

SUR UN THÉORÈME DE M. MATSUSHIMA

KENTARO YANO

§ 0. Dans une Note parue dans ce Journal, M. Matsushima [1] a démontré le

THÉORÈME. *Dans un espace compact de Kähler-Einstein dont la courbure est positive, un vecteur analytique contrevariant u peut s'écrire d'une et d'une seule manière sous la forme $u = v + Fw$ où v et w sont tous les deux les vecteurs de Killing et F le tenseur définissant la structure complexe de l'espace.*

Dans cette Note on va donner deux démonstrations de ce théorème en utilisant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur soit analytique contrevariant. La première est donnée dans § 3 et la deuxième dans § 4.

§ 1. Considérons un espace V de Riemann compact et orientable de n dimensions dont la métrique $ds^2 = g_{ji}(\xi) d\xi^j d\xi^i$ est définie positive. On désigne par d l'opérateur qui opère à un tenseur symétrique gauche $u : u_{i_1 i_2 \dots i_p}$ de degré p et donne un tenseur symétrique gauche de degré $p + 1$, $du : \nabla_i u_{i_1 i_2 \dots i_p} - \nabla_{i_1} u_{ii_2 \dots i_p} - \dots - \nabla_{i_p} u_{i_1 \dots i_{p-1} i}$ et par δ l'opérateur qui donne un tenseur symétrique gauche de degré $p - 1$, $\delta u : -g^{ji} \nabla_j u_{ii_1 \dots i_p}$, ∇_j étant l'opérateur de la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ ji \end{smallmatrix} \right\}$. Il est bien connu que $ddu = 0$ et $\delta\delta u = 0$.

On désigne par Δ l'opérateur $\delta d + d\delta$. Pour un vecteur u , on a $\Delta u : -(g^{ji} \nabla_j \nabla_i u_h - K_h^i u_i)$, K_h^i étant le tenseur de Ricci. On peut facilement vérifier que $\Delta du = d\Delta u$ et $\Delta \delta u = \delta \Delta u$.

On définit le produit global de deux tenseurs symétriques gauches $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$ et $b_{i_1 i_2 \dots i_p}$ de même degré p par $(a, b) = \frac{1}{p!} \int_V a_{i_1 i_2 \dots i_p} b^{i_1 i_2 \dots i_p} \sqrt{g} d\xi^1 \wedge \dots \wedge d\xi^n$, g étant le déterminant formé avec g_{ji} .

Il est bien connu que $(du, v) = (u, \delta v)$, $(\delta u, v) = (u, dv)$ et $(\Delta u, u) = (du, du) + (\delta u, \delta u)$. La dernière équation démontre un théorème célèbre : Pour qu'un tenseur symétrique gauche soit harmonique, il faut et il suffit que $\Delta u = 0$.

Received May 25, 1957.

Exactement de la même manière que la précédente, on désigne par D l'opérateur qui opère à un tenseur symétrique $u : u_{i_p i_{p-1} \dots i_1}$ de degré p et donne un tenseur symétrique de degré $p + 1$, $Du : \nabla_i u_{i_p i_{p-1} \dots i_1} + \nabla_{i_p} u_{i i_{p-1} \dots i_1} + \dots + \nabla_{i_1} u_{i_p i_{p-1} \dots i_2 i}$, et par δ l'opérateur qui donne un tenseur symétrique de degré $p - 1$, $\delta u : -g^{ji} \nabla_j u_{i i_{p-1} \dots i_1}$. Si l'on pose $\square = \delta D - D\delta$, on a, pour un vecteur u , $\square u : -(g^{ji} \nabla_j \nabla_i u^h + K_i^h u^i)$.

Si l'on définit le produit global de deux tenseurs symétriques $a_{i_p i_{p-1} \dots i_1}$ et $b_{i_p i_{p-1} \dots i_1}$ par la même formule que la précédente, on trouve $(Du, v) = (u, \delta v)$, $(\delta u, v) = (u, Dv)$ et $(\square u, u) = (Du, Du) - (\delta u, \delta u)$. Un vecteur de Killing u est caractérisé par $Du = 0$ (et $\delta u = 0$) et par conséquent satisfait à $\square u = 0$. La dernière équation démontre le

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur u soit un vecteur de Killing, il faut et il suffit que $\square u = 0$ et $\delta u = 0$.*

§ 2. Considérons un espace compact de Kähler et désignons par F le tenseur qui définit la structure complexe de l'espace. Alors on a $F_j^i F_i^h = -A_j^h$, $F_{ji} = -F_{ij}$ et $\nabla_j F_{ih} = 0$.

Un tenseur u_{ji} est dit pur s'il satisfait à $*Ou = 0 : \frac{1}{2} (A_j^c A_i^b + F_j^c F_i^b) u_{cb} = 0$ et hybride s'il satisfait à $Ou = 0 : \frac{1}{2} (A_j^c A_i^b - F_j^c F_i^b) u_{cb} = 0$. De même un tenseur u_i^h est dit pur s'il satisfait à $*Ou = 0 : \frac{1}{2} (A_i^b A_a^h + F_i^b F_a^h) u_b^a = 0$ et hybride s'il satisfait à $Ou = 0 : \frac{1}{2} (A_i^b A_a^h - F_i^b F_a^h) u_b^a = 0$. Il est facile de voir que les opérateurs O et $*O$ satisfont aux $O + *O = A$, $O \cdot O = 0$, $O \cdot *O = *O \cdot O = 0$, $*O \cdot *O = *O$, A étant l'opérateur identique.

Or un vecteur u_i est dit analytique covariant si sa dérivée covariante $\nabla_j u_i$ est pure, c'est-à-dire, si l'on a $*O\nabla u = 0 : \frac{1}{2} (A_j^c A_i^b + F_j^c F_i^b) \nabla_c u_b = 0$. Entre les opérateurs Δ et $*O\nabla$ appliqués à un vecteur covariant, on a les relations $2\Delta u = -\delta *O\nabla u$ et $(\Delta u, u) = (*O\nabla u, *O\nabla u)$, qui démontrent le

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur soit analytique covariant, il faut et il suffit que $\Delta u = 0$, c'est-à-dire, que le vecteur soit harmonique.*

Un vecteur u^h est dit analytique contrevariant, si sa dérivée covariante $\nabla_j u^h$ est pure, c'est-à-dire, si l'on a $*O\nabla u = 0 : \frac{1}{2} (A_i^b A_a^h + F_i^b F_a^h) \nabla_b u^a = 0$. Entre les opérateurs \square et $*O\nabla$ appliqués à un vecteur contrevariant, on a les relations $2\square u = -\delta *O\nabla u$ et $(\square u, u) = (*O\nabla u, *O\nabla u)$, qui démontrent le

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur u soit analytique contrevariant, il faut et il suffit que $\square u = 0$. (Voir K. Yano [3]).*

§ 3. Considérons un espace de Kähler-Einstein. Un tel espace est caractérisé par l'équation $K_i^h = kA_i^h$, k étant une constante. L'opérateur Δ appliqué à un vecteur u prend la forme $\Delta u : -(g^{ji}\nabla_j\nabla_i u^h - ku^h)$ et \square appliqué à un vecteur u la forme $\square u : -(g^{ji}\nabla_j\nabla_i u^h + ku^h)$ et par conséquent on a $\square u = \Delta u - 2ku$, d'où

THÉORÈME. *Pour qu'un vecteur dans un espace compact de Kähler-Einstein soit analytique contrevariant, il faut et il suffit que $\Delta u = 2ku$.*

D'après Bochner [4], si $k > 0$, il n'existe pas un vecteur analytique covariant et si $k < 0$, il n'existe pas un vecteur analytique contrevariant. Si $k = 0$, un vecteur analytique covariant ou contrevariant est parallèle.

Supposons donc que $k > 0$ et prenons un vecteur analytique contrevariant u , alors on a $\Delta u = 2ku$, d'où $\Delta d\delta u = 2kd\delta u$, ce qui montre que $w' = d\delta u$ est un vecteur analytique contrevariant. Or le vecteur $v = u - \frac{1}{2k} w'$ satisfait à $\Delta v = 2kv$, il est donc aussi un vecteur analytique contrevariant. Or $\delta v = \delta u - \frac{1}{2k} \delta w' = \delta u - \frac{1}{2k} \delta d\delta u = \delta u - \frac{1}{2k} \delta \Delta u = \delta u - \delta u = 0$. Donc, le vecteur v , satisfaisant à $\Delta v = 2kv$ et $\delta v = 0$, est un vecteur de Killing. Donc, on a démontré que $u = v + \frac{1}{2k} w'$ où v est un vecteur de Killing et w' un vecteur analytique contrevariant.

Il est facile de voir que si w' est un vecteur analytique contrevariant, alors $Fw' : F_i^h w'^i$ l'est aussi. D'autre part, w' étant un vecteur gradient, on a $\delta(Fw') = \nabla_j F^{ji} w'_i = F^{ji} \nabla_j w'_i = 0$, d'où, le vecteur $w = -\frac{1}{2k} Fw'$ est un vecteur de Killing. Le vecteur $\frac{1}{2k} w'$ étant de la forme $\frac{1}{2k} w' = Fw$, on a $u = v + Fw$ où v et w sont tous les deux les vecteurs de Killing.

Si le vecteur analytique contrevariant u admet deux telles décompositions $u = v_1 + Fw_1$ et $u = v_2 + Fw_2$, on en tire $(v_1 - v_2) + F(w_1 - w_2) = 0$, d'où, $v_1 - v_2$ étant un vecteur de Killing, $\delta F(w_1 - w_2) = 0$, qui montre que $F(w_1 - w_2)$, étant gradient et ayant la codifférentielle nulle, est nul, d'où $w_1 = w_2$ et par conséquent $v_1 = v_2$, ce qui démontre le théorème de M. Matsushima.

§ 4. Soit u un vecteur analytique contrevariant : $\Delta u = 2ku$ et $u = h + da + \delta b$ la décomposition de de Rham-Kodaira [2] de u , h étant un vecteur harmonique.

On a $\Delta u = \Delta(h + da + \delta b) = 2k(h + da + \delta b)$, d'où $-2kh + d(\Delta a - 2ka) + \delta(\Delta b - 2kb) = 0$, par conséquent, si $k \neq 0$, on a $h = 0$, $\Delta da = 2kda$, $\Delta \delta b = 2k\delta b$. Donc da et δb sont tous les deux vecteurs analytiques contrevariants. Si l'on pose $da = w'$, $\delta b = v$, on a $\delta v = 0$, $\delta(-Fw') = 0$, donc v et $-Fw' = w$ sont tous les deux les vecteurs de Killing et on a $u = v + Fw$. L'unicité de cette décomposition se démontre de la même manière que la précédente.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Matsushima : Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne. *Nagoya Mathematical Journal*, **11** (1957), 145-150.
- [2] G. de Rham et K. Kodaira : Harmonic integrals. *Institute for Advanced Study* (1950).
- [3] K. Yano : Some integral formulas and their applications. To appear in *Michigan Journal of Mathematics*.
- [4] K. Yano et S. Bochner : Curvature and Betti numbers. *Annals of Mathematics Studies*, No. 32 (1953).

Université de Tokyo