Canad. Math. Bull.Vol. **35** (4), 1992 pp. 515–522

# CONORME ET INVERSE GÉNÉRALISÉ DANS LES $C^*$-ALGÈBRES

MOSTAFA MBEKHTA

RÉSUMÉ. Dans ce travail, on étudie les propriétés de la conorme, $c(a)$ d'un élément $a$ d'une $C^*$-algèbre $A$. Nous montrons que $c(a)$ est aussi douée de la condition de $B^*$-algèbre, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'égalité: $c(a)^2 = c(a^*a) = c(aa^*) = c(a^*)^2$. Nous remarquons que la conorme est invariante par restriction à toute sous-$C^*$-algèbre de $A$, propriété connue pour le spectre.

Soit $\{a_n\}$ une suite d'éléments réguliers telle que $a_n \longrightarrow a$ régulier. Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $a_n^\dagger \longrightarrow a^\dagger$, où $a^\dagger$ désigne l'inverse de Moore-Penrose de $a$.

0. **Introduction et notations.** Soit $A$ une $C^*$-algèbre et $a \in A$. Nous dirons que $a$ est régulier si $a \in aAa$ (que nous notons $a \in \widehat{A}$); dans ce cas, il existe $b \in A$ tel que $aba = a$, et on dit que $b$ est un inverse généralisé de $a$ (*cf.* [1], [3], [4]). Alors $ab$ et $ba$ sont des idempotents (*i.e.* $(ab)^2 = ab$ et $(ba)^2 = ba$)) tels que $abA = aA$ et $(1 - ba)A = a^{-1}(0)$ et $Aba = Aa$ et $A(1 - ab) = a_{-1}(0)$ où $a^{-1}(0) = \{x \in A \; ; ax = 0\}$ et $a_{-1}(0) = \{x \in A \; ; xa = 0\}$.

En général, $b$ n'est pas unique. Si, en plus, $(ab)^* = ab$ et $(ba)^* = ba$, alors $b$ est l'inverse de Moore-Penrose de $a$. Il est unique (*cf.* [1, Théorème 5]) et il sera noté $a^\dagger$. Notons $A^\dagger$ l'ensemble des éléments de $A$ qui admettent un inverse de Moore-Penrose. Le Théorème 6 [1], montre que $A^\dagger = \widehat{A}$.

Notons $c(a)$, la conorme de $a$, définie par

$$c(a) = \inf\left\{\|ax\| \; ; d\left(x, a^{-1}(0)\right) = 1\right\} \text{ si } a \neq 0 \text{ et } c(0) = +\infty.$$

Si $T \in B(X) = \{T : X \longrightarrow X, \text{borné}\}$ où $X$ est un espace normé, alors

$$c(T) = \inf\left\{\|T_x\| \; ; d(x, T^{-1}(0)\right) = 1\right\} \text{ si } T \neq 0 \text{ et } c(0) = +\infty$$

(*cf.* [2, Chapitre IV]).

Dans le § 1, nous montrons que $c(a)$ est aussi douée de la condition de $B^*$-algèbre c'est-à-dire qu'elle vérifie $c(a)^2 = c(a^*a) = c(aa^*) = c(a^*)^2$, (*cf.* Corollaire 1.6). Nous remarquons (Corollaire 1.8) que $c(a)$ est invariante par restriction à toute sous-$C^*$-algèbre de $A$, propriété connue pour le spectre. D'autre part, nous montrons que si $B$ est une sous-$C^*$-algèbre de $A$ alors (*cf.* Corollaire 1.9)

$$\widehat{B} = B \cap \widehat{A}.$$

Reçu par les éditeurs le 8 novembre 1991; réviseé le 25 mars 1992.
AMS subject classification: 46L05, 47A.
Mots clés: Conorme, inverse généralisé dans une $C^*$-algèbre.

Il est bien connu que l'application $x \longmapsto x^{-1}$ est continue de $A^{-1}$, l'ensemble des éléments inversibles de $A$, dans lui-même. Par contre, l'application $x \longmapsto x^{\dagger}$ n'est pas continue, même en dimension finie (*cf.* [4, page 336]). Plus précisément, Penrose (*cf.* [5], [4, Théorème 3.5, page 337]) a montré que si $\{M_n\}$ est une suite de matrices finies qui converge vers la matrice $M$ alors $\{M_n^{\dagger}\}$ converge vers $M^{\dagger}$ si et seulement si, pour $n$ assez grand rang $M_n = \operatorname{rang} M$. Nous donnons une extension à ce résultat aux éléments d'une $C^*$-algèbre (Théorème 2.2). C'est l'objet du § 2.

Finalement dans le § 3, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $b'a'$ soit un inverse généralisé de $ab$ où $a'$ et $b'$ sont respectivement un inverse généralisé de $a$ et $b$.

## 1. **Inverse généralisé et conorme.**

THÉORÈME 1.1. *Soit $a \in A$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

*1) $aA$ est fermé;*

*2) $a$ est régulier;*

*3) $a$ admet un inverse de Moore-Penrose.*

*En plus, si $a$ est normal (c'est-à-dire $aa^* = a^*a$), alors les conditions suivantes sont équivalentes aux conditions précédentes:*

*4) $aA = a^2A$;*

*5) $aA \oplus a^{-1}(0) = A$;*

*6) $0 \notin \operatorname{acc}\big(\sigma(a)\big)$ où $\operatorname{acc}\big(\sigma(a)\big)$ est l'ensemble des points d'accumulation du spectre $\sigma(a)$ de $a$.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3) voir [1].

Si $aa^* = a^*a$, alors:

3) $\Rightarrow$ 5) voir [1].

5) $\Rightarrow$ 4) c'est évident.

4) $\Rightarrow$ 5) Soit $x \in A$, alors $ax \in aA = a^2A$, d'où $ax = a^2y$ et $z = x - ay \in a^{-1}(0)$ donc $x = ay + z \in aA + a^{-1}(0)$.

D'autre part, remarquons que si $a$ est normal alors $\forall x \in A$, $\|ax\| = \|a^*x\|$. D'où $ax = 0 \Longleftrightarrow a^*x = 0$.

Soit $x \in aA \cap a^{-1}(0)$ alors $x = ay$ et $a^*x = a^*ay = 0$. D'où $y^*a^*ay = 0$ et, par conséquent, $x = ay = 0$.

5) $\Longleftrightarrow$ 6), preuve standard.

5) $\Rightarrow$ 1) Puisque $a$ est normal $az = 0 \Longleftrightarrow a^*z = 0 \Longleftrightarrow z^*a = 0$. Soit maintenant $ax_n \in aA$ tel que $ax_n \longrightarrow y$, alors, d'après 5), $y = ax + z$. Il s'ensuit que $0 = z^*ax_n \longrightarrow z^*y = z^*ax + z^*z$. D'où, $z^*z = 0$ et $y = ax \in aA$. ∎

REMARQUE. Si on note $L_a$ (resp. $R_a$) l'opérateur de multiplication à gauche (resp. à droite) $L_a(x) = ax$ (resp. $R_a(x) = xa$) alors $\operatorname{Im}(L_a) = aA$. En utilisant [2, Théorème 5.2 Chapitre IV], on a $c(L_a) = c(a) > 0$ si et seulement si $aA$ est fermé. Donc, d'après le théorème précédent, on a: $c(a) > 0$ si et seulement si a admet un inverse de Moore-Penrose.

LEMME 1.2. *Soit $a \in A^\dagger$, alors*
*1)* $\forall x \in A,\ d\big(a^\dagger x, a^{-1}(0)\big) = \|a^\dagger x\|$.
*2)* $c(a) = \inf\{\|ay\|\ ;\ y \in a^\dagger A$ *et* $\|y\| = 1\}$.

DÉMONSTRATION. 1) Il est clair que $d\big(a^\dagger x, a^{-1}(0)\big) \leq \|a^\dagger x\|$. Inversement soient $x \in A$ et $z \in a^{-1}(0)$; alors

$$\begin{aligned}\|a^\dagger x - z\|^2 &= \|(a^\dagger x - z)^*(a^\dagger x - z)\| = \|(a^\dagger x)^* a^\dagger x - (a^\dagger x)^* z - z^* a^\dagger x + z^* z\| \\ &= \|(a^\dagger x)^* a^\dagger x + z^* z\| \geq \|(a^\dagger x)^*(a^\dagger x)\| = \|a^\dagger x\|^2\end{aligned}$$

d'où $\|a^\dagger x - z\| \geq \|a^\dagger x\|$ et 1) est démontré.

2) Pour $x \in A$ on a $x = a^\dagger a x + (1 - a^\dagger a)x$, or $(1 - a^\dagger a)x \in a^{-1}(0)$. D'après 1)

$$d\big(x, a^{-1}(0)\big) = d\big(a^\dagger a x, a^{-1}(0)\big) = \|a^\dagger a x\|.$$

Remarquons aussi que $a^\dagger A = a^\dagger a A$. D'où $\inf\big\{\|ax\|\ ;\ d\big(x, a^{-1}(0)\big) = 1\big\} = \inf\{\|a a^\dagger a x\|\ ;\ \|a^\dagger a x\| = 1\} = \inf\{\|ay\|\ ;\ y \in a^\dagger A \text{ et } \|y\| = 1\}$. ∎

PROPOSITION 1.3. *Soit $a \in A^\dagger$, alors*

$$c(a) = \frac{1}{\|a^\dagger\|}.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que

$$A = (1 - a a^\dagger)A \oplus aA = (1 - a^\dagger a)A \oplus a^\dagger A.$$

$$\begin{aligned}\|a^\dagger\| &= \sup\left\{\frac{\|a^\dagger x\|}{\|x\|}\ ;\ x \in A \text{ et } x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|a^\dagger x\|}{\|x\|}\ ;\ x \in aA \text{ et } x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|a^\dagger a y\|}{\|ay\|}\ ;\ y \in a^\dagger A \text{ et } y \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|y\|}{\|ay\|}\ ;\ y \in a^\dagger A \text{ et } y \neq 0\right\} \\ &= \left[\inf\left\{\frac{\|ay\|}{\|y\|}\ ;\ y \in a^\dagger A \text{ et } y \neq 0\right\}\right]^{-1} = \frac{1}{c(a)},\end{aligned}$$

d'après le lemme précédent. ∎

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-068-8 Published online by Cambridge University Press

LEMME 1.4. *Soit $T \in B(X)$ avec $X$ un espace de Banach. Alors*

$$T(X) \oplus T^{-1}(0) = X \Rightarrow \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |\lambda| < c(T)\} \subset \rho(T)$$

DÉMONSTRATION. Posons $X_0 = T(X)$ et $T_0 \colon X_0 \longrightarrow X_0$, la réstriction de $T$ à $X_0$. Alors $T_0$ est inversible et $c(T) = \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$.

En outre, si $|\lambda| < c(T)$ alors $T_0 - \lambda$ est inversible. Donc $(T_0 - \lambda)X_0 = X_0$ pour $|\lambda| < c(T)$. D'autre part, $\forall \lambda \neq 0$, $(T-\lambda)^{-1}(0) \subseteq T(X)$. Donc

$$(T-\lambda)^{-1}(0) = (T-\lambda)^{-1}(0) \cap X_0 = (T_0-\lambda)^{-1}(0).$$

Par conséquent:

$$0 < |\lambda| < c(T) \Rightarrow (T-\lambda)^{-1}(0) = 0.$$

Par ailleurs, si $\lambda \neq 0$ alors $T^{-1}(0) \subseteq (T-\lambda)X$.

Donc, si $0 < |\lambda| < c(T)$ alors

$$X = X_0 + T^{-1}(0) = (T_0 - \lambda)X_0 + T^{-1}(0) \subseteq (T-\lambda)X$$

et le Lemme est démontré. ∎

THÉORÈME 1.5. *Soit $a \in A$ un élément positif. Alors*

$$c(a) = \inf\big\{\sigma(a) \setminus \{0\}\big\}.$$

DÉMONSTRATION. Notons $\beta = \inf\big\{\sigma(a) \setminus \{0\}\big\}$. Le Théorème 1.1 (1) $\Longleftrightarrow$ (6), montre que $c(a) = 0 \Longleftrightarrow \beta = 0$. Donc, on peut supposer que $c(a) > 0$ et $\beta > 0$. Alors $aA$ est fermé et $0 \notin \operatorname{acc}\big(\sigma(a)\big)$.

Montrons que, $\lambda \notin \sigma(a)$ et $0 < \lambda < \beta \Rightarrow c(a) \geq \lambda$.

En effet, $\lambda \notin \sigma(a) \Rightarrow (a-\lambda)b = 1$. En outre, $\lambda < \beta \Rightarrow a - \lambda \geq 0$. Donc $b \geq 0$. D'autre part, $\forall x \in A$, $abx = x + \lambda bx$.

D'où

$$\begin{aligned} \|abx\|^2 &= \|(x+\lambda bx)^*(x+\lambda bx)\| \\ &= \|x^*x + \lambda x^*bx + \lambda x^*bx + \lambda^2 x^*b^2x\| \\ &\geq \|\lambda^2 x^*b^*bx\| = \|\lambda bx\|^2. \end{aligned}$$

Donc, $\|abx\| \geq \lambda\|bx\|$.

Or, $bA = A$, donc $\forall y \in A$, $\|ay\| \geq \lambda\|y\|$.

Donc, $\forall y \in A$, $\|ay\| \geq \lambda d\big(y, a^{-1}(0)\big)$. Par conséquent, $c(a) \geq \beta$.

Réciproquement: $a$ étant positif et $c(a) > 0$, on a $aA \oplus a^{-1}(0) = A$ (*cf.* Théorème 1.1). En utilisant le Lemme 1.4 avec $X = A$ et $T = L_a$, on obtient l'inégalité $\beta \geq c(a)$. Et le théorème est démontré. ∎

COROLLAIRE 1.6. *Soit $a \in A$, alors on a:*
*(1)* $c(a) = \inf\{\sigma(a^*a)^{1/2} \setminus \{0\}\}$;
*(2)* $c(a)^2 = c(a^*a) = c(aa^*) = c(a^*)^2$.

DÉMONSTRATION. Remarquons que $\|ax\| = \|(a^*a)^{1/2}x\|$ $\forall x \in A$. Donc $c(a) = c(a^*a)^{1/2}$. Or, $(a^*a)^{1/2} \geq 0$, le théorème précédent implique que $c(a) = c(a^*a)^{1/2} = \inf\{\sigma(a^*a)^{1/2} \setminus \{0\}\}$, ce qui établit (1).

De même, $c(a) = c(a^*a)^{1/2} = [\inf\{\sigma(a^*a) \setminus \{0\}]^{1/2} = [\inf\{\sigma(aa^*) \setminus \{0\}]^{1/2} = c(aa^*)^{1/2} = c(a^*)$ et (2) est démontré. ■

COROLLAIRE 1.7. *Soit $a \in B \subset A$, une sous-$C^*$-algèbre alors $c(a) = c_B(a)$ où $c_B(a) = \inf\{\|ax\|, d(x, a^{-1}(0)) = 1 \text{ et } x \in B\}$.*

DÉMONSTRATION. Conséquent du Corollaire 1.6 et du fait que le spectre admet cette propriété. ■

COROLLAIRE 1.8. *Soit $B \subset A$, une sous-$C^*$-algèbre. Alors:*

$$\overline{B} = B \cap \overline{A}.$$

DÉMONSTRATION. Conséquence du Corollaire 1.7. ■

Application à $B(H)$ avec $H$ espace de Hilbert.

COROLLAIRE 1.9. *Soit $T \in B(H)$, alors*

$$c(T) = c(L_T) = c(R_T) = c(T^*).$$

*Par conséquent $T(H)$ est fermé dans $H$ si et seulement si $TB(H)$ est fermé dans $B(H)$ si et seulement si $B(H)T$ est fermé dans $B(H)$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que $\sigma(T) = \sigma(L_T) = \sigma(R_T)$. ■

2. **Convergence de l'inverse de Moore-Penrose.** Tout d'abord, on a le lemme suivant:

LEMME 2.1. *Soient $a, b \in A^\dagger$, tel que $\|b^\dagger b - a^\dagger a\| < 1$, alors*

$$|c(b) - c(a)| \leq \|b - a\|.$$

DÉMONSTRATION. $\|b^\dagger b - a^\dagger a\| < 1$ implique que $1 - (b^\dagger b - a^\dagger a)$ et $1 - (a^\dagger a - b^\dagger b)$ sont inversibles dans $A$. Donc $\forall x \in A$, il existe $x' \in A$ tel que

$$x = (1 - b^\dagger b)x' + a^\dagger a x' \tag{1}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-068-8 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}\|bx\| &= \|ba^{\dagger}ax'\| = \|(b-a)a^{\dagger}ax' + aa^{\dagger}ax'\| \\ &\geq \|aa^{\dagger}ax'\| - \|b-a\|\cdot\|a^{\dagger}ax'\| \\ &\geq c(a)\|a^{\dagger}ax'\| - \|b-a\|\cdot\|a^{\dagger}xx'\| = [c(a)-\|b-a\|]\cdot\|a^{\dagger}ax'\|.\end{aligned}$$

Or, (1) $\Rightarrow d\big(x, b^{-1}(0)\big) = d\big(a^{\dagger}ax', b^{-1}(0)\big)$. Par conséquent, $c(b) \geq c(a) - \|b-a\|$ ou encore, $c(a) - c(b) \leq \|b-a\|$. En interchangeant $a$ et $b$, on trouve

$$|c(a)-c(b)| \leq \|b-a\|. \qquad \blacksquare$$

THÉORÈME 2.2. *Soient $a_n, a \in A^{\dagger}$ tels que $a_n \longrightarrow a$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

*(1)* $a_n^{\dagger} \longrightarrow a^{\dagger}$;
*(2)* $a_n^{\dagger}a_n \longrightarrow a^{\dagger}a$;
*(2′)* $a_na_n^{\dagger} \longrightarrow aa^{\dagger}$;
*(3)* $c(a_n) \longrightarrow c(a)$;
*(4)* $\sup_{n\in N}\|a_n^{\dagger}\| < \infty$.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2) et (2′), C'est facile à voir.

(2) $\Rightarrow$ (3): Pour $n$ assez grand, on a $\|a_n^{\dagger}a_n - a^{\dagger}a\| < 1$, le lemme précédent avec $b = a_n$ permet de conclure.

(3) $\Rightarrow$ (4): Il est clair qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $c(a_n) \geq \alpha$ (puisque $c(a) > 0$). En utilisant la Proposition 1.3, on conclu (4).

(4) $\Rightarrow$ (1): Remarquons d'abord l'égalité suivante:

$$a_n^{\dagger} - a^{\dagger} + a_n^{\dagger}(a_n - a)a^{\dagger} = a_n^{\dagger}(1 - aa^{\dagger}) - (1 - a_n^{\dagger}a_n)a^{\dagger},$$

et en utilisant les propriétés de l'inverse de Moore-Penrose, on voit que

$$a_n^{\dagger}a_n^{*\dagger}(a_n^* - a^*)(1 - aa^{\dagger}) = a_n^{\dagger}(1 - aa^{\dagger}) \text{ et } (1 - a_n^{\dagger}a_n)(a_n^* - a^*)a^{*\dagger}a^{\dagger} = -(1 - a_n^{\dagger}a_n)a^{\dagger}.$$

Ce qui implique

$$a_n^{\dagger} - a^{\dagger} = -a_n^{\dagger}(a_n - a)a^{\dagger} + a_n^{\dagger}a_n^{*\dagger}(a_n^* - a^*)(1 - aa^{\dagger}) + (1 - a_n^{\dagger}a_n)(a_n^* - a^*)a^{*\dagger}a^{\dagger}.$$

Par conséquent, $\|a_n^{\dagger} - a^{\dagger}\| \leq 3\max\{\|a_n^{\dagger}\|^2, \|a^{\dagger}\|^2\}\|a_n - a\|$. Pusique $\sup_{n\in N}\|a_n^{\dagger}\| < \infty$, il est clair que $a_n^{\dagger} \longrightarrow a^{\dagger}$.

(2′) $\Rightarrow$ (1): Dans (2), on remplace $a_n$ et $a$ respectivement par $a_n^*$ et $a^*$.

REMARQUE. La condition "(1) $\iff$ (2)" du Théorème précédent généralise le résultat de Penrose [4, Théorème 3.5 page 337]. En effet, on a $a_na_n^{\dagger}A = a_nA$ et $aa^{\dagger}A = aA$.

D'autre part, $a_na_n^{\dagger} \longrightarrow aa^{\dagger}$ implique qu'il existe $N$ tel que $n \geq N$, $\|a_n^{\dagger}a_n - a^{\dagger}a\| < 1$. D'où, pour $n$ assez grand $\dim(a_na_n^{\dagger}A) = \dim(aa^{\dagger}A)$ ou encore $\dim(a_nA) = \dim(aA)$ pour $n$ assez grand.

## 3. **Produit d'éléments réguliers.**

THÉORÈME 3.1. *Soient $a, b \in A$ des éléments réguliers d'inverses généralisés respectifs $a'$ et $b'$. Notons $p = bb'$ et $q = a'a$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

*1) $b'a'$ est un inverse généralisé de $ab$,*
*2) $a(pq - qp)b = 0$,*
*3) $qp$ est idempotent.*

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2): Remarquons que $a = aq$ et $b = pb$.
Alors

$$abb'a'ab = ab = aqpb$$

d'où

$$apqb = aqpb$$

donc

$$a(pq - qp)b = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Supposons: $a(pq - qp)b = 0$
Alors

$$a'a(pq - qp)bb' = 0$$

ou encore

$$q(pq - qp)p = 0$$

d'où

$$qpqp - q^2p^2 = 0$$

donc

$$(qp)^2 = qp.$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Supposons que $qpqp = qp$ et multipliant à gauche par $a$ et à droite par $b$, cette égalité, alors on conclut (1).

REMARQUE. Avec les notations du théorème précédent, la condition "$pq = qp$" est suffisante pour conclure que $b'a'$ est un inverse généralisé de $ab$. Par contre, en général, elle n'est pas nécessaire. Par exemple, si $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, les matrices $2 \times 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}$, avec

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $a^2 = a = a' = q$ et $b^2 = b = b' = p$ et $ab = 0 = qp$ donc $qp$ est une projection, le Théorème 3.1 (3) implique que $b'a'$ est un inverse généralisé de $ab$. Mais $pq = ba \neq qp$.

QUESTION. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes (analogues à celles du Théorème 3.1) pour que $(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger$?

## RÉFÉRENCES

**1.** R. E. Harte and M. Mbekhta, *On generalized inverses in $C^*$-algebras*, Studia Math., à paraître.
**2.** T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1966.
**3.** J. von Neumann, *Continuous Geometry*, Princeton Univ. Press, 1960.
**4.** M. Z. Nashed, *Generalized inverses and applications*, Academic Press, New York, 1976.
**5.** R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51**(1955), 406–413.

*Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois*
*URA D 0751 (Géométrie—Analyse—Topologie)*
*U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées*
*59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France)*