D} \times E$ par un groupe fini cyclique G . Factorisons f en une suite d’éclatements $\nu : \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{V}$ et un morphisme $\eta : \hat{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{U}$, de sorte que $f = \eta \circ \nu^{-1}$.

Supposons d’abord que F est une fibre régulière de π , de sorte que le groupe fondamental de $\hat{\mathcal{V}}$ est isomorphe au groupe fondamental de la fibre \mathbb{Z}^2 . Nous pouvons alors relever l’application η en un morphisme de $\hat{\mathcal{V}}$ vers $\mathbb{D} \times E$. Puisque toute application de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans E est constante, ceci contredit l’existence d’un point d’indétermination.

Supposons maintenant que la fibre F est elle-même une fibre singulière ou multiple. Nous pouvons alors choisir \mathcal{V} de la forme $(\mathbb{D} \times E)/G'$. En notant $\kappa : \mathbb{D} \times E \rightarrow \mathcal{V}$ la projection de $\mathbb{D} \times E$ sur $(\mathbb{D} \times E)/G'$ et en remplaçant f par $f \circ \kappa$ dans l’argument précédent, nous obtenons le résultat cherché : f est holomorphe dans un voisinage de F . □

3.5 Endomorphismes des orbifolds de Calabi–Yau et conclusion

Pour démontrer la première assertion du Théorème B il suffit désormais de classer les endomorphismes d’orbifolds des surfaces K3 et d’Enriques singulières (voir le début du § 3.4 pour la notion d’orbifold). Par le ‘covering-trick’, il suffit de traiter le cas des surfaces K3. L’argument étant valable pour les variétés de Calabi–Yau de dimension arbitraire, nous le présenterons dans ce cadre, ce qui nécessite quelques définitions.

Soit $f : Y \rightarrow Y$ un endomorphisme d’une variété complexe compacte de dimension k (éventuellement singulière). Pour tout entier p compris entre 0 et k , nous noterons $\lambda_p(f)$ le rayon spectral de la transformation linéaire $f^* : H^{p,p}(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ (voir le § 1.2). Lorsque p est égal à k , ceci correspond au degré topologique de f .

PROPOSITION 3.10. Soit Y une variété de Calabi–Yau singulière de dimension k dont les singularités sont de type quotient. Soit $f : Y \rightarrow Y$ un endomorphisme d’orbifold satisfaisant $d_t(f) > \lambda_{k-1}(f)$. Alors f est un exemple de Kummer.

Remarque 3.11. D’après [Gue05, Proposition 1.2 et Remarque 1.3], l’inégalité $d_t(f) > \lambda_{k-1}(f)$ assure que le degré topologique $d_t(f)$ est strictement plus grand que tous les rayons spectraux $\lambda_p(f)$ pour p entre 0 et $k - 1$; en particulier, f est cohomologiquement dilatante (cf. Définition 1.2).

Remarque 3.12. D'après un résultat célèbre de Bogomolov, si M est une variété complexe compacte kählérienne dont le première classe de Chern est nulle, il existe un revêtement fini de M qui est isomorphe au produit d'un tore par une variété simplement connexe à fibré canonique trivial. Ce résultat subsiste dans la catégorie des orbifolds (voir [Cam04]): si M est une variété complexe compacte à singularités-quotient qui est un orbifold kählérien avec une première classe de Chern nulle, il existe un revêtement (d'orbifold) fini de M qui est isomorphe au produit d'un tore par un orbifold simplement connexe à fibré canonique trivial. La simple connexité doit être prise au sens des orbifolds. En particulier, la partie simplement connexe ne possède pas d'endomorphisme d'orbifold de degré plus grand que 1 (car les endomorphismes surjectifs sont des revêtements, § 2.7).

Démonstration de la Proposition 3.10. Soit $f : Y \rightarrow Y$ un endomorphisme d'un orbifold de Calabi–Yau. D'après la Remarque 3.12, le revêtement universel \tilde{Y} de Y (au sens des orbifolds) est le produit d'un orbifold de Calabi–Yau simplement connexe Z par l'espace affine \mathbb{C}^l , avec $l + \dim(Z) = \dim(Y)$. Puisque Z est simplement connexe, tout endomorphisme de l'orbifold Z est un automorphisme.

L'endomorphisme f se relève au revêtement universel de Y en un endomorphisme d'orbifold. Puisque \mathbb{C}^l ne contient pas de sous-ensemble analytique compact de dimension strictement positive, le relevé de f préserve la fibration de \tilde{Y} sur \mathbb{C}^l et agit par automorphisme dans les fibres Z . Ainsi, lorsque la dimension de Z est strictement positive, l'entier l est inférieur ou égal à $k - 1$ et le degré topologique de f est égal à $\lambda_l(f)$, ce qui contredit la Remarque 3.11. Ceci montre que $l = \dim(Y)$, que Y est revêtue par un tore et que f se relève en un endomorphisme d'un tore (voir [Cam04]). Autrement dit, $f : Y \rightarrow Y$ est un exemple de Kummer. \square

Démonstration du Théorème 3.1. D'après le § 3.1 et l'Annexe B, les surfaces (minimales) de dimension de Kodaira positive qui admettent éventuellement des transformations rationnelles avec $d_t(f) = \lambda(f)^2 > 1$ sont les tores, les surfaces hyperelliptiques, les surfaces K3 et les surfaces d'Enriques. Le cas des tores et des surfaces hyperelliptiques a été traité au § 3.2, celui des surfaces K3 et des surfaces d'Enriques vient d'être traité. \square

3.6 Symétries des transformations rationnelles

Le but de ce paragraphe est de montrer le Théorème D. La preuve est évidente pour les tores et les surfaces hyperelliptiques, puisque toute transformation méromorphe dominante sur une telle surface est un exemple de Kummer. La preuve est identique pour les surfaces K3 et les surfaces d'Enriques. Il suffit donc de considérer le cas des surfaces K3.

Précisons les notations. Soit $f : X \dashrightarrow X$ une transformation rationnelle d'une surface K3. Le groupe des automorphismes de X qui commutent avec f sera noté $C(f)$ et appelé centralisateur de f . Puisque toute transformation birationnelle de X est un automorphisme, ce groupe coïncide avec l'ensemble des transformations birationnelles qui commutent avec f .

THÉORÈME 3.13. *Soit f une transformation méromorphe d'une surface K3 dont le degré topologique est strictement plus grand que 1. Si le centralisateur de f est infini, f est un exemple de Kummer.*

Pour la démonstration, nous aurons besoin de quelques propriétés élémentaires des automorphismes des surfaces K3 que nous rappelons succinctement (voir [Can01a] et [Can01b]). Soient X une surface K3, $\text{Aut}(X)$ son groupe d'automorphismes et ϕ un élément de $\text{Aut}(X)$. La transformation linéaire ϕ^* induite par ϕ sur le groupe de cohomologie $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ préserve à la fois la forme d'intersection q_X et la structure entière de la cohomologie. D'après le théorème de l'indice de Hodge, la forme q_X est de signature $(1, 19)$. La transformation linéaire ϕ^* appartient donc à l'un des trois types suivants (voir [Can01a], [Can01b]).

- (a) *Elliptique* : ϕ^* est d'ordre fini ; en ce cas, ϕ est également d'ordre fini par le théorème de Torelli pour les surfaces K3.
- (b) *Parabolique* : ϕ^* préserve une unique demi-droite située sur le bord du cône de Kähler de X et celle-ci est dans le cône isotrope de q_X ; dans ce cas, cette demi-droite est engendrée par la classe d'une fibration elliptique ϕ -invariante.
- (c) *Hyperbolique* : ϕ^* dilate une demi-droite et en contracte une autre dans le bord du cône de Kähler de X .

LEMME 3.14. Soient X une surface K3 et G un sous-groupe infini de $\text{Aut}(X)$, alors :

- (i) le groupe G possède des éléments d'ordre infini ;
- (ii) ou bien G possède un élément de type hyperbolique ou bien X possède une et une seule fibration elliptique invariante par tous les éléments de G .

Démonstration (voir [Can01b]). Le premier point est une conséquence directe du théorème de Torelli et du lemme de Burnside (pour le groupe $\text{GL}(n, \mathbb{Z})$). Le second est conséquence du lemme du ping-pong de Klein et de la classification des automorphismes en trois types rappelée ci-dessus. □

Démonstration du Théorème 3.13. Pour démontrer le Théorème 3.13, deux cas se présentent, suivant que le centralisateur de f préserve une fibration elliptique ou possède un automorphisme de type hyperbolique.

Supposons tout d'abord qu'il existe un élément ϕ de $C(f)$ qui soit hyperbolique. Les courbes de X dont l'orbite par ϕ est finie forment donc un ensemble fini de courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -2 (voir [Can01a, preuve du Lemme 5.1]). Les courbes F_j provenant des points d'indétermination de f et des itérés de f sont permutées entre elles par ϕ . Nous pouvons donc contracter ces courbes et f devient un endomorphisme de la surface K3 singulière ainsi obtenue. La Proposition 3.10 permet alors de conclure.

Supposons maintenant qu'il existe une fibration elliptique préservée par tous les éléments de $C(f)$. Cette fibration étant unique, elle est préservée par f . Notons \bar{f} l'endomorphisme induit par f sur la base de la fibration.

Si le degré topologique de \bar{f} est strictement plus grand que 1, la fibration est isotriviale (Lemme 3.8) et f est conjuguée à un endomorphisme d'orbifold (Lemme 3.9). Dans ce cas, la Proposition 3.10 montre que f est un exemple de Kummer.

Sinon, \bar{f} est un automorphisme de la droite projective qui doit permuter les valeurs critiques de la fibration $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Puisqu'une surface K3 elliptique possède au moins trois fibres singulières, c'est que \bar{f} est d'ordre fini (voir [Can01b]). Quitte à remplacer f par l'un de ses itérés, nous supposons désormais que \bar{f} est l'identité. Soit S l'ensemble des points fixes de f : l'ensemble S est une courbe algébrique qui comporte au moins une composante irréductible S_0 génériquement transverse à la fibration elliptique. Soit ϕ un élément d'ordre infini de $C(f)$. Quitte à changer ϕ en l'un de ses itérés ϕ^k , avec k strictement positif, nous pouvons supposer que ϕ préserve S_0 . Notons E une fibre de la fibration. La classe d'homologie $[E] + [S_0]$ est alors une classe ϕ^* -invariante d'auto-intersection strictement positive : ceci contredit le caractère parabolique de ϕ et termine la preuve. □

3.7 Un contre-exemple

Il s'agit maintenant de démontrer le Théorème C, dont voici une version légèrement plus précise.

THÉORÈME 3.15. Il existe une transformation rationnelle $f : X \dashrightarrow X$ d'une surface K3 projective telle que :

- (a) f est cohomologiquement dilatante : $d_t(f) > \lambda(f) = \rho(f^*)$;
- (b) la dimension de Kodaira de X est nulle ;
- (c) l'unique mesure d'entropie maximale de f est lisse ;
- (d) f n'est pas topologiquement conjuguée à un exemple de Kummer.

Nous allons construire un tel exemple et donner deux arguments différents pour conclure : le premier argument permet seulement de montrer que la transformation f n'est pas un exemple de Kummer, mais sera l'occasion de décrire un peu plus en détails la géométrie des surfaces de Kummer (cf. Remarque 3.17 ci-dessous) ; le second précise le premier et permet de montrer que f n'est pas topologiquement conjuguée à un exemple de Kummer.

PROPOSITION 3.16. *Si f est une transformation rationnelle cohomologiquement dilatante sur une surface projective de dimension de Kodaira positive ou nulle, sa mesure d'entropie maximale est lisse.*

Démonstration. D'après le § 2.6 il existe une 2-forme holomorphe Ω sur X telle que

$$f^*(\Omega \wedge \bar{\Omega}) = d_t(f) \Omega \wedge \bar{\Omega}.$$

La mesure d'entropie maximale μ_f étant caractérisée par cette relation (voir § 1.2 et [Gue05]), nous en déduisons que μ_f est un multiple de $\Omega \wedge \bar{\Omega}$ et que cette mesure est lisse. \square

Remarque 3.17. Il y a plusieurs types de surfaces de Kummer qui sont des surfaces K3. Par exemple, il y a sept types de groupes G qui agissent sur des tores A avec un quotient A/G qui est une surface K3 : les groupes cycliques $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \{2, 3, 4, 6\}$ et les groupes polyédraux binaires D_2^* , D_3 et T^* (voir [Kat87]). Si le cardinal de G est strictement supérieur à 2, les modèles lisses de A/G ont un groupe de Picard de rang supérieur ou égal à 19. Les courbes exceptionnelles issues de la désingularisation de A/G sont en effet des sphères de Riemann lisses d'autointersection -2 qui engendrent un sous-groupe M_G de $H_2(X, \mathbb{Z})$ dont le rang est supérieur ou égal à 18 (le rang de M_G vaut 16 lorsque $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Démonstration du Théorème C, premier argument. Soient C une surface de Riemann, A la jacobienne de C et X la surface de Kummer obtenue en quotientant A par l'involution $\sigma : z \mapsto -z$. Nous choisirons C de manière générique, ce qui permet d'affirmer que le rang $\rho(X)$ du groupe de Picard de X est égal à 17. Puisque $\rho(X)$ est égal à 17, la remarque précédente montre que les seules structures de Kummer sur X correspondent à des quotients par une involution. Ainsi, si f est une transformation rationnelle de X qui est un exemple de Kummer, alors f doit permuter 16 courbes nodales et f_* doit induire une transformation d'ordre fini sur un hyperplan du groupe de Picard de X .

D'après les travaux de Keum, il existe des automorphismes de X qui ne proviennent pas d'automorphismes de A (voir [Keu97], [Keu99] et [Kon98]). Choisissons par exemple l'automorphisme ψ présenté par Kondo au [Kon98, § 6]. Désignons par H l'intersection hyperplane du modèle usuel de A/σ dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et par N_i , $i = 0, 1, \dots, 15$ les courbes nodales de X issues de la désingularisation des 16 points doubles de A/σ . Les classes d'homologie de ces courbes forment une base du groupe de Picard de X et la matrice de ψ dans cette base est la matrice 17×17 suivante

(voir [Keu97, p. 286] et [Kon98, Remarque 6.6 et Proposition 5.1]) :

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit g l'endomorphisme de A 'multiplication par 9'. Cet endomorphisme commute avec σ et détermine une transformation rationnelle de X qui est un exemple de Kummer. Cette transformation fixe les courbes N_i et multiplie H par 81. Notons f la composée de g et de ψ . C'est une transformation rationnelle de X dont l'action sur le groupe de Picard s'obtient en multipliant la première ligne de la matrice ci-dessus par 81. Le polynôme caractéristique de f_* est

$$\chi_{f_*}(t) = (t^4 - 566t^3 + 80t^2 - 74t - 81)(t^2 - t + 1)^4(t + 1)^5.$$

Il possède une racine positive strictement plus grande que 1, qui vaut $\lambda(f) \sim 565.86$, et trois racines strictement plus petites que 1 en module, qui valent $0.27 + 0.53i$, -0.41 , $0.27 - 0.53i$. Les itérés de f_* ne peuvent donc pas induire l'identité sur un hyperplan du groupe de Picard de X . En particulier, f n'est pas un exemple de Kummer.

Puisque le degré topologique de f est égal à $9^4 = 6561$, et puisque $\lambda(f) \sim 565.86$, les travaux de Briend, Duval et Guedj rappelés au § 1.2 montrent que f possède une unique mesure d'entropie maximale μ_f , qui est lisse d'après la Proposition 3.16. □

Démonstration du Théorème C, second argument. Supposons maintenant que f est conjugué à un exemple de Kummer $h : Y \rightarrow Y$ par un homéomorphisme et cherchons une contradiction. L'invariance de la dimension par homéomorphisme montre que Y est une surface. Soit H la transformation affine associée à h et H_0 sa partie linéaire. Notons α et β les deux valeurs propres de H_0 . Les valeurs propres de $h^* : H^2(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(Y, \mathbb{C})$ sur le deuxième groupe de cohomologie de la surface Y sont de trois types :

- (i) les quatre valeurs propres $\alpha\bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\beta}$, $\beta\bar{\alpha}$ et $\beta\bar{\beta}$;
- (ii) les valeurs propres de module 1 (par exemple celles qui viennent de la permutation des courbes exceptionnelles apparaissant pour désingulariser Y) ;
- (iii) les valeurs propres dont le module est égal à la racine du degré topologique (par exemple lorsque $H^{2,0}(Y, \mathbb{C})$ est différent de 0).

Puisque h est conjugué à f , le polynôme $t^4 - 566t^3 + 80t^2 - 74t - 81$ est un facteur du polynôme caractéristique de h^* . Ses quatre racines ont un module qui est différent de 1 et du degré topologique

de f (i.e. du degré de h). Ces quatre nombres coïncident donc avec $\alpha\bar{\alpha}$, $\alpha\bar{\beta}$, $\beta\bar{\alpha}$ et $\beta\bar{\beta}$. En particulier, la valeur propre de plus petit module serait positive, mais ici elle vaut -0.41 . \square

Remarque 3.18. Ce type d'argument montre aussi qu'aucun itéré de f n'est topologiquement conjugué à un exemple de Kummer.

4. Exemples de Lattès des surfaces rationnelles

Dans cette partie nous démontrons la seconde assertion du Théorème B. Vue la première assertion, qui a été démontrée dans la partie précédente, il suffit de considérer le cas des surfaces kählériennes dont la dimension de Kodaira est strictement négative ; ces surfaces sont projectives. Cette partie concerne donc exclusivement les surfaces réglées et les surfaces rationnelles.

4.1 Surfaces réglées non rationnelles

Lorsque X est une surface réglée non rationnelle, un changement de variable birationnel permet de supposer que X est un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ au-dessus d'une courbe B de genre supérieur ou égal à 1. Toute transformation rationnelle de X préserve alors le réglage de X et s'écrit sous la forme

$$f(x, y) = (p(x), q_x(y)),$$

où x est la coordonnée dans la base B du fibré, y est la coordonnée le long des fibres, p est un endomorphisme de B et $x \mapsto q_x$ est une application rationnelle de B vers l'espace des transformations rationnelles de la droite projective. Lorsque le genre de B est supérieur ou égal à 2, p est un automorphisme d'ordre fini et $d_t(f)$ est égal à $\rho(f^*)$, qui lui-même coïncide avec le degré de q_x au point générique de B . Dans ce cas, $d_t(f)$ est donc différent de $\rho(f^*)^2$. Lorsque la courbe B est une courbe elliptique, l'égalité $d_t(f) = \rho(f^*)^2$ signifie que le degré topologique de p est égal au degré topologique de q_x (pour x générique).

Exemple 4.1. Voici un exemple où f est une transformation rationnelle non holomorphe avec $d_t(f) = \rho(f^*)^2 = \lambda(f)^2$. Pour p on choisit la multiplication par un entier k le long d'une courbe elliptique B , avec $k > 1$. Pour q , on choisit n'importe quelle application rationnelle de B vers les transformations rationnelles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré k^2 . Si l'on compose q avec une translation générique de B , l'application $f(x, y) = (p(x), q_{x+\tau}(y))$ vérifie $(f^*)^n = (f^n)^*$ pour tout entier positif n , et $d_t(f) = \rho(f^*)^2 = \lambda(f)^2$. Si q varie avec x , f n'est pas holomorphe.

Les transformations des surfaces réglées satisfaisant les hypothèses du Théorème B seront classées au § 4.5.

4.2 Exemples sur les surfaces rationnelles

Avant de prouver le Théorème B, illustrons le cas des surfaces rationnelles en donnant quelques exemples d'endomorphismes holomorphes sur des surfaces rationnelles lisses ou singulières.

Exemple 4.2. Soit G un groupe fini de transformations linéaires du plan projectif, par exemple le groupe formé des involutions changeant les signes des coordonnées homogènes. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ satisfaisant

$$x \in G(y) \Rightarrow f(x) \in G(f(y)).$$

Si G est le groupe des changements de signe, il suffit de prendre un endomorphisme $f[x : y : z] = [P : Q : R]$ où les polynômes homogènes P , Q et R ne dépendent que des carrés des coordonnées. L'endomorphisme f induit alors un endomorphisme de la surface singulière $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/G$. Cet endomorphisme, et la transformation rationnelle associée sur une désingularisation de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})/G$, satisfont $d_t(f) = \rho(f^*)^2$.

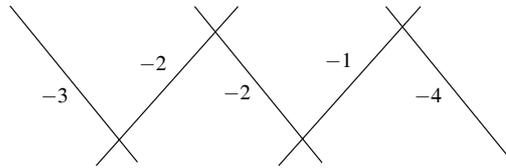


FIGURE 1. Éclatements au voisinage d'un point fixe. Diviseur obtenu après cinq éclatements. Les auto-intersections de chaque diviseur exceptionnel sont précisées.

Exemple 4.3. Soit f un endomorphisme d'une surface rationnelle possédant un point fixe m totalement invariant (i.e. $\{m\} = f\{m\} = f^{-1}\{m\}$) au voisinage duquel f est conjugué holomorphiquement à l'application $(x, y) \mapsto (x^n, y^n)$, l'entier n^2 étant le degré topologique de f . Pour construire un tel exemple, il suffit de prendre un endomorphisme diagonal de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $f(x, y) = (p(x), q(y))$ où p et q sont deux polynômes en une variable de même degré n . Le point à l'infini $m = (\infty, \infty)$ est totalement invariant et f est conjugué à la forme normale annoncée au voisinage de ce point. Si l'on éclate le point m , f s'étend en un endomorphisme \hat{f} de la surface rationnelle obtenue ; plus précisément, \hat{f} agit comme $z \mapsto z^n$ le long du diviseur exceptionnel et les transformées strictes des axes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$ déterminent deux points m_1 et m_2 du diviseur exceptionnel qui sont totalement invariants et au voisinage desquels \hat{f} est holomorphiquement conjugué à $(u, v) \mapsto (u^n, v^n)$. Nous pouvons donc répéter à loisir cette construction en éclatant les points m_i ainsi construits. Supposons par exemple que nous soyons parvenus en cinq éclatements au diviseur exceptionnel de la Figure 1. Nous pouvons alors contracter séparément les courbes de gauche et de droite d'autointersection -3 et -4 sur deux singularités isolées (qui ne sont pas des singularités quotients). L'endomorphisme f détermine un endomorphisme de la surface singulière ainsi obtenue. Cette construction peut être couplée à celle de l'exemple précédent.

Exemple 4.4. Donnons ici un exemple d'une transformation rationnelle qui préserve une fibration elliptique d'une surface rationnelle. Soit E la courbe elliptique $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[j]$, où j est une racine de l'unité d'ordre 3. Notons ξ l'automorphisme d'ordre 3 de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times E$ défini par $\xi(x, y) = (jx, jy)$. Le quotient de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times E$ par ξ est une surface rationnelle X . Quitte à changer de modèle birationnel pour X , nous pouvons supposer que X est lisse. Soient λ un entier supérieur ou égal à 2 et $\phi(x)$ une fraction rationnelle de degré λ^2 invariante par $x \mapsto jx$. L'endomorphisme $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times E \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times E$ défini par $f(x, y) = (\phi(x), \lambda y)$ passe au quotient en une transformation rationnelle de X qui vérifie $d_t(f) = \lambda(f)^2 = \rho(f^*)^2$ pour ϕ générique. Cette transformation préserve la fibration elliptique isotriviale de X .

4.3 Alternative

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 4.5. *Soient X une surface rationnelle et f une transformation rationnelle de X pour laquelle $d_t(f) = \rho(f^*)^2$. Si la mesure d'entropie maximale μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, l'une des propriétés suivantes est satisfaite.*

- (a) *Il existe un morphisme birationnel $\epsilon : X \rightarrow Y$ vers une surface normale à singularités isolées tel que $\epsilon \circ f \circ \epsilon^{-1}$ soit un endomorphisme de Y .*
- (b) *Il existe une fibration rationnelle $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ préservée par f .*

Les deux propriétés ne s'excluent pas l'une l'autre : certains endomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ préservent les deux fibrations rationnelles et satisfont $d_t(f) = \rho(f^*)^2$. Il se pourrait que l'hypothèse d'absolue continuité de μ_f soit superflue. Nous ne l'utiliserons qu'une fois (voir le § 4.3).

Afin de coller aux notations de la démonstration de la Proposition 3.6, que nous reprenons, nous noterons λ le nombre $\rho(f^*)$. Ici, le groupe $\text{Pic}^0(X)$ est encore trivial, mais le diviseur K_X ne l'est pas et l'ensemble critique de f peut être non vide. Dans la suite, $[\alpha]$ désigne une classe nef non nulle qui vérifie $f^*[\alpha] = \lambda[\alpha]$. Puisque $\lambda^2 = d_t(f)$, nous savons que $f_*[\alpha] = \lambda[\alpha]$ (voir le Lemme 3.5). Rappelons que les courbes F_j associées à une transformation rationnelle f sont les courbes qui apparaissent dans l'image des points d'indétermination de f (voir le § 2.5).

Démonstration lorsque $\langle [\alpha] | [\alpha] \rangle > 0$. Lorsqu'il existe une classe nef $[\alpha]$ qui vérifie $f^*[\alpha] = \lambda[\alpha]$ et $\langle [\alpha] | [\alpha] \rangle > 0$, nous pouvons contracter les courbes dont la classe de (co)homologie se situe dans $[\alpha]^\perp$ (elles sont en nombre fini). Ceci détermine un morphisme birationnel ϵ de X vers une surface singulière Y . Il s'agit alors de montrer que la transformation rationnelle f' induite par f sur Y est holomorphe. Soit F une courbe située dans l'image par f de l'une des courbes contractées. Puisque f_* préserve $[\alpha]^\perp$, $\epsilon(F)$ se réduit à un point. Ceci montre que f' n'a pas de point d'indétermination en les singularités de Y . Comme les courbes F_i sont contractées par ϵ , f' n'a pas non plus de point d'indétermination ailleurs et f' est donc holomorphe. □

Suivant la preuve de la Proposition 3.6, nous pouvons désormais supposer que l'espace propre de f^* associé à la valeur propre λ coupe le cône nef sur une demi-droite isotrope $\mathbb{R}^+[\alpha]$, où $[\alpha]$ est une classe entière non nulle. En notant K_X le diviseur canonique de X , la formule d'Hurwitz s'écrit

$$f^*K_X + \text{Ram}(f) = K_X,$$

où le diviseur effectif $\text{Ram}(f)$ est supporté par le lieu critique $\text{Crit}(f)$. Puisque $[\alpha]$ est une classe nef, l'équation $f_*[\alpha] = \lambda[\alpha]$ entraîne

$$\langle [\alpha] | [K_X] \rangle \geq \langle [\alpha] | f^*[K_X] \rangle = \lambda \langle [\alpha] | [K_X] \rangle.$$

Le nombre λ étant strictement plus grand que 1, ceci montre que $\langle [\alpha] | [K_X] \rangle$ est négatif ou nul.

Démonstration lorsque $\langle [\alpha] | [K_X] \rangle < 0$. Supposons que $\langle [\alpha] | [K_X] \rangle$ est strictement négatif et appliquons la formule de Riemann–Roch au fibré en droites $L([\alpha])$ dont la classe de Chern coïncide avec $[\alpha]$:

$$h^0(X, L([\alpha])) \geq 1 - \frac{1}{2} \langle [\alpha] | [K_X] \rangle.$$

Ceci assure l'existence d'un pinceau de sections pour le fibré $L([\alpha])$. Soit C une courbe générique dont la classe est égale à $[\alpha]$. Nous pouvons décomposer C en une partie mobile M et une composante fixe F , de sorte que $C = M + F$. Puisque $[\alpha]$ est une classe nef d'auto-intersection nulle, nous obtenons

$$\langle [C] | [M] \rangle \geq 0, \quad \langle [C] | [F] \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle [C] | [C] \rangle = 0,$$

ce qui implique $\langle [C] | [M] \rangle = 0 = \langle [C] | [F] \rangle$ et montre que F et M sont d'auto-intersection nulle, ne se coupent pas et ont donc des classes d'homologie proportionnelles. Il en résulte que la partie fixe de C est triviale et que les sections de $L([\alpha])$ forment les fibres d'une fibration $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La fibre générique D de π est une courbe lisse vérifiant $\langle [D] | [D] \rangle = 0$ et $\langle [D] | [K_X] \rangle < 0$. Il s'agit donc d'une courbe rationnelle lisse. Puisque $[\alpha]$ est un vecteur propre pour f^* et f_* , de valeur propre λ , la fibration rationnelle π est invariante par f : il existe un endomorphisme \bar{f} de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de degré λ tel que $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$. L'alternative (b) est donc satisfaite. □

Démonstration lorsque $\langle [\alpha] | [K_X] \rangle = 0$. Supposons dorénavant que $\langle [\alpha] | [K_X] \rangle$ est nul. La formule de Riemann–Roch permet seulement de minorer la dimension de $H^0(X, L(n[\alpha]))$ par 1. Nous allons toutefois montrer que f préserve une fibration elliptique, mais pour cela nous utiliserons l'hypothèse concernant l'absolue continuité de μ_f .

S'il existe un entier n pour lequel $L(n[\alpha])$ possède deux sections linéairement indépendantes, les zéros des sections de $L(n[\alpha])$ forment une fibration elliptique f -invariante. D'après les Lemmes 3.8

et 3.9, ceci entraîne l'existence d'une fibration elliptique isotriviale f -invariante, ce qui permet d'affirmer l'existence d'une surface singulière Y birationnelle à X sur laquelle f devient un endomorphisme. Dans ce cas, l'assertion (a) de la Proposition 4.5 est donc vérifiée.

Supposons maintenant que, pour tout entier positif n , le fibré en droites $L(n[\alpha])$ ne possède au plus qu'une section non nulle à multiplication près par une constante et cherchons une contradiction. La classe $[\alpha]$ est alors représentée par un unique diviseur effectif D et les propriétés d'invariance de la classe $[\alpha]$ entraînent :

- (i) $f_*D = \lambda D$, donc le support de D est invariant sous l'action de f ;
- (ii) $f^*D = \lambda D$ et le support de D est invariant par f^{-1} ; plus précisément, le jacobien de f doit s'annuler le long de D à l'ordre λ de sorte que la multiplicité locale des solutions de $f(y) = x$ le long de D soit égale à λ .

L'équation $f_*f^*D = d_t(f)D$ et les arguments précédents permettent d'affirmer que toute courbe F_j qui rencontre D est contenue dans D et que, après contraction des F_j qui ne rencontrent pas D , f détermine, hors de D , un endomorphisme d'une surface singulière. La formule d'Hurwitz et les relations

$$\langle [K_X] | [\alpha] \rangle = 0 = \langle [f^*K_X] | [\alpha] \rangle$$

montrent que toute composante irréductible du lieu critique de f qui n'est pas contenue dans D est disjointe et a une auto-intersection strictement négative. Quitte à contracter ces composantes, nous pouvons en outre supposer que le déterminant jacobien de f ne s'annule que le long de D .

La formule du genre montre que le genre arithmétique du diviseur D est égal à 1 :

$$g(D) = 1 + \frac{1}{2} \langle [K_X] + [D] | [D] \rangle = 1.$$

En particulier, la dimension de l'espace vectoriel $H^0(D, K_D)$ est supérieure ou égale à 1. Considérons maintenant la suite exacte courte de faisceaux (voir [GH78, p. 147])

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(K_X) \rightarrow \mathcal{O}(K_X + D) \rightarrow \mathcal{O}(K_D) \rightarrow 0.$$

Puisque X est une surface rationnelle, les groupes de cohomologie $H^0(X, K_X)$ et $H^1(X, K_X)$ sont nuls et la suite exacte courte précédente fournit l'isomorphisme

$$H^0(X, K_X + D) \cong H^0(D, K_D).$$

Tout ceci montre que l'espace vectoriel $H^0(X, K_X + D)$ constitué des 2-formes méromorphes à pôles le long de D a une dimension strictement positive. Soit Ω une telle 2-forme. Comme le diviseur D est f -invariant et comme le déterminant jacobien de f ne s'annule pas en dehors de D , la forme méromorphe $f^*\Omega$ a des pôles le long de D (et pas ailleurs) et ne s'annule pas en dehors de D . Ceci montre que f détermine un isomorphisme linéaire f^* de $H^0(X, K_X + D)$ dans lui-même. L'existence d'un vecteur propre assure alors la présence d'une 2-forme méromorphe non nulle Ω , à pôles le long de D , et d'un nombre complexe non nul δ tels que $f^*\Omega = \delta\Omega$.

Utilisons maintenant que μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Les exposants de Lyapounoff de la mesure μ_f sont donc égaux à $\frac{1}{4} \log(d_t(f))$ (voir [BD05, Proposition 3], ou [DD04]). Mais la somme des exposants de μ_f est égale à $2 \log(|\delta|)$ car μ_f est absolument continue par rapport à $\Omega \wedge \bar{\Omega}$. Donc $|\delta|^2 = d_t(f)$. Nous en déduisons alors que

$$f_*\Omega \wedge \bar{\Omega} = \Omega \wedge \bar{\Omega}.$$

La mesure $\Omega \wedge \bar{\Omega}$ vérifie donc des propriétés d'invariance identiques à celles de μ_f . La surface X étant rationnelle, le diviseur des pôles de Ω n'est pas vide et $\Omega \wedge \bar{\Omega}$ n'est pas intégrable :

$$\int_X \Omega \wedge \bar{\Omega} = \infty.$$

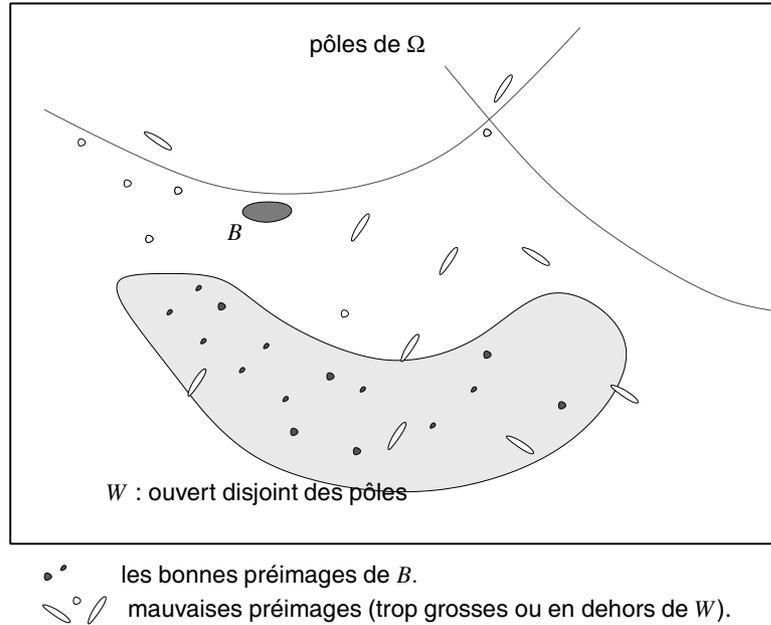


FIGURE 2. Préimages de B .

Puisque $f^*\Omega = \delta\Omega$, l'ensemble postcritique de f (et de tous ses itérés) est contenu dans le lieu des zéros et des pôles de Ω . Notons X^* le complémentaire de cet ensemble totalement invariant.

Soit Λ une mesure de probabilité lisse sur X (une mesure de Lebesgue). Soit W un ouvert relativement compact de X^* de mesure $1/2$ pour la mesure μ_f . Puisque \overline{W} est contenu dans X^* , il existe deux constantes strictement positives a et b telles que

$$a\Lambda \leq \Omega \wedge \overline{\Omega} \leq b\Lambda$$

sur l'ensemble W .

Soit B un petit ouvert dont l'adhérence est contenue dans X^* mais qui est très proche du lieu des pôles de Ω (voir la Figure 2) et soit η une fonction lisse et positive à support dans B , de sorte que $\eta\Lambda$ soit une mesure de probabilité mais que

$$\int_X \eta\Omega \wedge \overline{\Omega} = M$$

soit très grande: plus B est proche des pôles de Ω et plus M peut être choisi grand. En particulier, nous pouvons supposer que $M > 3b \|\eta\|_\infty$.

D'après [DS03, Gue05], la suite de mesures

$$\left(\frac{1}{d_t(f)^n}\right) f^*(\eta\Lambda)$$

converge vers la mesure μ_f . D'autre part, puisque B n'intersecte pas l'ensemble postcritique de f , l'ensemble $f^{-n}(B)$ est constitué de $d_t(f)^n$ composantes disjointes B_i sur lesquelles f^n réalise un difféomorphisme $f^n : B_i \rightarrow B$. D'après [Gue05, Lemme 3.3] au moins les $9/10$ des ensembles B_i ont un diamètre exponentiellement petit. On peut donc supposer qu'au moins $1/3$ des ensembles B_i est contenu dans l'ouvert W . Pour tous ces ensembles B_i , nous avons

$$\frac{1}{d_t^n} M = \int_{B_i} \eta \circ f^n \Omega \wedge \overline{\Omega}$$

d'après l'invariance de $\Omega \wedge \bar{\Omega}$. D'autre part,

$$\int_{B_i} \eta \circ f^n \Omega \wedge \bar{\Omega} \leq b \int_{B_i} \eta \circ f^n d\Lambda \leq b \|\eta\|_\infty \int_{B_i} d\Lambda$$

car B_i est contenu dans W . Ainsi, les ouverts B_i étant disjoints, nous aurions une mesure de probabilité Λ de masse supérieure à

$$\frac{1}{3} \frac{1}{b \|\eta\|_\infty} M.$$

Ceci contredit le choix de M . □

4.4 Caractérisation des exemples de Lattès

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la seconde assertion du Théorème B, dont nous rappelons maintenant l'énoncé.

THÉORÈME 4.6. *Soit f une transformation rationnelle d'une surface complexe compacte kählérienne X . Si $d_t(f) = \rho(f^*)^2$ et si la mesure d'entropie maximale de f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors f est un exemple de Lattès.*

Démonstration. Lorsque la dimension de Kodaira de X est positive ou nulle, la première assertion du Théorème B est plus forte que ce que nous cherchons ici à démontrer. Nous pouvons donc désormais supposer que X est une surface réglée ou une surface rationnelle.

(i) S'il existe une classe nef $[\alpha]$ pour laquelle $f^*[\alpha] = \rho(f^*)[\alpha]$ et $\langle [\alpha][\alpha] \rangle > 0$, nous pouvons supposer que f est un endomorphisme d'une surface singulière (Proposition 4.5). La preuve du théorème de Berteloot, Dupont et Loeb présentée en Appendice A s'applique alors pour conclure.

(ii) S'il existe une fibration elliptique invariante $\pi : X \rightarrow B$, celle-ci est isotriviale et nous pourrions supposer que f est un endomorphisme de X , quitte à admettre quelques singularités quotient pour la surface X . Cependant, la preuve du théorème A ne s'applique plus car il n'y a pas de classe nef invariante de carré strictement positif et il n'existe donc a priori aucun courant f -invariant T pour lequel $T \wedge T = \mu_f$. Pour conclure, on commence par remarquer que l'endomorphisme \bar{f} induit par f sur la base de la fibration est un exemple de Lattès.

LEMME 4.7. *Soit $f : X \dashrightarrow X$ une transformation rationnelle d'une surface X pour laquelle $d_t(f) = \rho(f^*)^2$. Supposons que la mesure d'entropie maximale de f soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de X et qu'il existe une fibration $\pi : X \rightarrow B$ qui soit f -invariante. La transformation rationnelle induite par f sur B est alors un exemple de Lattès.*

Démonstration du Lemme 4.7. Soit \bar{f} la transformation rationnelle de B induite par f , de sorte que $\bar{f} \circ \pi = \pi \circ f$. Comme $d_t(f) = \rho(f^*)^2$, le degré topologique de \bar{f} est égal à $\rho(f^*)$. De même, f induit un morphisme de degré $\rho(f^*)$ entre les fibres génériques de π . L'image $\pi_*(\mu_f)$ de la mesure d'entropie maximale est une mesure de probabilité sur B absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Puisque f est de degré $\rho(f^*)$ le long des fibres et que $f^*\mu_f = \rho(f^*)^2\mu_f$, nous obtenons

$$\bar{f}^*(\pi_*(\mu_f)) = d_t(\bar{f})\pi_*(\mu_f).$$

Ceci montre que la mesure d'entropie maximale de \bar{f} coïncide avec $\pi_*(\mu_f)$. Puisque celle-ci est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, le théorème de Zdunick s'applique. □

Appliquons maintenant ce lemme à notre situation. Il existe une courbe elliptique E , un endomorphisme affine \bar{F} de E et un revêtement ramifié $\varpi : E \rightarrow B$ tels que

$$\varpi \circ \bar{F} = \bar{f} \circ \varpi.$$

Notons Z la surface obtenue en prenant l'image réciproque de la fibration $\pi : X \rightarrow B$ par l'application ϖ :

$$Z = \{(e, x) \in E \times X \mid \varpi(e) = \pi(x)\}.$$

La surface Z est donc naturellement munie d'une fibration $\pi' : Z \rightarrow E$ et d'une application holomorphe surjective $\hat{\omega} : Z \rightarrow X$ telles que $\pi \circ \hat{\omega} = \varpi \circ \pi'$, et la transformation f se relève en une transformation rationnelle $F : Z \rightarrow Z$ qui préserve la fibration π' , induit \overline{F} sur la base E et est semi-conjuguée à f par $\hat{\omega}$,

$$\hat{\omega} \circ F = f \circ \hat{\omega}.$$

Puisque la surface Z possède une fibration elliptique de base E , sa dimension de Kodaira est positive ou nulle et son premier nombre de Betti est strictement positif. Puisque Z possède une transformation rationnelle F qui préserve ladite fibration et induit un endomorphisme de degré strictement plus grand que 1 sur E , nous en déduisons que Z est un tore ou une surface hyperelliptique. Quitte à effectuer un revêtement fini auquel F se relève de manière équivariante, nous avons donc montré que F est un endomorphisme affine d'un tore. Ainsi, f est un exemple de Lattès.

(iii) Il reste à traiter le cas où f préserve une fibration rationnelle, ce que nous allons faire dans le prochain paragraphe. □

4.5 Surfaces réglées et fibrations rationnelles invariantes

Nous abordons maintenant le cas des transformations rationnelles qui préservent une fibration par courbes rationnelles. Ce paragraphe concerne donc à la fois certaines surfaces rationnelles et certaines surfaces réglées. D'après le § 4.1, nous pouvons effectuer un changement de variable birationnel qui 'redresse' la surface X en un fibré en $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur une base B , la fibration rationnelle correspondant alors à la projection $\pi : X \rightarrow B$. Ceci étant fait, l'application $f : X \dashrightarrow X$ est de la forme

$$f(x, y) = (p(x), q_x(y))$$

où x est la coordonnée dans la base et y la coordonnée dans les fibres. Les contraintes suivantes sont liées à l'égalité $d_t(f) = \rho(f^*)^2$:

- (i) $\rho(f^*)$ est un entier que nous noterons désormais λ ;
- (ii) $p : B \rightarrow B$ est un endomorphisme de degré λ ;
- (iii) l'application $x \rightarrow q_x$ est une application rationnelle à valeurs dans les endomorphismes de degré λ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (en particulier, en dehors d'un ensemble fini de points de B , q_x est un endomorphisme de degré λ dont les coefficients dépendent holomorphiquement de x).

D'après le Lemme 4.7, l'endomorphisme p est un exemple de Lattès. La situation est donc hybride, elle se situe entre un problème de dimension 1 similaire à celui traité par Zdunick et un problème de dimension 2 similaire à celui de Berteloot, Dupont et Loeb.

4.5.1 *Un cas simple.* Commençons par traiter le cas simple où la mesure μ_f est lisse.

PROPOSITION 4.8. *Soit f une transformation rationnelle d'une surface projective qui préserve une fibration rationnelle et satisfait $d_t(f) = \rho(f^*)^2$. Si μ_f est lisse et non nulle sur un ouvert de X , alors f est un exemple de Lattès.*

Notons $\text{End}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ l'ensemble des endomorphismes de la sphère de Riemann de degré λ . C'est un ouvert de Zariski de l'espace projectif associé aux couples de polynômes homogènes $(P(x, y), Q(x, y))$ de degré λ . L'application

$$q : B \rightarrow \overline{\text{End}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))}$$

$$x \mapsto q_x$$

est une application holomorphe sur B à valeurs dans l'adhérence de Zariski de $\text{End}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ dont l'image coupe l'ouvert $\text{End}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$.

Soit $\text{Lat}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ le sous-ensemble algébrique de $\text{End}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ formé des endomorphismes de Lattès. Cet ensemble comporte *a priori* plusieurs composantes irréductibles qui dépendent chacune du groupe cyclique G et de l'application affine F utilisés (cf. Exemple 1.5).

LEMME 4.9. *Sous les hypothèses de la Proposition 4.8, l'application q est à valeurs dans les exemples de Lattès.*

Démonstration. Soit \mathcal{U} un ouvert sur lequel la mesure μ_f est lisse et strictement positive. Puisque μ_f est lisse, la mesure de probabilité $\mu_{f,m}$ induite par μ_f sur chaque fibre de π passant par \mathcal{U} est lisse et non nulle. D'après [Gue05], les points périodiques de f dont l'orbite n'intersecte pas l'ensemble critique s'équirépartissent vers la mesure μ_f . Il existe donc une infinité de points périodiques pour f dans \mathcal{U} . Soit m un tel point, dont la période peut être fixée à 1 quitte à changer f en l'un de ses itérés. Soit $f_m = q_{\pi(m)}$ la restriction de f à la fibre passant par m . Puisque $f^* \mu_f = \lambda^2 \mu_f$ et p est un exemple de Lattès de degré λ , nous obtenons

$$f_m^*(\mu_{f,m}) = \lambda \mu_{f,m}.$$

Ceci montre que $f_m = q_{\pi(m)}$ est un exemple de Lattès. Nous avons donc montré qu'il existe un ensemble de points périodiques Zariski-dense tel que, pour chaque point m de cet ensemble, $q_{\pi(m)}$ est un exemple de Lattès de degré λ . L'application q est donc une application de B dans $\overline{\text{End}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))}$ dont l'image est une courbe algébrique qui, pour une infinité de points de B , coupe $\text{Lat}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Ainsi, $q(B)$ est contenue dans l'adhérence d'une des composantes irréductibles de $\text{Lat}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. \square

La démonstration de la Proposition 4.8 résulte alors du lemme suivant, qui utilise juste l'absolue continuité de μ_f .

LEMME 4.10. *Si q est à valeurs dans les exemples de Lattès, et si μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de X , f est un exemple de Lattès.*

Démonstration. Puisque B est irréductible, $q(B)$ est contenue dans l'adhérence d'une des composantes irréductibles de $\text{Lat}_\lambda(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Il existe donc un groupe G tel que, en dehors d'un ensemble fini de points de B , q_x est un exemple de Lattès de degré λ et de type G (voir l'Exemple 1.5). Autrement dit, en dehors d'un nombre fini de points de B , il existe une courbe elliptique E_x , une action fidèle de G sur E_x et une transformation affine $F_x : E_x \rightarrow E_x$ telle que $q_x : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ soit l'exemple de Lattès associé à ce triplet.

Notons $\text{PC}(f)$ l'ensemble post-critique de f et $\text{PC}(f)'$ l'ensemble $\text{PC}(f)$ privé de ses composantes qui sont contenues dans des fibres de la fibration $\pi : X \rightarrow B$. La courbe $\text{PC}(f)'$ coupe chaque fibre sur un nombre fini de points (trois ou quatre suivant le cardinal de G) et le revêtement d'ordre $|G|$ de chaque fibre convenablement ramifié en ces points est la courbe elliptique E_x . Notons Y la surface ainsi obtenue par revêtement ramifié de X au-dessus de $\text{PC}(f)'$. Cette surface est munie:

- (a) d'un revêtement $p : Y \rightarrow X$ de degré $|G|$;
- (b) d'une fibration elliptique $\pi' : Y \rightarrow B$ telle que $\pi' = \pi \circ p$;
- (c) d'une transformation rationnelle $F : Y \rightarrow Y$ qui relève f , i.e. $p \circ F = f \circ p$, et qui, dans chaque fibre, coïncide avec F_x .

On vérifie alors que $d_t(F) = \rho(F^*)^2$ et que F est donc un exemple de Lattès (voir le § 4.4). Ceci montre que f est un exemple de Lattès. \square

4.5.2 *Exposants de Lyapounoff.* Passons maintenant à la démonstration dans le cas général où la mesure μ_f est seulement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous ne pouvons donc pas affirmer que les mesures $\mu_{f,m}$ induites par μ_f sur les fibres de π par désintégration de Rohlin sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ le long des fibres périodiques de f . La preuve du Lemme 4.9 n'est donc plus valable. Pour conclure, nous allons adapter les arguments de Zdunick à notre situation en utilisant les arguments de [BD05], [BL01] et [May02].

Pour tout entier positif n , l'application f^n est de la forme

$$f^n(x, y) = (p^n(x), q_x^n(y)),$$

où p^n est l'itéré n -ième de p et q_x^n est défini par la relation de récurrence $q_x^n(y) = q_{p(x)}(q_x^{n-1}(y))$. La matrice jacobienne de f^n en un point (x, y) est donc triangulaire

$$\text{Jac}(f^n)(x, y) = \begin{pmatrix} (p^n)'(x) & 0 \\ \partial q_x^n(y)/\partial x & \partial q_x^n(y)/\partial y \end{pmatrix}.$$

Les exposants de Lyapounoff de f décrivent donc le comportement asymptotique de $|(p^n)'|$ (qui est connu car p est un exemple de Lattès) et de $|\partial q_x^n(y)/\partial y|$.

LEMME 4.11. *Les exposants de Lyapounoff de f vis-à-vis de μ_f sont tous égaux à $\log(\sqrt{\lambda})$. Pour μ_f presque tout point m de X il existe deux constantes strictement positives $c_1(m)$ et $c_2(m)$ et une suite n_i tendant vers l'infini telles que*

$$c_1(m)\lambda^{n_i} \leq \left| \frac{\partial q_x^{n_i}(y)}{\partial y} \right|^2 \leq c_2(m)\lambda^{n_i}.$$

Démonstration. Notons μ_p la mesure d'entropie maximale de p , ω la mesure uniforme sur la sphère de Riemann et ν_X la mesure sur $X = B \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie par $d\nu_X = d\mu_p \wedge d\omega$. Puisque μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une fonction φ appartenant à $L^1(X, d\nu_X)$ telle que

$$d\mu_f = \varphi d\nu_X.$$

Si α et β sont deux constantes strictement positives, nous noterons $X_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des points m de X pour lesquels $\varphi(m)$ est compris entre α et β . Quitte à prendre α (respectivement β) suffisamment petit (respectivement grand), nous pouvons supposer que la mesure de $X_{\alpha,\beta}$ est strictement positive. La mesure μ_f ne charge pas l'ensemble critique de f (voir [Gue05]); d'après le théorème de récurrence de Poincaré, l'orbite de μ_f presque tout point m de $X_{\alpha,\beta}$ visite donc $X_{\alpha,\beta}$ une infinité de fois tout en évitant l'ensemble post-critique de f . Soit m un tel point et n_i une suite d'entiers positifs tels que $f^{n_i}(m)$ appartienne à $X_{\alpha,\beta}$ pour tout i . Soient i un des indices et A un bidisque autour du point m sur lequel f^{n_i} est injective. Nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} \int_{f^{n_i}(A)} d\mu_f &= \int_{f^{n_i}(A)} \varphi d\mu_p \wedge d\omega \\ &= \int_A \varphi \circ f^{n_i} \lambda^{n_i} \left| \frac{\partial q_x^{n_i}}{\partial y} \right|^2 d\mu_p \wedge d\omega, \end{aligned}$$

car $p^* \mu_p = \lambda \mu_p$. Par invariance de μ_f nous disposons en outre de l'égalité

$$\int_{f^n(A)} d\mu_f = \lambda^{2n} \int_A \varphi d\mu_p \wedge d\omega.$$

Faisant tendre le rayon du bidisque A vers 0, en supposant que m est un point de densité pour μ_f et ν_x , nous obtenons la relation

$$\left| \frac{\partial q_x^{n_i}(y)}{\partial y} \right|^2 = \lambda^{n_i} \frac{\varphi(m)}{\varphi(f^{n_i}(m))}.$$

Il suffit alors de poser $c_1(m) = \alpha/\beta$ et $c_2(m) = \beta/\alpha$ pour conclure. □

4.5.3 *Linéarisation.* Le but de ce paragraphe est de linéariser f le long des fibres génériques de π . Il s'agit d'un argument classique mais technique qui utilise le lemme du quart de Koebe. Nous noterons F_m la fibre de π passant par le point m , i.e.

$$F_m = \{\pi(m)\} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Nous munirons X de la métrique kählérienne obtenue en faisant le produit d'une métrique hermitienne sur B et de la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit X' le complémentaire des orbites du lieu critique et de l'ensemble d'indétermination de f . Cet ensemble X' est f -invariant et de mesure totale pour μ_f (voir [Gue05]). Soit $(\hat{X}', \hat{f}, \hat{\mu}_f)$ l'extension naturelle du système dynamique (X', f, μ_f) . Un point \hat{m} de \hat{X}' est donc une suite $(m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de points de X' satisfaisant $m_{i+1} = f(m_i)$. Pour construire un point de X' il s'agit donc de choisir un point m_0 de X' , ce qui détermine automatiquement $m_n = f^n(m_0)$ pour n positif, puis de choisir un antécédent m_{-1} parmi les $d_t(f)$ antécédents de m_0 , puis un antécédent m_{-2} de m_{-1} , etc.

Pour pouvoir linéariser f nous aurons besoin de construire des *branches inverses* de f le long des fibres de π . Une branche inverse pour f^n est déterminée par :

- (i) un point m_0 et une suite d'antécédents $m_{-1}, m_{-2}, \dots, m_{-n}$;
- (ii) un disque $\mathbb{D}(m_0, r)$ tracé dans la fibre F_{m_0} et centré en m_0 ;
- (iii) une application holomorphe $q^{-n} : \mathbb{D}(m_0, r) \rightarrow F_{m_{-n}}$ telle que $q^{-n}(m_0) = m_{-n}$ et $f^n \circ q^{-n} = Id$.

Pour construire de telles branches inverses pour tout entier n , il faut donc se donner un point \hat{m} de \hat{X}' . Nous noterons alors $q_{\hat{m}}^{-n}$ les branches inverses, lorsqu'elles existent.

LEMME 4.12. *Pour tout nombre réel strictement positif ϵ il existe deux fonctions mesurables $r : \hat{X}' \rightarrow]0, 1]$ et $C : \hat{X}' \rightarrow [1, \infty[$ telles que les deux propriétés suivantes soient satisfaites par $\hat{\mu}_f$ -presque tout point \hat{m} :*

- (a) les branches inverses $q_{\hat{m}}^{-n}$ existent sur le disque $\mathbb{D}(m_0, r(\hat{m}))$ pour tout entier positif n ;
- (b) la fonction $q_{\hat{m}}^{-n} : \mathbb{D}(m_0, r(\hat{m})) \rightarrow F_{m_{-n}}$ est lipschitzienne, de constante de Lipschitz majorée par

$$C(\hat{m})\lambda^{-n/2}e^{n\epsilon}.$$

Démonstration. Ce résultat apparaît déjà à plusieurs reprises dans la littérature et nous ne le démontrerons pas (voir par exemple [BD05, Lemme 1]). □

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme du quart de Koebe, ce qui assure que les images $q_{\hat{m}}^{-n}(\mathbb{D}(m_0, r(\hat{m})))$ contiennent des disques centrés en m_{-n} et de rayons supérieurs à

$$\frac{1}{4}|(q_{\hat{m}}^{-n})'(m_0)|r(\hat{m}).$$

Pour tout entier positif n , notons h_n l'application du disque $\mathbb{D}(0, r(\hat{m})/4)$ de \mathbb{C} à valeurs dans $F_{m_{-n}}$ définie par

$$h_n(z) = m_{-n} + |(q_{\hat{m}}^{-n})'(m_0)|z.$$

Définissons alors $\Psi_n : \mathbb{D}(0, r(\hat{m})/4) \rightarrow F_{m_0}$ par $\Psi_n = f^n \circ h_n$. La suite $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'applications holomorphes, injectives, à valeurs dans le disque $\mathbb{D}(m_0, r(\hat{m}))$ et de dérivée de norme 1 en l'origine. Il s'agit donc d'une famille normale et d'après les théorèmes de Montel et Hurwitz, il existe une sous-suite (n_i) tendant vers l'infini et une fonction holomorphe injective $\xi_{\hat{m}} : \mathbb{D}(0, r(\hat{m})/4) \rightarrow F_{m_0}$ telle que la suite (Ψ_{n_i}) converge vers $\xi_{\hat{m}}$.

L'estimation du Lemme 4.11, peut être réécrite sous la forme

$$\sqrt{c_1(m)}\lambda^{-n/2} \leq |(q_{\hat{m}}^{-n})'(m_0)| \leq \sqrt{c_2(m)}\lambda^{-n/2}$$

ce qui permet de remplacer $(q_{\hat{m}}^{-n})'(m_0)$ par $\lambda^{-n/2}$ dans la définition de h_n en conservant la conclusion : il existe une fonction mesurable $\rho : \hat{X}' \rightarrow]0, 1]$ telle que $\Psi_n = f^n \circ h_n$ converge vers $\xi_{\hat{m}}$ sur le disque $\mathbb{D}(0, \rho(\hat{m}))$ (quitte à prendre une sous-suite). Cette nouvelle définition de h_n entraîne

$$\xi_{\hat{f}(\hat{m})}(\lambda z) = f \circ \xi_{\hat{m}}(z),$$

ce qui montre que la famille $\xi_{\hat{m}}$ linéarise f le long des fibres de π .

En utilisant cette relation, nous pouvons maintenant étendre $\xi_{\hat{m}}$ à \mathbb{C} tout entier en posant $\xi_{\hat{m}}(z) = f^n \circ \xi_{\hat{f}^{-k}(\hat{m})}(z/\lambda^k)$ dès que k est suffisamment grand pour que z/λ^k appartienne au disque de centre 0 et de rayon $\rho(\hat{m})$.

4.5.4 *Mesure et linéarisation.* Soit $\nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ la mesure de probabilité homogène sur la sphère de Riemann. Comme la mesure μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe une fonction Φ dans $L^1(X, d\mu_p \wedge d\nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})})$ telle que

$$\mu_f = \Phi d\mu_p \wedge d\nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}.$$

Notons $\mu_{f,m}$ les mesures de probabilité sur les fibres F_m de π obtenues en désintégrant la mesure μ_f ; pour un ensemble de points m de mesure totale, $\mu_{f,m}$ est absolument continue par rapport à $\nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ donc

$$\mu_{f,m} = \phi_m d\nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})},$$

où ϕ_m est un élément de $L^1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})})$.

Il existe un ensemble \mathcal{M} de mesure totale dans X tel que, pour tout point m de \mathcal{M} , la fonction ϕ_m est continue en moyenne le long de F_m au point m , ce qui signifie que

$$\phi_m(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(D(m, r))} \int_{D(m, r)} \phi_m(y) d\nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}(y),$$

où $D(m, r)$ est le disque de rayon r centré en m et tracé dans la fibre F_m et où $\text{vol}(D(m, r))$ est l'aire de ce disque pour la mesure $\nu_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$.

Soit ϵ un nombre réel strictement positif et \mathcal{M}_ϵ un sous-ensemble de \mathcal{M} de mesure supérieure à $1 - \epsilon$ sur lequel Φ est continue. Soit $\hat{m} = (m_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un point générique de \hat{X}' pour lequel m_0 est dans \mathcal{M}_ϵ : il existe alors une sous-suite notée m_{-n} parmi les préimages de m_0 qui reste dans \mathcal{M}_ϵ et tend vers m_0 . Notons $\nu_{\mathbb{C}}$ la mesure de Lebesgue sur la droite affine \mathbb{C} . En restriction au disque unité de \mathbb{C} , nous obtenons

$$\begin{aligned} \xi_{\hat{m}}^* d\mu_{f,m_0} &= \lim_{n \rightarrow \infty} ((f^n \circ h_n)^* d\mu_{f,m_0}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda^n h_n^* d\mu_{f,m_{-n}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_{m_{-n}} \circ h_n) d\nu_{\mathbb{C}} \\ &= C^{ste} d\nu_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

car la suite (h_n) est une suite de contractions de rapport λ^{-n} , m_{-n} tend vers m_0 et m_0 est dans \mathcal{M}_ϵ . Ceci montre que $\xi_{\hat{m}}^* d\mu_{f,\hat{m}}$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue de \mathbb{C} pour presque tout point \hat{m} .

4.5.5 *Groupe d'isotropie.* Soit u un germe de difféomorphisme holomorphe de \mathbb{C} vérifiant $\xi_{\hat{m}} \circ u = \xi_{\hat{m}}$. Puisque

$$\xi_{\hat{m}} d\mu_{f,\hat{m}} = C^{ste} dz \wedge d\bar{z},$$

le germe de difféomorphisme u préserve $dz \wedge d\bar{z}$. Ceci montre que u s'étend de manière unique en une isométrie affine $u(z) = \epsilon z + t$ de \mathbb{C} . Notons $\Gamma_{\hat{m}}$ le groupe des transformations affines u de \mathbb{C} qui vérifient $\xi_{\hat{m}} \circ u = \xi_{\hat{m}}$. Ce groupe agit de manière discrète sur \mathbb{C} et $\xi_{\hat{m}}$ passe au quotient en une application holomorphe injective de $\mathbb{C}/\Gamma_{\hat{m}}$ vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; de plus, l'image réciproque de la mesure de probabilité $\mu_{f,\hat{m}}$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}/\Gamma_{\hat{m}}$; puisque $\xi_{\hat{m}}$ devient injective, ceci montre que cette mesure est également une mesure de probabilité et que $\mathbb{C}/\Gamma_{\hat{m}}$ est compact. Par la suite, nous noterons $\Lambda_{\hat{m}}$ le sous-groupe d'indice fini dans $\Gamma_{\hat{m}}$ constitué des translations de $\Gamma_{\hat{m}}$. La courbe elliptique $\mathbb{C}/\Lambda_{\hat{m}}$ sera notée $E_{\hat{m}}$.

4.5.6 *Conclusion.* Pour démontrer le Théorème 4.6, il suffit maintenant de montrer que q_b est un exemple de Lattès pour une infinité de points périodiques b de p .

Soit m un point périodique de f situé dans l'intersection de X' et du support de μ_f . Soit (m_k) une suite de points tendant vers m pour lesquels on dispose d'une linéarisante

$$\xi_k : \mathbb{C} \rightarrow F_{m_k}$$

de groupe d'isotropie $\Gamma_k \subset \text{Aff}(\mathbb{C})$ (où les notations et surtout les indices ont été allégés). Puisque ξ_k passe au quotient en un revêtement fini $\xi_k : \mathbb{C}/\Lambda_k \rightarrow F_{m_k}$, sa dérivée est bornée. Quitte à renormaliser ξ_k en composant ξ_k à la source avec une affinité, nous pouvons supposer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\xi'_k(0)\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{\|\xi'_k(z)\|\} = 1.$$

Nous pouvons donc extraire une sous-suite convergente de la suite (ξ_k) . Ceci fournit une application holomorphe $\xi : \mathbb{C} \rightarrow F_m$ satisfaisant $\|\xi'(0)\| = 1$. En particulier, ξ n'est pas constante.

Si $\xi(z) = \xi(z')$, alors, pour tout k suffisamment grand, il existe une suite de nombres complexes (ϵ_k) tendant vers 0 telle que

$$\xi_k(z + \epsilon_k) = \xi_k(z').$$

Ainsi $z + \epsilon_k = A_k(z')$ où A_k est un élément du groupe Γ_k . Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite (A_k) converge vers une isométrie affine A telle que $\xi \circ A = \xi$; le groupe Γ constitué des isométries affines ainsi construites forme alors un groupe discret et cocompact qui agit transitivement sur chaque fibre de ξ . Nous noterons Λ le sous-groupe d'indice fini de Γ_k constitué des translations.

Nous en déduisons que ξ passe au quotient en un revêtement ramifié de \mathbb{C}/Λ sur F_m satisfaisant $\xi \circ (\lambda z) = f \circ \xi(z)$. Ainsi, la restriction de f à la fibre passant par m est un exemple de Lattès. Ceci étant valable pour une infinité Zariski-dense de points périodiques, nous pouvons appliquer les Lemmes 4.9 et 4.10 pour conclure: f est un exemple de Lattès.

Appendice A. Endomorphismes de Lattès

Soit M une variété complexe compacte et kählérienne de dimension k . Soit $g : M \rightarrow M$ un endomorphisme holomorphe de M . Supposons qu'il existe une forme de Kähler κ sur M et un nombre réel δ strictement plus grand que 1 tel que la classe de cohomologie $[\kappa]$ satisfasse

$$g^*[\kappa] = \delta[\kappa].$$

Nous savons alors que les valeurs propres de g^* sur chaque espace $H^{p,p}(X, \mathbb{R})$ ont un module égal à δ^p (voir [Ser60]). En particulier, le degré topologique $d_t(g)$ est égal à δ^k . D'après [BD01] et [DS02a, DS03], l'endomorphisme g possède donc une unique mesure d'entropie maximale μ_g caractérisée par l'équation fonctionnelle $g^* \mu_g = d_t(g) \mu_g$.

THÉORÈME A.1 (Berteloot, Dupont, Loeb, Zdunick). *Soit $g : M \rightarrow M$ un endomorphisme holomorphe d'une variété projective complexe. Supposons qu'il existe un réel $\delta > 1$ et une classe de*

Kähler $[\kappa]$ tels que $g^*[\kappa] = \delta[\kappa]$. Si la mesure d'entropie maximale de g est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, g est un exemple de Lattès.

Esquisse de démonstration. Quitte à changer la forme κ par l'un de ses multiples, nous pouvons toujours supposer que la forme de Kähler κ vérifie l'équation

$$\int_M \kappa^k = 1.$$

(1) La première étape de la démonstration consiste à construire un courant positif fermé T qui est localement donné par des potentiels continus et qui satisfait aux trois propriétés suivantes :

- (i) la classe de T coïncide avec celle de κ : $[T] = [\kappa]$;
- (ii) le courant T est invariant sous l'action de g : $g^*T = \delta T$;
- (iii) la mesure μ_g est égale au produit $T^k = T \wedge \dots \wedge T$ de k copies de T .

Pour cela, on commence par remarquer qu'il existe une fonction lisse $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{1}{\delta} g^* \kappa = \kappa + dd^c(u).$$

Le courant T peut alors être défini par la formule

$$T = \kappa + dd^c \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^l} u \circ g^l \right).$$

Puisque la série converge uniformément, T est à potentiels continus. Puisque T coïncide avec la limite des formes $(1/\delta^l)(g^l)^*\kappa$, c'est un courant positif qui vérifie (ii). La troisième propriété en découle par caractérisation de μ_g .

(2) La seconde étape de la démonstration, indépendante de la première, consiste à montrer que les exposants de Lyapounoff de g vis-à-vis de μ_g sont tous égaux à $\log(\sqrt{\delta})$. Ceci résulte des deux points suivants (cf. § 4.5) :

- (i) les exposants sont minorés par $\log(\sqrt{\delta})$ (voir [BD01] et [DS02a, DS03]) ;
- (ii) la mesure μ_g est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

(3) Les étapes qui suivent sont nettement plus délicates que les deux précédentes. La troisième étape montre que l'on peut renormaliser les itérés de g par des homothéties de rapport $\sqrt{\delta}$. Plus précisément, si x est un point générique pour la mesure μ_g , on peut trouver un ouvert autour de x sur lequel la suite d'applications

$$y \rightarrow g^n(x + \delta^{-n/2}(y - x))$$

possède une suite extraite qui converge vers une application holomorphe injective. Cette étape forme le coeur de [BD05]. En dimension 1, elle est corollaire du lemme de Koebe, en dimension plus grande, elle résulte de l'existence de T et de l'égalité des exposants de Lyapounoff. Nous avons repris cette étape, dans sa version unidimensionnelle, au § 4.5.

(4) L'étape précédente permet de linéariser g le long de ses orbites génériques. Berteloot, Dupont et Loeb en déduisent (voir [BL01] et [BD05, § 5]) que, si $\xi : \mathbb{C}^k \rightarrow M$ est une telle linéarisante, alors ξ^*T est un courant positif constant sur \mathbb{C}^k . Autrement dit, il existe une matrice hermitienne $[a_{ij}]$ telle que

$$\xi^*T = \sum a_{ij} dx_i \wedge d\bar{x}_j.$$

(5) La cinquième étape est due à Berteloot et Loeb. Elle consiste à montrer que les linéarisantes $\xi : \mathbb{C}^k \rightarrow M$ ont un groupe d'isotropie affine, unitaire et cocompact. Ceci provient de l'invariance de $\xi^*(T)$ par les germes de difféomorphismes de \mathbb{C}^k satisfaisant $\xi \circ \varphi = \xi$: ces difféomorphismes

sont donc des isométries affines globalement définies (voir [BL01]). La conclusion résulte alors des théorèmes de Bieberbach. □

Appendice B. Surfaces de Kodaira

Dans cette appendice, nous complétons l'étude faite dans la partie 3 : il s'agit de montrer que, pour les transformations rationnelles des surfaces de Kodaira, la relation

$$1 < d_t(f) = \rho(f^*)^2$$

n'est jamais satisfaite.

Supposons donc que X est une surface de Kodaira primaire ou secondaire (voir [BPV84, pp. 146–147]).

Si X est une surface de Kodaira secondaire, le fibré canonique K_X n'a pas de section, mais il existe un entier $l > 1$ tel que $H^0(X, K_X^{\otimes l})$ soit de dimension 1. Par le 'covering trick', tout endomorphisme f de X se relève en un endomorphisme d'une surface de Kodaira primaire X' . Nous pouvons donc supposer que $f : X \rightarrow X$ est un endomorphisme d'une surface de Kodaira primaire. La dimension algébrique de X est égale à 1 et le processus de réduction algébrique détermine un fibré elliptique $\pi : X \rightarrow B$ invariant par tout endomorphisme. Nous noterons E la fibre de cette fibration ; la base B est également une courbe elliptique.

D'après [Kod64, § 6], ou [Bri93, p. 726], le groupe fondamental Γ de X est une extension centrale de \mathbb{Z}^2 par \mathbb{Z}^2 qui correspond à la suite exacte d'homotopie

$$0 \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \Gamma \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow 0, \tag{*}$$

attachée à la fibration π . Le groupe Γ apparaît aussi comme groupe de transformations affines du revêtement universel \mathbb{C}^2 de X . Plus précisément, Γ peut être identifié au groupe engendré par les quatre éléments

$$\begin{aligned} g_i(x, y) &= (x, y + \beta_i), & i = 1, 2, \\ g_j(x, y) &= (x + \alpha_j, y + \beta_j + \overline{\alpha_j}x), & j = 3, 4, \end{aligned}$$

soumis aux contraintes suivantes :

- (i) le groupe fondamental de la fibre E est isomorphe au réseau $\mathbb{Z}\beta_1 + \mathbb{Z}\beta_2$ de \mathbb{C} et celui de B au réseau $\mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$;
- (ii) la suite exacte (*) correspond, pour la première flèche, au morphisme injectant le groupe engendré par g_1 et g_2 dans Γ et, pour la seconde, à la surjection de Γ sur $\mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$ qui envoie un élément $g(x, y) = (x + \lambda, y + \overline{\lambda}x + \beta)$ sur l'élément λ de $\mathbb{Z}\alpha_3 + \mathbb{Z}\alpha_4$;
- (iii) il existe un entier strictement positif m tel que $g_3g_4 = g_1^m g_4g_3$.

L'endomorphisme f préserve la fibration $\pi : X \rightarrow B$. Notons $d_t(f, E)$ le degré topologique de f le long des fibres et $d_t(f, B)$ le degré de l'application induite par f sur la base B . Quitte à changer f en l'un de ses itérés, nous pouvons supposer que l'action de f sur le groupe fondamental de X est donnée par

$$\begin{aligned} f_*(g_i) &= g_i^{d_t(f, E)}, & \text{pour } i = 1 \text{ ou } 2, \\ f_*(g_3) &= g_1^{\nu_1} g_2^{\nu_2} g_3^{d_t(f, B)} & \text{et } f_*(g_4) = g_1^{\mu_1} g_2^{\mu_2} g_4^{d_t(f, B)}. \end{aligned}$$

Reportant ceci dans l'égalité $g_3g_4 = g_1^m g_4g_3$, nous en déduisons que $d_t(f, E)$ est égal à $d_t(f, B)^2$.

Nous n'avons pas défini l'invariant $\rho(f^*)$ pour une transformation méromorphe d'une surface non kählérienne, mais l'égalité qui vient d'être obtenue montre que, quelque soit la définition choisie, $d_t(f)$ est différent de $\rho(f^*)^2$.

Remarque B.1. Il existe des transformations affines de \mathbb{C}^2 qui déterminent des endomorphismes des surfaces de Kodaira primaires. Il suffit de partir de $f(x, y) = (2x, 4y)$ et de choisir les couples (α_j, β_j) convenablement. Cependant, aucun endomorphisme d'une telle surface n'est un exemple de Kummer au sens de la définition 1.4 car les surfaces de Kodaira ne sont pas kählériennes.

REFERENCES

- Bar98 W. Barth, *K3 surfaces with nine cusps*, *Geom. Dedicata* **72** (1998), 171–178.
- BPV84 W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*, vol. 4 (Springer, Berlin, 1984).
- BG88 C. Benson and C. S. Gordon, *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*, *Topology* **27** (1988), 513–518.
- BD05 F. Berteloot and C. Dupont, *Une caractérisation des endomorphismes de lattès par leur mesure de green*, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), 433–454.
- BL01 F. Berteloot and J.-J. Loeb, *Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de \mathbb{P}^k* , *Bull. Soc. Math. France* **129** (2001), 175–188.
- BV94 J. Bertin and P. Vanhaecke, *The even master system and generalized Kummer surfaces*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **116** (1994), 131–142.
- BL94 C. Birkenhake and H. Lange, *A family of abelian surfaces and curves of genus four*, *Manuscripta Math.* **85** (1994), 393–407.
- BD99 J.-Y. Briend and J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{C}P^k$* , *Acta Math.* **182** (1999), 143–157.
- BD01 J.-Y. Briend and J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$* , *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **93** (2001), 145–159.
- Bri93 V. Brînzănescu, *The Picard group of a primary Kodaira surface*, *Math. Ann.* **296** (1993), 725–738.
- CG97 G. S. Call and S. W. Goldstine, *Canonical heights on projective space*, *J. Number Theory* **63** (1997), 211–243.
- CS93 G. S. Call and J. H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, *Compositio Math.* **89** (1993), 163–205.
- Cam04 F. Campana, *Orbifolies à première classe de Chern nulle*, in *The Fano Conference*, Università di Torino, Turin, 2004, 339–351.
- Can99 S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces complexes compactes*, Thèse de l'ENS-Lyon, 1999.
- Can01a S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces K3*, *Acta Math.* **187** (2001), 1–57.
- Can01b S. Cantat, *Sur la dynamique du groupe d'automorphismes des surfaces K3*, *Transform. Groups* **6** (2001), 201–214.
- Can03 S. Cantat, *Endomorphismes des variétés homogènes*, *Enseign. Math. (2)* **49** (2003), 237–262.
- Can04 S. Cantat, *Difféomorphismes holomorphes Anosov*, *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), 779–797.
- Can06 S. Cantat, *Groupes de transformations birationnelles du plan*, Preprint (2006), <http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/publications.html>.
- CLB05 S. Cantat and S. Le Borgne, *Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires*, *Int. Math. Res. Not.* **56** (2005), 3479–3510.
- Cha99 A. Chambert-Loir, *Géométrie d'Arakelov et hauteurs canoniques sur des variétés semi-abéliennes*, *Math. Ann.* **314** (1999), 381–401.
- DHS79 P. de la Harpe and P. Siegfried, *Singularités de Klein*, *Enseign. Math. (2)* **25** (1980), 207–256.
- DF01 J. Diller and C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, *Amer. J. Math.* **123** (2001), 1135–1169.
- Din01 T.-C. Dinh, *Sur les endomorphismes polynomiaux permutables de \mathbb{C}^2* , *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **51** (2001), 431–459.

- DD04 T.-C. Dinh and C. Dupont, *Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes*, J. Geom. Anal. **14** (2004), 613–627.
- DS02a T.-C. Dinh and N. Sibony, *Dynamique des endomorphismes holomorphes*, Prépublication d'Orsay (2002).
- DS02b T.-C. Dinh and N. Sibony, *Sur les endomorphismes holomorphes permutables de \mathbb{P}^k* , Math. Ann. **324** (2002), 33–70.
- DS03 T.-C. Dinh and N. Sibony, *Dynamique des applications d'allure polynomiale*, J. Math. Pures Appl. (9) **82** (2003), 367–423.
- DS05 T.-C. Dinh and N. Sibony, *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), 1637–1644.
- DS06 T.-C. Dinh and N. Sibony, *Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps*, Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), 754–768.
- Dup06 C. Dupont, *Formule de Pesin et applications méromorphes*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **37** (2006), 393–418.
- Fav03 C. Favre, *Les applications monomiales en deux dimensions*, Michigan Math. J. **51** (2003), 467–475.
- FS94 J. E. Fornæss and N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimensions*, in *Complex potential theory, Montreal, PQ, 1993*, NATO ASI Ser. C Mathematical and Physical Sciences, vol. 439 (Kluwer Academic, Dordrecht, 1994), 131–186. Notes partially written by E. A. Gavosto.
- GH78 P. Griffiths and J. Harris, *Principles of algebraic geometry* (Wiley-Interscience, New York, 1978).
- Gro81 M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **53** (1981), 53–73.
- Gue05 V. Guedj, *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), 1589–1607.
- Kat87 T. Katsura, *Generalized Kummer surfaces and their unirationality in characteristic p* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math. **34** (1987), 1–41.
- Keu97 J. H. Keum, *Automorphisms of Jacobian Kummer surfaces*, Compositio Math. **107** (1997), 269–288.
- Keu99 J. H. Keum, *Automorphisms of a generic Jacobian Kummer surface*, Geom. Dedicata **76** (1999), 177–181.
- Kob98 S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 318 (Springer, Berlin, 1998).
- Kod64 K. Kodaira, *On the structure of compact complex analytic surfaces. I*, Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798.
- Kon98 S. Kondō, *The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), 589–609.
- Lau71 H. B. Laufer, *Normal two-dimensional singularities* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971).
- May02 V. Mayer, *Comparing measures and invariant line fields*, Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002), 555–570.
- McM04 C. T. McMullen, *Algebra and dynamics*, Lecture Notes (2004), <http://abel.math.harvard.edu/~ctm/home/text/class/harvard/275/03/html/index.html>.
- Mil99 J. Milnor, *Dynamics in one complex variable* (Vieweg, Braunschweig, 1999).
- Mil06 J. Milnor, *On Lattès maps*, in *Dynamics on the Riemann sphere* (European Mathematical Society, Zürich, 2006), 9–43.
- Sac74 R. Sacksteder, *The measures invariant under an expanding map*, in *Géométrie différentielle, Colloq.*, Univ. Santiago de Compostela, Santiago de Compostela, 1972, Lecture Notes in Mathematics, vol. 392 (Springer, Berlin, 1974), 179–194.
- Ser60 J.-P. Serre, *Analogues kähleriens de certaines conjectures de Weil*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 392–394.
- Shu69 M. Shub, *Endomorphisms of compact differentiable manifolds*, Amer. J. Math. **91** (1969), 175–199.

- SS85 M. Shub and D. Sullivan, *Expanding endomorphisms of the circle revisited*, Ergodic Theory Dynam. Systems **5** (1985), 285–289.
- Thu77 W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton University Lecture Notes (1977).
- Zha95 S. Zhang, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 281–300.
- Zha06 S. Zhang, *Distributions in algebraic dynamics*, in *Essays in geometry in memory of S. S. Chern*, Surveys in Differential Geometry, vol. 10 (International Press, Boston, MA, 2006), 381–430.

Serge Cantat serge.cantat@univ-rennes1.fr

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes I, 35042 Rennes, France