Can. J. Math., Vol. XXVIII, No. 5, 1976, pp. 961–967

SUR L'APPROXIMATION POLYNOMIALE SUR TOUT L'AXE REEL

G. FREUD, A. GIROUX ET Q. I. RAHMAN

1. Introduction. Soit $Q(x)$ une fonction positive paire continûment différentiable pour $-\infty < x < \infty$ telle que $xQ'(x)$ soit croissante pour $x > 0$ et que $Q'(x) \to \infty$ lorsque $x \to \infty$. Désignons par Q_n l'unique racine positive de l'équation $xQ'(x) = n$. L'approximation polynomiale des fonctions continues relativement au poids $e^{-Q(x)}$ a été étudiée par de nombreux mathématiciens. Le résultat suivant est une conséquence d'un théorème de l'un des auteurs (voir Freud [**1**]): *si $F(x)$ est une fonction réelle continue pour $-\infty < x < \infty$ qui satisfait une condition de Lipschitz d'ordre α où $0 < \alpha < 1$, il existe une suite de polynômes $\{P_n(x)\}$ où* deg $P_n \leqq n$ *telle que*

$$(1) \qquad |F(x) - P_n(x)| \leqq K(Q_n/n)^\alpha, \quad |x| \leqq 4Q_n, \quad n \geqq 1$$

où K est une constante positive ne dépendant que de F. Le but du présent travail est d'essayer de caractériser les fonctions pour lesquelles une relation du type (1) est valable.

Notations. Soit $\{k_n\}$ une suite croissante et non bornée de nombres positifs telle que la suite $\{k_n/n\}$ décroisse vers 0 et que l'on ait

$$(2) \qquad q \leqq k_{2n}/k_n \leqq Q \quad \text{où} \quad 1 < q \leqq Q < 2, \quad n \geqq 1.$$

Posons $I_n = [-k_n, k_n]$. Si $f(x)$ est une fonction réelle continue pour $-\infty < x < \infty$, soient

$$||f||_n = \max \{|f(x)|: x \in I_n\},$$
$$\omega_n(f, \delta) = \max \{|f(x+h) - f(x)|: x \in I_n, |h| \leqq \delta\}, \delta > 0.$$

(Ces notations diffèrent des notations usuelles.) On désignera par $C_1, C_2, \ldots$ des constantes positives absolues ou ne dépendant que de la suite $\{k_n\}$ ou de la fonction f; $p_n(x), \pi_n(x), \ldots$ désigneront des polynômes de degré $\leqq n$; enfin, $\alpha \in (0, 1)$. Introduisons alors les définitions suivantes:

Définition 1. La fonction f satisfait une *condition de Lipschitz évanescente d'ordre α* ($f \in$ slip α: *shrinking Lipschitz condition of order α*) *lorsque*

$$(3) \qquad \omega_n(f, \delta) \leqq C_1\delta^\alpha \quad \text{si} \quad \delta \leqq k_n/n, \quad n \geqq 1.$$

Définition 2. Nous dirons que $f \in Q_\alpha$ s'il existe une suite de polynômes $\{p_n\}$ telle que

$$(4) \qquad ||f - p_n||_n \leqq C_2(k_n/n)^\alpha, \quad n \geqq 1.$$

Reçu le 11 juillet, 1975 et sous forme revisée, le 4 mai, 1976.

2. L'approximation des fonctions continues. Nous aurons l'occasion d'utiliser le résultat auxiliaire suivant:

LEMME. *Si $F \in C_{2\pi}$ et T_n est un polynôme trigonométrique d'ordre $\leqq n$, on a*

(5) $\quad ||T_n'|| \leqq n(4||T_n - F|| + 2\,\omega(F, 1/n))$

où $||\ ||$ est la norme de $C_{2\pi}$ et ω le module de continuité usuel. De même, si $G \in C[-1, 1]$, on a

(6) $\quad |p_n'(x)| \leqq n(4||p_n - G|| + 2\omega(G, 1/n))(1 - x^2)^{-1/2}, \quad |x| < 1$

où cette fois $||\ ||$ désigne la norme de $C[-1, 1]$.

Démonstration. L'inégalité (6) découle de l'inégalité (5) en posant $F(\theta) = G(\cos\theta)$, $T_n(\theta) = p_n(\cos\theta)$ et en remarquant que $\omega(F, 1/n) \leqq \omega(G, 1/n)$. Pour démontrer (5), posons $\pm T_n'(\varphi) = ||T_n'||$ et observons d'abord que l'on a

(7) $\quad \pm T_n'(\theta) \geqq ||T_n'||/2 \quad \text{si} \quad |\theta - \varphi| \leqq 1/2n.$

En effet, en écrivant que $\pm T_n'(\theta) > ||T_n'||/2$ si $\varphi \leqq \theta < \varphi_1$ et que $\pm T_n'(\varphi_1) = ||T_n'||/2$, on aura

$$||T_n'||/2 = \pm[T_n'(\varphi) - T_n'(\varphi_1)] = \mp \int_\varphi^{\varphi_1} T_n''(u)du$$

d'où, en vertu de l'inégalité de Bernstein,

$$||T_n'||/2 \leqq n\,||T_n'||(\varphi_1 - \varphi)$$

ce qui démontre la relation (7). Appliquant (7) on a

$$\begin{aligned}||T_n'||/2n &\leqq \pm\int_{\varphi-1/2n}^{\varphi+1/2n} T_n'(\theta)d\theta = \pm[T_n(\varphi + 1/2n) - T_n(\varphi - 1/2n)]\\ &\leqq |T_n(\varphi + 1/2n) - F(\varphi + 1/2n)| + |T_n(\varphi - 1/2n)\\ &\qquad - F(\varphi - 1/2n)| + |F(\varphi + 1/2n) - F(\varphi - 1/2n)|\\ &\leqq 2||T_n - F|| + \omega(F, 1/n)\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration du lemme.

Nous revenons maintenant au problème principal.

THEOREME 1. *Si $f \in$* slip α, *alors $f \in Q_\alpha$. De plus, on peut toujours choisir les polynômes p_n dans* (4) *de telle sorte que*

(8) $\quad ||p_n'||_n \leqq C_3(k_n/n)^{\alpha-1}, \quad n \geqq 1.$

Démonstration. L'entier n étant fixé, soit

$$f_n(x) = \frac{n}{k_n}\int_x^{x+k_n/n} f(t)dt.$$

Alors

$$f_n'(x) = (n/k_n)(f(x + k_n/n) - f(x))$$

de telle sorte que, supposant $f \in$ slip α, on a

$$\|f - f_n\|_n \leqq C_1(k_n/n)^\alpha, \quad \|f_n'\|_n \leqq C_1(k_n/n)^{\alpha-1}.$$

Dans l'intervalle $[-1, 1]$, la fonction $g_n(x) = f_n(k_n x)$ satisfait la relation

$$|g_n'(x)| \leqq C_1 n(k_n/n)^\alpha.$$

En vertu du théorème de Jackson, il existe un polynôme $p_{n/2}$ tel que

$$|g_n(x) - p_{n/2}(k_n x)| \leqq C_4 C_1(k_n/n)^\alpha, \quad |x| \leqq 1.$$

Ainsi

$$\|f_n - p_{n/2}\|_n \leqq C_4 C_1 (k_n/n)^\alpha$$

d'où

$$\|f - p_{n/2}\|_n \leqq C_1(1 + C_4)(k_n/n)^\alpha = C_2(k_n/n)^\alpha$$

et $f \in Q_\alpha$. Désignons maintenant par π_n le polynôme qui approche le mieux la fonction f sur I_{2n}. Puisque la suite $\{k_n/n\}$ est supposée décroissante, on a

$$\|f - \pi_n\|_n \leqq \|f - \pi_n\|_{2n} \leqq C_2(k_{2n}/2n)^\alpha \leqq C_2(k_n/n)^\alpha.$$

De plus, en rapprochant l'inégalité du milieu avec le lemme, on obtient

$$\begin{aligned}\|\pi_n'\|_n &\leqq C_5(2n/k_{2n})((k_{2n}/2n)^\alpha + \omega_{2n}(f, k_{2n}/2n)) \\ &\leqq C_6(k_{2n}/2n)^{\alpha-1} \leqq C_3(k_n/n)^{\alpha-1}\end{aligned}$$

(nous utilisons l'hypothèse (2) faite sur la suite $\{k_n\}$) ce qui démontre (8) et termine la démonstration.

Abordons ensuite le problème réciproque.

THEOREME 2. *Si $f \in Q_\alpha$, on a*

(9) $\quad \omega_n(f, \delta) \leqq C_7(\delta^\alpha + A(n, f)\delta) \quad$ *si* $\quad \delta \leqq k_n/n, \quad n \geqq 1$

où $A(n, f)$ est une constante positive dépendant de n et de f.

Démonstration. L'entier n étant fixé et $\delta < k_n/n$, soient (en vertu de (2)) $n < m < C_8 n$ tel que $2k_n < k_m$ et $N = 2^u m$ tel que $C_9 \leqq N\delta/k_N \leqq C_{10}$. On a

$$\|p_m\|_m \leqq \|f\|_m + \|p_m - f\|_m = B(n, f)$$

de telle sorte que l'inégalité de Bernstein entraîne

(10) $\quad |p_m'(x)| \leqq C_{11}B(n, f)m/k_m \leqq C_{11}C_8 B(n, f)n/k_n = A(n, f), \quad |x| \leqq \tfrac{3}{4}k_m.$

D'autre part, pour tout entier $\nu \geqq 0$, on tire de (4) que

$$\|p_{2^{\nu+1}m} - p_{2^\nu m}\|_{2^\nu m} \leqq \|p_{2^{\nu+1}m} - f\|_{2^\nu m} + \|p_{2^\nu m} - f\|_{2^\nu m} \leqq 2C_2(k_{2^\nu m}/2^\nu m)^\alpha$$

et appliquant encore une fois l'inégalité de Bernstein:

(11) $\quad |p_{2^{\nu+1}m}'(x) - p_{2^\nu m}'(x)| \leqq C_{12}(k_{2^\nu m}/2^\nu m)^{\alpha-1}, \quad |x| \leqq \tfrac{3}{4}k_{2^\nu m}.$

Donc, si $|x| \leqq (3/2)k_n$, l'application simultanée des inégalités (2), (10) et (11) donne

$$|p_N'(x)| \leqq \sum_{\nu=0}^{u-1} |p_{2^{\nu+1}m}'(x) - p_{2^\nu m}'(x)| + |p_m'(x)|$$
$$\leqq C_{12} \sum_{\nu=0}^{u-1} (k_{2^\nu m}/2^\nu m)^{\alpha-1} + A(n,f)$$
$$\leqq C_{13}(k_N/N)^{\alpha-1} + A(n,f).$$

Finalement, si $|x| \leqq k_n$ et $|h| \leqq \delta$, le théorème des accroissements finis nous donne

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq |f(x+h) - p_N(x+h)| + |f(x) - p_N(x)| + |p_N'(y)|\ |h|$$

et, compte tenu des inégalités précédentes,

$$|f(x+h) - f(x)| \leqq 2C_2(k_N/N)^\alpha + \{C_{13}(k_N/N)^{\alpha-1} + A(n,f)\}\delta$$
$$\leqq C_7(\delta^\alpha + A(n,f)\delta)$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

COROLLAIRE. *Si $f \in Q_\alpha$, alors $f \in$ Lip α sur tout intervalle compact $[a, b]$.*

Ceci résulte directement de l'inégalité (9) où l'on fixe n de telle sorte que $I_n \supseteq [a, b]$.

Remarque. Il n'est pas vrai que $f \in Q_\alpha$ entraîne nécessairement $f \in$ slip α. En voici un exemple.

Considérant la partie imaginaire de

$$-z^{-1}(1 - z^2)\log(1 - z^2) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{k(k-1)},$$

nous obtenons

$$(12) \quad g(\theta) = -2 \sin\theta \log 2|\sin\theta| = \sin\theta - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\theta}{k(k-1)}.$$

Ainsi $g(\theta)$ peut être approchée (par les sommes partielles de (12)) par un polynôme d'ordre n avec une erreur d'ordre $O(n^{-1})$. En vertu du théorème de Zygmund,

$$(13) \quad \Omega(g, \delta) = \sup_{|h|\leqq\delta} |g(t+h) + g(t-h) - 2g(t)| \leqq C_{14}\delta.$$

Puisque g est différentiable au voisinage de $\theta = \pm\pi/3$ et que $g(\pm\pi/3) = 0$, la fonction

$$G(t) = \begin{cases} g(t), & |t| \leqq \pi/3 \\ 0, & |t| \geqq \pi/3 \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1976-093-1 Published online by Cambridge University Press

satisfait (en vertu de (13)) pour tout $t \in (-\infty, +\infty)$ et pour tout $h > 0$

(14) $|G(t+h) + G(t-h) - 2G(t)| \leqq C_{15}h.$

Soient alors $n_1, n_2, \ldots$ une suite d'entiers choisis par récurrence tels que $n_1 = 1$ et que $n_{\nu+1}$ soit le plus petit entier $> n_\nu$ tel que $k_{n_{\nu+1}} - k_{n_\nu} > \frac{2}{3}\pi$. Posons

$$\gamma(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} G((k_{n_\nu}/n_\nu)^{\alpha-1}(t - k_{n_\nu})).$$

A cause de (14) on a pour tous t, h tels que $(t-h, t+h) \subseteq I_{2n}$

$$|\gamma(t+h) - \gamma(t-h) - 2\gamma(t)| \leqq 2C_{15}(k_n/n)^{\alpha-1}h$$

de telle sorte que la fonction

$$\gamma_n(t) = \gamma(k_n t)$$

satisfait la relation

$$\sup_{0<h<1/n} |\gamma_n(t+h) + \gamma_n(t-h) - 2\gamma_n(t)| \leqq 2C_{15}(k_n/n)^\alpha, \quad |t| \leqq 1.$$

En vertu de la version du théorème de Zygmund pour les polynômes algébriques (voir Freud [**2**]), il existe une suite de polynômes $\{p_n(k_n t)\}$ tels que

$$|\gamma_n(t) - p_n(k_n t)| = |\gamma(k_n t) - p_n(k_n t)| \leqq C_{16}C_{15}(k_n/n)^\alpha, \quad |t| \leqq 1,$$

c'est-à-dire que $\gamma \in Q_\alpha$. Mais, par construction,

$$\begin{aligned}\gamma(k_{n_\nu}) - \gamma(k_{n_\nu} - k_{n_\nu}/n_\nu) &= g(0) - g((k_{n_\nu}/n_\nu)^\alpha) \\ &\approx 2\,\alpha(k_{n_\nu}/n_\nu)\log(n_\nu/k_{n_\nu}) \gg (k_{n_\nu}/n_\nu)\end{aligned}$$

de telle sorte que $\gamma \notin$ slip α. Remarquons que $\gamma(t)$ est une fonction uniformément bornée.

On a toutefois le résultat suivant:

THEOREME 3. *Soit π_n le polynôme de meilleur approximation de la fonction continue f sur l'intervalle I_n. Si*

(15) $\lim_{n\to\infty} ||f - \pi_n||_n = 0$

et si

(16) $||\pi_n'||_n \leqq C_{17}(k_n/n)^{\alpha-1}, \quad n \geqq 1$

alors $f \in$ slip α.

Démonstration. Cette démonstration s'inspire d'un raisonnement de Sunouchi (voir Sunouchi [**3**]). Désignons par $\pi_N(I, F)$ le polynôme de meilleure approximation d'une fonction continue F sur un intervalle I et posons $\epsilon_n = ||f - \pi_n||_n$. En vertu du théorème de Jackson, l'inégalité (16) implique (utilisant (2)) que

$$||\pi_n(I_{2n}, \pi_{2n}) - \pi_{2n}||_{2n} \leqq C_{18}(k_n/n)^\alpha.$$

Par suite,

$$C_{18}(k_n/n)^\alpha \geqq ||\pi_n(I_{2n}, \pi_{2n}) - f||_{2n} - ||f - \pi_{2n}||_{2n} \geqq \epsilon_n - \epsilon_{2n}$$

ou encore (en vertu de (2))

$$\begin{aligned}\epsilon_n &\leqq C_{18}(k_n/n)^\alpha + \epsilon_{2n} \\ &\leqq C_{18}((k_n/n)^\alpha + (k_{2n}/2n)^\alpha + \ldots + (k_{2^m n}/2^m n)^\alpha) + \epsilon_{2^{m+1}n} \\ &\leqq C_{19}(k_n/n)^\alpha + \epsilon_{2^{m+1}n}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation (15), nous obtenons donc

$$(17) \quad \epsilon_n \leqq C_{20}(k_n/n)^\alpha, \quad n \geqq 1.$$

Si maintenant $|x| \leqq k_n$, $|h| \leqq \delta < k_n/n$ et si l'entier N est choisi de telle sorte que $C_9 \leqq N\delta/k_N \leqq C_{10}$, nous obtenons, en vertu de (16) et de (17), que

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x)| &\leqq |f(x+h) - \pi_N(x+h)| + |f(x) - \pi_N(x)| \\ &\qquad + |\pi_N'(y)| \; |h| \\ &\leqq 2\, C_{20}(k_N/N)^\alpha + C_{17}(k_N/N)^{\alpha-1}\delta \\ &\leqq C_{21}\delta^\alpha\end{aligned}$$

ce qui montre que $f \in$ slip α et termine la démonstration.

Remarque. Il est aisé de voir que l'hypothèse (15) est nécessaire. Si par exemple f est identiquement nulle dans $[k_n, k_{n+1}]$ $(n \geqq 1)$ sauf pour deux pics triangulaires de hauteur 1, f étant positive sur le premier et négative sur le second, en vertu du théorème de de la Vallée Poussin, on aura $\pi_n \equiv 0$ et donc $\epsilon_n \equiv 1$. L'hypothèse (16) est donc satisfaite bien que $f \notin$ slip α (puisque la base des triangles peut être choisie arbitrairement petite).

3. L'approximation des fonctions différentiables. Considérons maintenant une fonction f possédant une $r^{ième}$ dérivée continue $f^{(r)}(r \geqq 1)$. On a alors le théorème suivant:

THEOREME 4. *S'il existe une suite de polynômes $\{p_n\}$ telle que $||f^{(r)} - p_n||_n = O((k_n/n)^\alpha)$, il existe une suite de polynômes $\{P_{n+r}\}$ telle que $||f - P_{n+r}||_n = O((k_n/n)^{\alpha+r})$. Réciproquement, s'il existe une suite de polynômes $\{p_n\}$ telle que $||f - p_n||_n = O((k_n/n)^{\alpha+r})$, il existe une suite de polynômes $\{P_{2n}\}$ telle que $||f^{(r)} - P_{2n}||_n = O((k_n/n)^\alpha)$.*

Démonstration. Supposant en effet que

$$||f^{(r)} - p_n||_n \leqq C_{22}(k_n/n)^\alpha \quad (n \geqq 1),$$

le théorème de Jackson entraîne l'existence d'un polynôme π_n tel que

$$||f^{(r-1)} - s_{n+1} - \pi_n||_n \leqq C_{23}(k_n/n)^{\alpha+1}$$

(où $s'_{n+1} = p_n$). En répétant ce raisonnement, il vient

$$||f - P_{n+r}||_n \leqq C_{24}(k_n/n)^{\alpha+r} \quad (n \geqq 1)$$

ce qui démontre la première assertion. Pour démontrer la seconde, posons $m = 2n + r$ et remarquons que

$$(18) \quad f(x) = p_m(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (p_{2^{k+1}m}(x) - p_{2^k m}(x)), \quad x \in I_m.$$

Puisque l'on a

$$||p_{2^{k+1}m} - p_{2^k m}||_{2^k m} \leqq C_{25}(k_{2^k m}/2^k m)^{\alpha+r},$$

l'inégalité de Bernstein montre que

$$|p_{2^{k+1}m}^{(r)}(x) - p_{2^k m}^{(r)}(x)| \leqq C_{26}(k_{2^k m}/2^k m)^{\alpha} \quad \text{si} \quad |x| \leqq (1/q)k_{2^k m}$$

de telle sorte qu'en vertu de (2):

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p_{2^{k+1}m}^{(r)}(x) - p_{2^k m}^{(r)}(x)| \leqq C_{26} \sum_{k=0}^{\infty} (k_{2^k m}/2^k m)^{\alpha} \leqq C_{27}(k_n/n)^{\alpha}$$

pourvu que $|x| \leqq (1/q)k_m$. On peut donc dériver la série (18) terme à terme: on en déduit que $f^{(r)}$ existe et que

$$||f^{(r)} - p_m^{(r)}(x)||_n \leqq C_{27}(k_n/n)^{\alpha}$$

ce qui complète la démonstration.

En terminant, remarquons que si dans l'énoncé du théorème 3, l'on remplace l'inégalité (16) par la relation

$$(19) \quad ||\pi_n'||_n \leqq C_{28}(k_n/n)^{\alpha+r-1}, \quad n \geqq 1$$

un raisonnement analogue à celui employé dans la démonstration du théorème 3 nous donnera à la place de (17) la relation

$$(20) \quad \epsilon_n \leqq C_{29}(k_n/n)^{\alpha+r}, \quad n \geqq 1$$

et le théorème 4 s'appliquera.

Bibliographie

1. G. Freud, *On weighted polynomial approximation on the whole real axis*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *20* (1969), 223–225.

2. G. Freud, *Über Approximation stetiger Funktionen durch gewöhnliche Polynome*, Math. Annalen *137* (1959), 17–25.

3. G. Sunouchi, *Derivatives of a polynomial of best approximation*, Jahresbericht der D.M.V. *70* (1968), 165–166.

Université de Montréal,
Montréal, Québec

https://doi.org/10.4153/CJM-1976-093-1 Published online by Cambridge University Press