



COMPOSITIO MATHEMATICA

Représentations banales de $GL_m(\mathbb{D})$

Alberto Mínguez et Vincent Sécherre

Compositio Math. **149** (2013), 679–704.

[doi:10.1112/S0010437X12000590](https://doi.org/10.1112/S0010437X12000590)



FOUNDATION
COMPOSITIO
MATHEMATICA



LONDON
MATHEMATICAL
SOCIETY



Représentations banales de $GL_m(\mathbb{D})$

Alberto Mínguez et Vincent Sécherre

ABSTRACT

Let F be a non-Archimedean locally compact field of residue characteristic p , let \mathbb{D} be a finite-dimensional central division F -algebra and let R be an algebraically closed field of characteristic different from p . We define *banal* irreducible R -representations of the group $G = GL_m(\mathbb{D})$. This notion involves a condition on the cuspidal support of the representation depending on the characteristic of R . When this characteristic is banal with respect to G , in particular when R is the field of complex numbers, any irreducible R -representation of G is banal. In this article, we give a classification of all banal irreducible R -representations of G in terms of certain multisegments, called banal. When R is the field of complex numbers, our method provides a new proof, entirely local, of Tadić's classification of irreducible complex smooth representations of G .

1. Introduction

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et soit \mathbb{D} une F -algèbre à division centrale de dimension finie dont le degré réduit est noté d . Pour tout entier $m \geq 1$, on désigne par G_m le groupe $GL_m(\mathbb{D})$, qui est une forme intérieure du groupe linéaire $GL_{md}(F)$. Les représentations lisses irréductibles complexes du groupe $GL_{md}(F)$ ont été classées par Zelevinski [Zel80] en termes de paramètres appelés *multisegments*. Dans [Tad90], où la caractéristique de F est supposée nulle, Tadić donne une classification des représentations lisses irréductibles complexes de G_m en termes de multisegments. La méthode utilisée par Tadić s'appuie sur les résultats de [DKV84] (qui reposent eux-mêmes sur la formule des traces simple) et en particulier sur la correspondance de Jacquet–Langlands et la classification des représentations tempérées en fonction de la série discrète (voir *ibid.*, théorème B.2.d). Dans [Bad04], Badulescu étend ces deux résultats au cas où F est de caractéristique p , et on trouve dans [BHLS10] la classification des représentations lisses irréductibles complexes de G_m sans restriction sur la caractéristique de F .

Dans cet article, on s'intéresse au problème de la classification des représentations lisses irréductibles de G_m à coefficients dans un corps R algébriquement clos de caractéristique ℓ différente de p , appelées aussi représentations (lisses irréductibles) modulaires dans le cas où ℓ est non nulle. Dans le cas modulaire, on ne dispose pas d'une formule des traces et le théorème du quotient de Langlands, qui permet dans la construction de Tadić d'obtenir toutes les représentations irréductibles en fonction des représentations tempérées, n'est pas valable. Il faut trouver une approche différente de celle employée dans le cas complexe.

Received 12 October 2011, accepted in final form 19 July 2012, published online 2 January 2013.

2010 Mathematics Subject Classification 22E50.

Keywords: representations of p -adic groups, modular representation, multisegment, banal representation.

Ce travail a bénéficié de financements de l'EPSRC (GR/T21714/01, EP/G001480/1) et de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-08-BLAN-0259-01, ANR-10-BLANC-0114). Le premier auteur est aussi financé en partie par MTM2007-66929, MTM2010-19298 et FEDER.

This journal is © [Foundation Compositio Mathematica](#) 2013.

Dans [MS12b], nous avons effectué la classification complète des R-représentations irréductibles de G_m en termes de multisegments. C'est un long travail dont l'un des principaux outils est la théorie des types modulaires développée dans [MS12a], et qui s'appuie sur des résultats profonds de [Ari02, CG97] sur les représentations des algèbres de Hecke affines de type A en une racine de l'unité.

Dans cet article, nous proposons une classification, *indépendante de celle obtenue dans [MS12b] et ne s'appuyant pas sur [Ari02, CG97]*, de certaines R-représentations irréductibles de G_m que nous appelons *banales*. Une représentation irréductible de G_m est dite banale si son support cuspidal satisfait à une condition technique qui dépend de la caractéristique de R (voir plus bas pour une définition précise). Si cette caractéristique ℓ est banale, c'est-à-dire si ℓ est différent de p et ne divise aucun des entiers $q^{di} - 1$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$, où q désigne le cardinal du corps résiduel de F, alors toute R-représentation irréductible de G_m est banale. Ceci se produit en particulier si R est le corps des nombres complexes : dans ce cas, notre article fournit une nouvelle preuve de la classification de Tadić, indépendante de la caractéristique de F et purement locale : on n'utilise ni la formule des traces, ni la correspondance de Jacquet–Langlands.

Nous avons choisi de publier la classification des représentations banales indépendamment de la classification complète de [MS12b], d'une part parce que l'approche employée dans [MS12b] se simplifie de façon remarquable dans le cas banal (en particulier nous n'avons pas besoin ici des résultats profonds de [Ari02, CG97]), d'autre part pour insister sur le fait que notre approche fournit une preuve purement locale de la classification de Tadić.

L'une des principales difficultés auxquelles on est confronté lorsqu'on étudie les représentations modulaires de G_m est l'apparition de représentations cuspidales non supercuspidales (voir [Vig96]). C'est ce qu'on évite ici en se restreignant aux représentations banales : une représentation irréductible banale est cuspidale si et seulement si elle est supercuspidale. Aussi certaines techniques algébriques de la théorie des représentations complexes employées par Zelevinski s'étendent-elles au cas banal. On obtient une double classification (à la Zelevinski et à la Langlands) plus précise que celle de [MS12b] (qui ne donne qu'une classification à la Zelevinski) et la preuve en est beaucoup plus simple.

Il est temps déjà de donner plus de détails sur le contenu de cet article. Étant donnée une représentation irréductible cuspidale ρ de G_m , on lui associe (voir [MS12a, §4.5] et le paragraphe 3.1 pour plus de précisions) un caractère non ramifié ν_ρ tel que, pour toute représentation cuspidale ρ' de $G_{m'}$, $m' \geq 1$, l'induite parabolique normalisée $\rho \times \rho'$ soit réductible si et seulement si ρ' est isomorphe à $\rho\nu_\rho$ ou à $\rho\nu_\rho^{-1}$. Par exemple, si D est égale à F, le caractère ν_ρ est indépendant de ρ et est égal à $|\det|_F$, où $|\cdot|_F$ désigne la valeur absolue normalisée de F. On note \mathbf{Z}_ρ l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\rho\nu_\rho^i$ pour $i \in \mathbf{Z}$. Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$(\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b)$$

où a, b sont des entiers tels que $a \leq b$. Un tel segment est noté $[a, b]_\rho$. On a une notion naturelle d'équivalence entre segments, et on définit un *multisegment* comme une somme formelle de classes d'équivalence de segments, c'est-à-dire un élément du groupe abélien libre engendré par les classes d'équivalence de segments. Le *support* d'un segment $[a, b]_\rho$ est la somme formelle des classes d'isomorphisme des $\rho\nu_\rho^i$ pour $a \leq i \leq b$, qui ne dépend que de la classe de ce segment, et le support d'un multisegment est la somme des supports des segments qui le composent.

Définition 1.1. (1) Une somme formelle $\rho_1 + \dots + \rho_r$ de classes de représentations irréductibles cuspidales est dite *banale* si, pour toute représentation irréductible cuspidale ρ , il existe un élément de \mathbf{Z}_ρ qui n'apparaît pas dans cette somme.

(2) Un multisegment est dit *banal* si son support est banal ; une représentation irréductible est dite *banale* si son support cuspidal est banal.

La propriété importante suivante, prouvée dans [MS12b], justifie l'importance de la notion des représentations banales.

PROPOSITION 1.2. Soient ρ_1, \dots, ρ_r des représentations cuspidales, avec $r \geq 2$. Supposons que la somme formelle $\rho_1 + \dots + \rho_r$ soit banale. Alors l'induite parabolique :

$$\rho_1 \times \dots \times \rho_r$$

ne contient aucun sous-quotient irréductible cuspidal.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes de classification contenus dans cet article. Soit $\Delta = [a, b]_\rho$ un segment banal. Alors (voir la proposition 4.10) la représentation induite :

$$\rho\nu_\rho^a \times \dots \times \rho\nu_\rho^b$$

a une unique sous-représentation irréductible, notée $Z(\Delta)$, et un unique quotient irréductible, noté $L(\Delta)$. Le résultat principal de cet article est le double théorème de classification suivant.

THÉORÈME 1.3. (1) Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments tels que, pour tous $i < j$, le segment Δ_i ne précède pas Δ_j et tels que le multisegment $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ soit banal. Alors :

$$Z(\Delta_1) \times \dots \times Z(\Delta_r) \tag{1.1}$$

admet une unique sous-représentation irréductible, ne dépendant que de \mathfrak{m} et notée $Z(\mathfrak{m})$. Elle est banale et sa multiplicité comme sous-quotient de (1.1) est égale à 1.

(2) L'application $\mathfrak{m} \mapsto Z(\mathfrak{m})$ définit une bijection entre multisegments banaux de degré $m \geq 1$ et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles banales de G_m .

THÉORÈME 1.4. (1) Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments tels que, pour tous $i < j$, le segment Δ_i ne précède pas Δ_j et tels que le multisegment $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ soit banal. Alors :

$$L(\Delta_1) \times \dots \times L(\Delta_r) \tag{1.2}$$

admet un unique quotient irréductible, ne dépendant que de \mathfrak{m} et noté $L(\mathfrak{m})$. Il est banal et sa multiplicité comme sous-quotient de (1.2) est égale à 1.

(2) L'application $\mathfrak{m} \mapsto L(\mathfrak{m})$ définit une bijection entre multisegments banaux de degré $m \geq 1$ et classes d'isomorphisme de représentations irréductibles banales de G_m .

La première classification est dite à la Zelevinski et la seconde à la Langlands. Pour prouver les parties (1) des théorèmes et l'injectivité des classifications, on adapte les idées du théorème du quotient de Langlands au cas modulaire. Remarquons que la condition de banalité permet d'ordonner tout multisegment banal de sorte que pour tous $i < j$, le segment Δ_i ne précède pas Δ_j . Pour prouver la surjectivité des classifications, on procède comme dans [Zel80] : on utilise le fait que $Z(\Delta) \times Z(\Delta')$ et $L(\Delta) \times L(\Delta')$ sont de longueur 2 ou 1, selon que les segments Δ et Δ' sont liés ou non (ce qui est faux si l'on n'impose pas la condition de banalité).

Supposons maintenant que R soit le corps des nombres complexes. Dans le cas où D est F , notre preuve, purement combinatoire, est plus simple que celle de Zelevinski [Zel80], qui utilise à plusieurs reprises des arguments de [BZ77] sur les modèles de Whittaker. Notre preuve ne fait presque aucune différence entre les deux classifications. Dans le cas où D n'est pas commutative, le théorème 1.4 est prouvé dans [Tad90] pour F de caractéristique nulle et dans [BHLS10] pour F de caractéristique p . Le théorème 1.3 est nouveau.

Dans la section 6, nous prouvons que toute $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible banale se relève en une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation entière, où $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ sont respectivement des clôtures algébriques du corps des nombres ℓ -adiques et de son corps résiduel (tandis que les $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentations non banales ne se relèvent pas toujours : voir [MS12b, §9.7]). Puis nous montrons que nos deux classifications sont reliées par une involution, introduite en annexe, qui étend au cas modulaire l’involution d’Aubert [Aub95, Aub96] : nous prouvons que, pour tout multisegment banal \mathbf{m} , cette involution échange les représentations $\mathbf{Z}(\mathbf{m})$ et $\mathbf{L}(\mathbf{m})$.

Notations et conventions

1. Dans tout cet article, F est un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle notée p , et R est un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p .

2. Une F -algèbre à division est une F -algèbre centrale de dimension finie dont l’anneau sous-jacent est un corps qui n’est pas nécessairement commutatif. Si K est une extension finie de F , ou plus généralement une algèbre à division sur une extension finie de F , on note \mathcal{O}_K son anneau d’entiers, \mathfrak{p}_K son idéal maximal et q_K le cardinal de son corps résiduel. On pose enfin $q = q_F$.

3. Une R -représentation lisse d’un groupe topologique G est un couple composé d’un R -espace vectoriel V et d’un homomorphisme de groupes de G dans $\text{Aut}_R(V)$ tel que le stabilisateur de tout vecteur de V soit un sous-groupe ouvert de G . Dans cet article, toutes les représentations sont supposées lisses.

Un R -caractère de G est un homomorphisme de groupes de G dans R^\times de noyau ouvert. Si π est une R -représentation de G , on note π^\vee sa contragrédiente. Si en outre χ est un R -caractère de G , on note $\chi\pi$ ou $\pi\chi$ la représentation tordue $g \mapsto \chi(g)\pi(g)$.

S’il n’en résulte pas d’ambiguïté, on écrira *caractère* et *représentation* plutôt que R -caractère et R -représentation.

4. Étant donné un ensemble X , on note $\mathbf{Z}(X)$ le groupe abélien libre de base X constitué des applications de X dans \mathbf{Z} à support fini et $\mathbf{N}(X)$ le sous-ensemble de $\mathbf{Z}(X)$ constitué des applications à valeurs dans \mathbf{N} . Pour $f, g \in \mathbf{Z}(X)$, on note $f \leq g$ si $g - f \in \mathbf{N}(X)$, ce qui définit une relation d’ordre partiel sur $\mathbf{Z}(X)$.

2. Préliminaires

Dans tout ce qui suit, on fixe une F -algèbre à division D de degré réduit noté d . Pour tout entier $m \geq 1$, on désigne par $\mathcal{M}_m(D)$ la F -algèbre des matrices de taille $m \times m$ à coefficients dans D et on pose $G_m = \text{GL}_m(D)$. Il est commode de convenir que G_0 est le groupe trivial.

2.1 Soit $m \geq 1$, et soit N_m la norme réduite de $\mathcal{M}_m(D)$ sur F . On note $|\cdot|_F$ la valeur absolue normalisée de F , c’est-à-dire celle donnant à une uniformisante de F la valeur q^{-1} . Comme l’image de q dans R est inversible, cette valeur absolue définit un R -caractère de F^\times noté $|\cdot|_{F,R}$. L’application $g \mapsto |N_m(g)|_{F,R}$ est un R -caractère de G_m , qu’on notera simplement ν .

2.2 Pour $m \geq 0$, on note $\text{Irr}_R(G_m)$ l’ensemble des classes d’isomorphisme de R -représentations irréductibles de G_m et $\mathcal{G}_R(G_m)$ le groupe de Grothendieck de ses R -représentations de longueur finie, qui est un \mathbf{Z} -module libre de base $\text{Irr}_R(G_m)$.

Si π est une R -représentation de longueur finie de G_m , on note $\text{deg}(\pi) = m$, qu'on appelle le *degré* de π , et on note $[\pi]$ son image dans $\mathcal{G}_R(G_m)$. En particulier, si π est irréductible, $[\pi]$ désigne sa classe d'isomorphisme. Lorsqu'aucune confusion ne sera possible, il nous arrivera d'identifier une R -représentation irréductible avec sa classe d'isomorphisme.

On désigne par Irr_R la réunion disjointe des ensembles $\text{Irr}_R(G_m)$ pour $m \geq 0$, et par \mathcal{G}_R la somme directe des $\mathcal{G}_R(G_m)$ pour $m \geq 0$, qui est un \mathbf{Z} -module libre de base Irr_R .

2.3 Si $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ est une composition de m , c'est-à-dire une famille d'entiers positifs ou nuls dont la somme est égale à m , il lui correspond le sous-groupe de Levi standard M_α de G_m constitué des matrices diagonales par blocs de tailles m_1, \dots, m_r respectivement, que l'on identifie naturellement au produit $G_{m_1} \times \dots \times G_{m_r}$. On note P_α le sous-groupe parabolique de G_m de facteur de Levi M_α formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles m_1, \dots, m_r respectivement, et on note U_α son radical unipotent.

On choisit une fois pour toutes une racine carrée de q dans R . On note r_α le foncteur de restriction parabolique normalisé relativement à ce choix, et i_α son adjoint à droite, c'est-à-dire le foncteur d'induction parabolique normalisé lui correspondant. Ces foncteurs sont exacts, et préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie.

Si, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on a une R -représentation π_i de G_{m_i} , on note :

$$\pi_1 \times \dots \times \pi_r = i_\alpha(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r). \tag{2.1}$$

Si les π_i sont de longueur finie, alors $[\pi_1 \times \dots \times \pi_r]$ ne dépend que de $[\pi_1], \dots, [\pi_r]$. L'application :

$$([\pi_1], \dots, [\pi_r]) \mapsto [\pi_1 \times \dots \times \pi_r] \tag{2.2}$$

induit par linéarité une application linéaire de $\mathcal{G}_R(G_{m_1}) \times \dots \times \mathcal{G}_R(G_{m_r})$ dans $\mathcal{G}_R(G_m)$. Ceci munit \mathcal{G}_R d'une structure de \mathbf{Z} -algèbre commutative graduée (voir [BHLS10, Tad90, Zel80] dans le cas complexe et [Dat09, MS12b] dans le cas modulaire).

On note aussi r_α^- le foncteur de restriction parabolique par rapport au sous-groupe parabolique opposé à P_α relativement à M_α , c'est-à-dire formé des matrices triangulaires inférieures par blocs de tailles m_1, \dots, m_r respectivement, et on note $\alpha^- = (m_r, \dots, m_1)$ la famille déduite de α en inversant l'ordre des termes.

2.4 Une R -représentation irréductible de G_m avec $m \geq 1$ est dite *cuspidale* si son image par r_α est nulle pour toute famille $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ d'entiers compris entre 1 et $m - 1$ et de somme m . On note $\mathcal{C}_R(G_m)$ le sous-ensemble de $\text{Irr}_R(G_m)$ formés des classes d'isomorphisme de R -représentations irréductibles cuspidales de G_m . On note \mathcal{C}_R la réunion disjointe des $\mathcal{C}_R(G_m)$ pour $m \geq 1$.

2.5 Une *paire cuspidale* de G_m est un couple (M, ϱ) formé d'un sous-groupe de Levi $M \subseteq G_m$ et d'une R -représentation irréductible cuspidale ϱ de M . Si M est égal à M_α pour une composition $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ de m avec $m_i \geq 1$, alors ϱ est de la forme $\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_r$, où ρ_i est une R -représentation irréductible cuspidale de G_{m_i} , pour $i \in \{1, \dots, r\}$.

Si π est une R -représentation irréductible de G_m , il existe une composition $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ et, pour chaque i , une R -représentation irréductible cuspidale ρ_i de G_{m_i} telles que π soit isomorphe à une sous-représentation de la représentation induite $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$. La somme :

$$[\rho_1] + \dots + [\rho_r] \in \mathbf{N}(\mathcal{C}_R)$$

est unique (voir [MS12b, Théorème 2.1]). Elle s'appelle le support cuspidal de π et est notée $\text{cusp}(\pi)$.

2.6 Dans ce paragraphe, on donne une version combinatoire du lemme géométrique de Bernstein-Zelevinski (voir [MS12b, § 2.4.3]). Soient $\alpha = (m_1, \dots, m_r)$ et $\beta = (n_1, \dots, n_s)$ deux compositions d'un entier $m \geq 1$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit π_i une R-représentation irréductible de G_{m_i} , et posons $\pi = \pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_r \in \text{Irr}_R(M_\alpha)$. On note $\mathcal{M}^{\alpha, \beta}$ l'ensemble des matrices $B = (b_{i,j})$ composées d'entiers positifs tels que :

$$\sum_{j=1}^s b_{i,j} = m_i, i \in \{1, \dots, r\}, \quad \sum_{i=1}^r b_{i,j} = n_j, j \in \{1, \dots, s\}.$$

Fixons $B \in \mathcal{M}^{\alpha, \beta}$ et notons $\alpha_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,s})$ et $\beta_j = (b_{1,j}, \dots, b_{r,j})$, qui sont des compositions de m_i et de n_j respectivement. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, on écrit :

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \dots \otimes \sigma_{i,s}^{(k)}, \quad \sigma_{i,j}^{(k)} \in \text{Irr}_R(G_{b_{i,j}}), \quad k \in \{1, \dots, r_i\},$$

les différents facteurs de composition de $\mathbf{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$. Pour tout entier $j \in \{1, \dots, s\}$ et toute famille d'entiers (k_1, \dots, k_r) tels que $1 \leq k_i \leq r_i$, on définit une R-représentation σ_j de G_{n_j} par :

$$\sigma_j = \mathbf{i}_{\beta_j}(\sigma_{1,j}^{(k_1)} \otimes \dots \otimes \sigma_{r,j}^{(k_r)}).$$

Alors les R-représentations :

$$\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_s, \quad B \in \mathcal{M}^{\alpha, \beta}, 1 \leq k_i \leq r_i,$$

forment une suite de composition de $\mathbf{r}_\beta(\mathbf{i}_\alpha(\pi))$.

On reprend les notations ci-dessus avec $s = 2$. Le résultat suivant, qui est une conséquence du lemme géométrique et de la réciprocity de Frobenius, est prouvé dans [MS12b, Proposition 2.8] (voir aussi [Min09, Corollaire 2.2]).

PROPOSITION 2.1. *On suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, toute composition α_i de m_i et tout facteur de composition $\sigma_i^{(k)} = \sigma_{i,1}^{(k)} \otimes \sigma_{i,2}^{(k)}$ de $\mathbf{r}_{\alpha_i}(\pi_i)$, on ait :*

$$\text{cusp}(\sigma_{i,2}^{(k)}) \not\leq \sum_{i < j \leq r} \text{cusp}(\pi_j).$$

Alors π apparaît avec multiplicité 1 dans $[\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{i}_\alpha(\pi))]$. Ainsi $\mathbf{i}_\alpha(\pi)$ (respectivement $\mathbf{i}_{\alpha^-}(\pi)$) a une unique sous-représentation (respectivement une unique quotient) irréductible, dont la multiplicité dans $[\mathbf{i}_\alpha(\pi)]$ (respectivement $[\mathbf{i}_{\alpha^-}(\pi)]$) est égale à 1.

3. La théorie des segments

On rappelle ici les notions de segment et de multisegment (voir [MS12b, §§ 7.1 et 9.1]).

3.1 Soient $m \geq 1$ un entier et ρ une R-représentation irréductible cuspidale de G_m . Dans [MS12a] (voir *ibid.*, paragraphe 4.5), on associe à ρ un R-caractère non ramifié ν_ρ de G_m tel que, si ρ' est une R-représentation irréductible cuspidale de $G_{m'}$ avec $m' \geq 1$, la représentation induite $\rho \times \rho'$ soit réductible si et seulement si $m' = m$ et si ρ' est isomorphe à $\rho\nu_\rho$ ou à $\rho\nu_\rho^{-1}$. Dans le cas où D est égale à F , ce caractère ν_ρ ne dépend pas de ρ et est égal à ν (voir le paragraphe 2.1). Dans le cas général, la définition de ν_ρ est technique et nécessite la théorie des types développée dans [MS12a]. Plus précisément, on a $\nu_\rho = \nu^{s(\rho)}$, où $s(\rho)$ est un entier divisant d associé à ρ par la théorie des types, qui décrit ρ comme l'induite compacte d'une représentation irréductible bien particulière d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de G . Ce caractère ne dépend

que de la classe d'inertie de ρ . On pose :

$$\mathbf{Z}_\rho = \{[\rho\nu_\rho^i] \mid i \in \mathbf{Z}\}. \tag{3.1}$$

Dans le cas où R est de caractéristique non nulle, cet ensemble est fini, de cardinal noté $e(\rho)$. Sinon, \mathbf{Z}_ρ est un ensemble infini et on convient que $e(\rho) = +\infty$.

3.2 Soit un entier $m \geq 1$, soit ρ une R -représentation irréductible cuspidale de G_m et soient $a, b \in \mathbf{Z}$ des entiers tels que $a \leq b$.

Définition 3.1. Un *segment* est une suite finie de la forme :

$$(\rho\nu_\rho^a, \rho\nu_\rho^{a+1}, \dots, \rho\nu_\rho^b). \tag{3.2}$$

Une telle famille est notée $[a, b]_\rho$.

Si $\Delta = [a, b]_\rho$ est un segment, on note :

$$n(\Delta) = b - a + 1, \quad \text{deg}(\Delta) = (b - a + 1)m, \quad a(\Delta) = \rho\nu_\rho^a, \quad b(\Delta) = \rho\nu_\rho^b, \tag{3.3}$$

respectivement la longueur, le degré et les extrémités de Δ . Si $a + 1 \leq b$, on pose :

$${}^-\Delta = [a + 1, b]_\rho, \quad \Delta^- = [a, b - 1]_\rho. \tag{3.4}$$

Le *support* de Δ , noté $\text{supp}(\Delta)$, est l'élément de $\mathbf{N}(\mathbb{C}_R)$ défini par :

$$\text{supp}(\Delta) = [\rho\nu_\rho^a] + \dots + [\rho\nu_\rho^b]. \tag{3.5}$$

On note enfin :

$$\Delta^\vee = [-b, -a]_{\rho^\vee} \tag{3.6}$$

le segment contragrédient de Δ .

Définition 3.2. Soient $\Delta = [a, b]_\rho$ et $\Delta' = [a', b']_{\rho'}$ des segments.

(1) On dit que Δ *précède* Δ' si l'on peut extraire de la suite :

$$(\rho\nu_\rho^a, \dots, \rho\nu_\rho^b, \rho'\nu_{\rho'}^{a'}, \dots, \rho'\nu_{\rho'}^{b'})$$

une sous-suite qui soit un segment de longueur strictement supérieure à $n(\Delta)$ et $n(\Delta')$.

(2) On dit que Δ et Δ' sont *liés* si Δ précède Δ' ou si Δ' précède Δ .

Remarquons que, si Δ et Δ' sont liés, les ensembles \mathbf{Z}_ρ et $\mathbf{Z}_{\rho'}$ sont égaux.

3.3 Deux segments $[a, b]_\rho$ et $[a', b']_{\rho'}$ sont dits *équivalents* s'ils ont la même longueur et si $\rho\nu_\rho^a$ est isomorphe à $\rho'\nu_{\rho'}^{a'}$. On note Seg_R l'ensemble des classes d'équivalence de segments.

Définition 3.3. Un *multisegment* est un élément de $\mathbf{N}(\text{Seg}_R)$. On désigne par Mult_R l'ensemble des multisegments.

Soit $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ un multisegment. Les applications longueur, degré et support sont prolongées à Mult_R par additivité, c'est-à-dire qu'on note :

$$n(\mathfrak{m}) = \sum_{1 \leq i \leq r} n(\Delta_i), \quad \text{deg}(\mathfrak{m}) = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{deg}(\Delta_i), \quad \text{supp}(\mathfrak{m}) = \sum_{1 \leq i \leq r} \text{supp}(\Delta_i),$$

la longueur, le degré et le support de \mathfrak{m} respectivement. Étant donné un support cuspidal $\mathfrak{s} \in \mathbf{N}(\mathbb{C}_R)$, on note :

$$\text{Mult}_R(\mathfrak{s})$$

l'ensemble de tous les multisegments de support \mathfrak{s} .

On note $\text{supp}^0(\mathfrak{m})$ l'ensemble des éléments de \mathbb{C}_R apparaissant dans $\text{supp}(\mathfrak{m})$ avec multiplicité non nulle. On dit que le support de \mathfrak{m} est *connexe* s'il existe un segment Δ tel que $\text{supp}^0(\mathfrak{m}) = \text{supp}^0(\Delta)$. Dans ce cas, on dit que \mathfrak{m} est à support connexe.

4. Les représentations banales

Dans cette section, on définit la notion de représentation banale et on donne quelques premières propriétés et exemples de telles représentations.

4.1 On commence par définir la notion de multisegment banal.

Définition 4.1. Un multisegment \mathfrak{m} est dit *banal* si, pour toute représentation irréductible cuspidale ρ , il existe un élément de \mathbf{Z}_ρ n'apparaissant pas dans $\text{supp}(\mathfrak{m})$.

Un segment $[a, b]_\rho$ est banal si et seulement s'il est de longueur strictement inférieure à $e(\rho)$.

Remarque 4.2. Notons qu'une somme de multisegments banales n'est pas toujours banale. Par exemple, supposons que l'image de q dans \mathbb{R}^\times soit d'ordre 2. On note 1 le caractère trivial de $\text{GL}_1(\mathbb{F})$ et ν son unique caractère non ramifié d'ordre 2. Alors les segments $[1]$ et $[\nu]$ sont banales tandis que leur somme ne l'est pas.

Si \mathfrak{m} est un multisegment banal, il existe des segments $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ tels que, pour tout $i < j$, le segment Δ_i ne précède pas Δ_j et tels que $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$. Une telle famille $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ s'appelle une *forme rangée* de \mathfrak{m} . En général, un multisegment non banal n'admet pas de forme rangée.

4.2 Soit $m \geq 1$ un entier et soit ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m telle qu'on ait $e(\rho) \geq 2$. On fixe un entier $0 \leq t \leq e(\rho) - 1$.

Définition 4.3. Soient $\Delta = [a, b]_\rho$ et $\Delta' = [a', b']_\rho$ des segments tels que $0 \leq a, b, a', b' \leq t$. On écrit :

$$\Delta > \Delta'$$

si $a > a'$, ou bien si $a = a'$ et $b > b'$.

On écrit aussi $\Delta \geq \Delta'$ si $\Delta > \Delta'$ ou $\Delta = \Delta'$. La relation \geq est une relation d'ordre dépendant des choix de ρ et t .

4.3 Soit $\mathfrak{s} \in \mathbf{N}(\mathbb{C}_R)$ un support *connexe* et *banal*. On va prolonger l'ordre sur les segments en un ordre total sur $\text{Mult}_R(\mathfrak{s})$. D'abord, il existe une représentation irréductible cuspidale ρ (unique à isomorphisme près) et un unique entier $0 \leq t \leq e(\rho) - 1$ tels que :

$$\text{supp}^0(\mathfrak{s}) = [\rho] + [\rho\nu_\rho] + \dots + [\rho\nu_\rho^t].$$

On appelle *forme ordonnée* d'un multisegment $\mathfrak{m} \in \text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ l'unique famille :

$$(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

de segments tels que $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ et $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \geq \Delta_r$. Si le support \mathfrak{s} n'est pas banal ou n'est pas connexe, la forme ordonnée de \mathfrak{m} peut ne pas exister ou ne pas être unique.

On étend maintenant la relation \geq aux multisegments de support \mathfrak{s} .

Définition 4.4. Soient \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' des multisegments de support égal à \mathfrak{s} , et soient $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ et $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ leurs formes ordonnées respectives. On écrit :

$$\mathfrak{m} > \mathfrak{m}'$$

si l'on est dans l'un des cas suivants :

- (1) il existe $1 \leq i < \min(r, r')$ tel que $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_i = \Delta'_i$ et $\Delta_{i+1} > \Delta'_{i+1}$;
- (2) on a $r > r'$ et $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_{r'} = \Delta'_{r'}$.

On écrit $\mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}'$ si $\mathfrak{m} > \mathfrak{m}'$ ou $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. Ainsi \geq est une relation d'ordre sur $\text{Mult}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{s})$.

4.4 Soit $\mathfrak{s} = [\rho_1] + \dots + [\rho_r] \in \mathbf{N}(\mathbb{C}_{\mathbb{R}})$. La propriété suivante est prouvée dans [MS12b] (voir *ibid.*, Proposition 8.9) et montre l'importance de la notion de représentation banale.

PROPOSITION 4.5. *Supposons que \mathfrak{s} soit banal et que $r \geq 2$. Alors la représentation :*

$$\rho_1 \times \dots \times \rho_r \tag{4.1}$$

ne contient aucun sous-quotient irréductible cuspidal.

Dans le cas modulaire, la preuve de ce résultat important s'appuie sur la notion de représentation résiduellement non dégénérée introduite dans [MS12b], qui généralise celle de représentation non dégénérée de [Vig96], et sur le théorème 5.2 ci-dessous (issu de [MS12b]). Dans le cas complexe, il est dû à [BZ76]. On déduit de cette proposition le corollaire important suivant.

COROLLAIRE 4.6. *Tous les sous-quotients irréductibles de (4.1) ont le même support cuspidal, égal à \mathfrak{s} .*

Démonstration. Soit π un sous-quotient irréductible de $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$. Son support cuspidal est noté $\mathfrak{t} = [\tau_1] + \dots + [\tau_s]$. En appliquant un foncteur de Jacquet convenable et en utilisant le lemme géométrique, on trouve que, pour chaque entier $j \in \{1, \dots, s\}$, il y a des entiers i_1, \dots, i_{r_j} tels que τ_j soit un sous-quotient de $\rho_{i_1} \times \dots \times \rho_{i_{r_j}}$. D'après la proposition 4.5, on a $r_j = 1$ et $\tau_j = \rho_{i_1}$ pour chaque j . On en déduit que $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$. \square

On définit maintenant la notion de représentation irréductible banale.

Définition 4.7. On dit qu'une représentation irréductible est *banale* si son support cuspidal est banal.

Exemple 4.8. (1) Une représentation irréductible cuspidale ρ est banale si et seulement si on a $e(\rho) \geq 2$.

(2) Une représentation irréductible banale est cuspidale si et seulement si elle est supercuspidale (voir [MS12b, Remarque 6.12]).

(3) Si \mathbb{R} est de caractéristique 0, toute représentation irréductible est banale.

(4) Si \mathbb{R} est de caractéristique $\ell \notin \{0, p\}$ et si $m \geq 1$, alors, pour que toute représentation irréductible de G_m soit banale, il faut et il suffit que ℓ soit banale pour G_m , c'est-à-dire que ℓ ne divise aucun des entiers $q^{di} - 1$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$, où d désigne le degré réduit de D sur F et q le cardinal du corps résiduel de F . Cette dernière condition peut aussi s'écrire $e > m$, où e

désigne l'ordre de q^d modulo ℓ . Nous n'utiliserons pas ce résultat, aussi nous nous contenterons d'en esquisser la preuve.

Supposons d'abord que ℓ soit banale pour G_m . S'il existe une représentation irréductible non banale de G_m , alors il y a un entier $r \leq m$ et une représentation irréductible cuspidale ρ de G_r telle que $e(\rho)r \leq m$. Compte tenu de la description de $e(\rho)$ dans [MS12a, § 4.5], ceci implique que :

$$e'r \leq m(e', rd) < e(e', rd),$$

où e' est l'ordre de q modulo ℓ et (a, b) le plus grand diviseur commun à deux entiers $a, b \geq 1$. En utilisant le fait que $e' = e(e', d)$, on obtient une contradiction.

Inversement, supposons que toute représentation irréductible de G_m soit banale. Si ρ est le caractère trivial de D^\times , le caractère ν_ρ qui lui est associé est égal à ν^d et $e(\rho) = e$. Notons $\sigma(m)$ l'unique sous-quotient irréductible de l'induite $1 \times \nu^d \times \dots \times \nu^{d(m-1)}$ qui soit résiduellement non dégénéré au sens de [MS12b, § 8]. Dans le cas où $D = F$, c'est l'unique sous-quotient irréductible de $1 \times \nu \times \dots \times \nu^{m-1}$ ayant un modèle de Whittaker. Dans le cas général, $\sigma(m)$ est l'unique sous-quotient irréductible de l'induite $1 \times \nu^d \times \dots \times \nu^{d(m-1)}$ dont l'espace des vecteurs invariants sous $1 + \mathcal{M}_m(\mathfrak{p}_D)$, considéré comme représentation du groupe fini $GL_m(\mathfrak{k}_D)$, possède un sous-quotient irréductible admettant un modèle de Whittaker (où \mathfrak{k}_D désigne le corps résiduel de D). D'après [MS12b, Proposition 6.4], la représentation $\sigma(m)$ est banale si et seulement si $e > m$.

Remarque 4.9. Dans [MS12b], on a défini le support supercuspidal d'une représentation irréductible de G_m pour tout $m \geq 1$ (voir *ibid.*, définition 8.18). La proposition 4.5 implique que le support cuspidal d'une représentation irréductible banale coïncide avec son support supercuspidal. La réciproque n'est pas vraie : si l'image de q dans R^\times est d'ordre 2, le caractère trivial de $GL_2(F)$ n'est pas banal mais ses supports cuspidal et supercuspidal sont égaux.

4.5 Soient ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m et $\Delta = [a, b]_\rho$ un segment banal. On pose :

$$\Pi(\Delta) = \rho\nu_\rho^a \times \dots \times \rho\nu_\rho^b \tag{4.2}$$

et on note n la longueur de Δ . La proposition suivante associe à Δ deux représentations irréductibles de G_{mn} .

PROPOSITION 4.10. (1) *L'induite $\Pi(\Delta)$ possède une unique sous-représentation irréductible, notée $Z(\Delta)$. C'est l'unique représentation irréductible de G_{mn} , à isomorphisme près, telle que :*

$$\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(Z(\Delta)) = \rho\nu_\rho^a \otimes \dots \otimes \rho\nu_\rho^b.$$

(2) *L'induite $\Pi(\Delta)$ possède un unique quotient irréductible, noté $L(\Delta)$. C'est l'unique représentation irréductible de G_{mn} , à isomorphisme près, telle que :*

$$\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(L(\Delta)) = \rho\nu_\rho^b \otimes \dots \otimes \rho\nu_\rho^a.$$

Démonstration. Puisque Δ est banal, tout élément de $\text{supp}(\Delta)$ apparaît avec multiplicité 1. D'après la proposition 2.1, il existe une unique sous-représentation irréductible et un unique quotient irréductible dans $\Pi(\Delta)$. D'après la proposition 4.5, si le segment Δ est de longueur ≥ 2 , l'induite $\Pi(\Delta)$ ne contient pas de facteur cuspidal. La propriété sur le foncteur de Jacquet se prouve alors comme dans [Zel80, § 2] ou [Tad90, Proposition 2.7]. Voir aussi [MS12b, Lemme 7.26]. □

Remarque 4.11. On a $L(\Delta^\vee) \simeq L(\Delta)^\vee$ et $Z(\Delta^\vee) \simeq Z(\Delta)^\vee$.

5. Classification des représentations banales

Dans cette section, on classifie toutes les représentations banales en termes de multisegments banales.

5.1 Soient ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m , $m \geq 1$ et $\Delta = [a, b]_\rho$ un segment. Pour démontrer les théorèmes 1.3 et 1.4, on notera indifféremment $\langle \Delta \rangle = \langle a, b \rangle_\rho$ la représentation $Z([a, b]_\rho)$ ou $L([-b, -a]_\rho)$, comme dans [MS12b, § 7.5.1].

Dans le cas où $\langle \Delta \rangle$ désigne $Z([a, b]_\rho)$ (respectivement $L([-b, -a]_\rho)$) on note μ_ρ le caractère ν_ρ (respectivement ν_ρ^{-1}).

La proposition suivante résume la proposition 4.10 et montre l'intérêt de cette notation.

PROPOSITION 5.1. *Soit $[a, b]_\rho$ un segment banal et soit π une représentation irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *la représentation π est isomorphe à $\langle \Delta \rangle$;*
- (2) *π est l'unique sous-représentation irréductible de $\rho\mu_\rho^a \times \rho\mu_\rho^{a+1} \times \dots \times \rho\mu_\rho^b$;*
- (3) *on a $r_{(m, \dots, m)}(\pi) = \rho\mu_\rho^a \otimes \rho\mu_\rho^{a+1} \otimes \dots \otimes \rho\mu_\rho^b$.*

Le théorème suivant est un cas particulier de [MS12b, Théorème 7.38]. On remarquera que, dans le cas banal, la preuve donnée dans [MS12b] se simplifie notablement.

THÉORÈME 5.2. *Soient $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ des segments banales tels que, pour tous $1 \leq i, j \leq r$, les segments Δ_i et Δ_j ne soient pas liés. Alors la représentation :*

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle \tag{5.1}$$

est irréductible.

Remarque 5.3. Dans (5.1), comme dans toute la suite dans ce genre d'expressions, il est sous-entendu que la signification de $\langle \Delta_i \rangle$ est uniforme en i , c'est-à-dire que, si l'on écrit Δ_i sous la forme $[a_i, b_i]_{\rho_i}$, alors on a ou bien $\langle \Delta_i \rangle = Z([a_i, b_i]_{\rho_i})$ pour tout i , ou bien $\langle \Delta_i \rangle = L([-b_i, -a_i]_{\rho_i})$ pour tout i .

5.2 Le théorème suivant englobe les théorèmes 1.3 et 1.4.

THÉORÈME 5.4. (1) *Soit \mathfrak{m} un multisegment banal, et soit $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ une forme rangée de \mathfrak{m} . Alors $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$ admet une unique sous-représentation irréductible, ne dépendant que de \mathfrak{m} et notée :*

$$\langle \mathfrak{m} \rangle.$$

Elle est banale et sa multiplicité dans $[\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle]$ est égale à 1.

(2) *Soient \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' des multisegments banales. Alors $\langle \mathfrak{m} \rangle$ et $\langle \mathfrak{m}' \rangle$ sont isomorphes si et seulement si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.*

(3) *Soit $n \geq 1$. Toute représentation irréductible banale de G_n est de la forme $\langle \mathfrak{m} \rangle$, où \mathfrak{m} est un multisegment banal de degré n .*

Remarque 5.5. Si $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_r)$ est une autre forme rangée de \mathfrak{m} , alors :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle \simeq \langle \Delta'_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_r \rangle$$

d'après le théorème 5.2. En effet, soit $i \in \{1, \dots, r\}$ l'entier tel que $\Delta'_1 = \Delta_i$. Alors Δ'_1 ne précède aucun des segments $\Delta_1, \dots, \Delta_{i-1}$, et Δ_j ne précède pas Δ'_1 , quel que soit $j \in \{1, \dots, i-1\}$. Le théorème 5.2 implique donc que $\langle \Delta_j \rangle \times \langle \Delta_i \rangle$ et $\langle \Delta_i \rangle \times \langle \Delta_j \rangle$ sont des représentations irréductibles isomorphes pour tout $j \in \{1, \dots, i-1\}$. On a donc un isomorphisme :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{i-1} \rangle \times \langle \Delta_i \rangle \simeq \langle \Delta_i \rangle \times \langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{i-1} \rangle.$$

L'isomorphisme annoncé suit par récurrence sur r .

Le reste de cette section sera consacré à la preuve de ce théorème.

5.3 Dans ce paragraphe, on prouve la partie 1 du théorème 5.4. Soit \mathbf{m} un multisegment banal non nul. Il existe $u \geq 1$ et des familles de multisegments $(\Delta_1^{(i)}, \dots, \Delta_{n_i}^{(i)})$, $1 \leq i \leq u$, telles que :

$$(\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_{n_1}^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \dots, \Delta_{n_2}^{(2)}, \dots, \Delta_1^{(u)}, \dots, \Delta_{n_u}^{(u)}) \tag{5.2}$$

soit une forme rangée de \mathbf{m} et que, pour tous $1 \leq i \leq u$ et $1 \leq j, k \leq n_i$, on ait :

$$b(\Delta_j^{(i)}) = b(\Delta_k^{(i)}), \tag{5.3}$$

c'est-à-dire que $\Delta_j^{(i)}$ et $\Delta_k^{(i)}$ ont la même extrémité finale, notée ρ_i . Puisque le multisegment \mathbf{m} est banal, on peut même supposer que :

$$\rho_i \notin \Delta_k^{(j)} \tag{5.4}$$

pour tous $1 \leq i < j \leq u$ et $1 \leq k \leq n_j$, c'est-à-dire que, pour tous $1 \leq l \leq n_i$ et $1 \leq k \leq n_j$, le segment $\Delta_l^{(i)}$ ne précède pas $\Delta_k^{(j)}$. On note α la composition :

$$\alpha = (\deg(\Delta_1^{(1)} + \dots + \Delta_{n_1}^{(1)}), \deg(\Delta_1^{(2)} + \dots + \Delta_{n_2}^{(2)}), \dots, \deg(\Delta_1^{(u)} + \dots + \Delta_{n_u}^{(u)})) \tag{5.5}$$

et on pose :

$$\pi_0 = \bigotimes_{i=1}^u (\langle \Delta_1^{(i)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_i}^{(i)} \rangle) \tag{5.6}$$

qui est une représentation irréductible (par le théorème 5.2) de M_α .

LEMME 5.6. *La représentation π_0 définie dans (5.6) apparaît avec multiplicité 1 dans :*

$$r_\alpha(\langle \Delta_1^{(1)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1^{(u)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_u}^{(u)} \rangle).$$

Démonstration. Par nos hypothèses (5.3), (5.4) et le lemme géométrique (voir le paragraphe 2.6), la représentations π_0 satisfait aux conditions de la proposition 2.1. Le lemme est donc une conséquence directe de cette proposition. □

PROPOSITION 5.7. *Avec les notations du lemme 5.6, on a les propriétés suivantes.*

(1) *La représentation :*

$$\langle \Delta_1^{(1)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1^{(u)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_u}^{(u)} \rangle$$

possède une unique sous-représentation irréductible ; sa multiplicité dans l'induite est 1.

(2) *La représentation :*

$$\langle \Delta_{n_u}^{(u)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1^{(u)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_{n_1}^{(1)} \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1^{(1)} \rangle$$

possède un unique quotient irréductible irréductible ; sa multiplicité dans l'induite est 1.

Démonstration. Ceci se déduit du lemme 5.6 et de la proposition 2.1. □

Nous prouvons maintenant le point 1 du théorème 5.4. Soit $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ une forme rangée d'un multisegment banal \mathbf{m} . La famille (5.2) est une autre forme rangée de \mathbf{m} . Le résultat est une conséquence de la remarque 5.5 et de la proposition 5.7.

Remarque 5.8. La représentation $\langle \mathbf{m} \rangle$ est donc aussi caractérisée comme l'unique sous-quotient irréductible de :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$$

dont le module de Jacquet associé à la composition (5.5) contient π_0 .

Remarque 5.9. On déduit, par la proposition 5.7 (2), que la représentation $\langle \Delta_r \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1 \rangle$ possède un unique quotient irréductible. Le module de Jacquet de ce quotient contient la représentation π_0 définie par (5.6). La remarque 5.8 implique alors que $\langle \mathbf{m} \rangle$ est aussi le seul quotient irréductible de $\langle \Delta_r \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1 \rangle$.

5.4 Si $\mathbf{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ est un multisegment banal, on note \mathbf{m}^\vee le multisegment :

$$\mathbf{m}^\vee = \Delta_1^\vee + \dots + \Delta_r^\vee.$$

On a le résultat suivant.

PROPOSITION 5.10. *La représentation $\langle \mathbf{m}^\vee \rangle$ est isomorphe à $\langle \mathbf{m} \rangle^\vee$.*

Démonstration. On peut supposer que $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ est une forme rangée de \mathbf{m} . D'après la remarque 5.9, la représentation $\langle \mathbf{m} \rangle$ est la seule sous-représentation irréductible de la représentation induite $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$ et le seul quotient irréductible de $\langle \Delta_r \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1 \rangle$. Par passage à la contragrédiente, on en déduit que $\langle \mathbf{m} \rangle^\vee$ est la seule sous-représentation irréductible de l'induite $\langle \Delta_r^\vee \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1^\vee \rangle$ et le seul quotient irréductible de $\langle \Delta_1^\vee \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r^\vee \rangle$. Comme $(\Delta_r^\vee, \dots, \Delta_1^\vee)$ est une forme rangée de \mathbf{m}^\vee , on a le résultat. □

PROPOSITION 5.11. *Soient $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_t$ des multisegments banals tels que, si $i \neq j$, aucun segment de \mathbf{m}_i ne soit lié à un segment de \mathbf{m}_j . Alors :*

$$\langle \mathbf{m}_1 \rangle \times \dots \times \langle \mathbf{m}_t \rangle \simeq \langle \mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_t \rangle.$$

Démonstration. Par récurrence, on se ramène au cas où t est égal à 2. Soient $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ et $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{r'})$ des formes rangées de \mathbf{m}_1 et \mathbf{m}_2 respectivement. Puisqu'aucun segment de \mathbf{m}_1 n'est lié à un segment de \mathbf{m}_2 , la famille $(\Delta_1 + \dots + \Delta_r + \Delta'_1 + \dots + \Delta'_{r'})$ est une forme rangée du multisegment banal $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$. Ainsi la représentation :

$$\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle \times \langle \Delta'_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle \tag{5.7}$$

a, par le théorème 5.4(1), une unique sous-représentation irréductible et elle est isomorphe à la représentation $\langle \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \rangle$. Puisque $\langle \mathbf{m}_1 \rangle \times \langle \mathbf{m}_2 \rangle$ est une sous-représentation de (5.7), on en déduit que $\langle \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \rangle$ est l'unique sous-représentation irréductible de $\langle \mathbf{m}_1 \rangle \times \langle \mathbf{m}_2 \rangle$. De même, d'après la remarque 5.9, la représentation :

$$\langle \Delta_r \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta'_{r'} \rangle \times \dots \times \langle \Delta'_1 \rangle \tag{5.8}$$

a un unique quotient irréductible isomorphe à $\langle \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \rangle$. Comme $\langle \mathbf{m}_1 \rangle \times \langle \mathbf{m}_2 \rangle$ est un quotient de (5.8), on trouve que $\langle \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \rangle$ est l'unique quotient irréductible de $\langle \mathbf{m}_1 \rangle \times \langle \mathbf{m}_2 \rangle$. Or, d'après le théorème 5.4, la représentation $\langle \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \rangle$ apparaît avec multiplicité 1 dans (5.7). On en déduit que $\langle \mathbf{m}_1 \rangle \times \langle \mathbf{m}_2 \rangle$ est isomorphe à $\langle \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \rangle$. □

Ce résultat permet de nous ramener au cas de multisegments banals de support fixé et connexe.

5.5 Comme au paragraphe 4.2, soit $\mathfrak{s} \in \mathbf{N}(\mathcal{C}_R)$ connexe et banal et écrivons :

$$\text{supp}(\mathfrak{s}) = [\rho] + [\rho\mu_\rho] + \cdots + [\rho\mu_\rho^t]$$

où ρ est une représentation irréductible cuspidale de G_m et $0 \leq t \leq e(\rho) - 1$. Soit un multisegment $\mathfrak{m} \in \text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ et soit $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ sa forme ordonnée. Pour chaque i , on écrit $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$. Alors, par le théorème 5.4 (1), on peut déduire facilement (par réciprocité de Frobenius) que :

$$\rho\mu_\rho^{a_1} \otimes \cdots \otimes \rho\mu_\rho^{b_1} \otimes \rho\mu_\rho^{a_2} \otimes \cdots \otimes \rho\mu_\rho^{b_2} \otimes \cdots \otimes \rho\mu_\rho^{a_r} \otimes \cdots \otimes \rho\mu_\rho^{b_r} \tag{5.9}$$

apparaît dans le module de Jacquet $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle)$.

Si $\mathfrak{m}' = \Delta'_1 + \cdots + \Delta'_r$ est un multisegment de support \mathfrak{s} tel que $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$, alors, d'après le lemme géométrique, la représentation (5.9) n'apparaît pas dans $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\langle \Delta'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta'_r \rangle)$. Par le théorème 5.4(1) et l'exactitude du foncteur de Jacquet, elle n'apparaît pas dans le module de Jacquet $\mathbf{r}_{(m, \dots, m)}(\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_r \rangle)$, la représentation $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_r \rangle$ étant une sous-représentation de $\langle \Delta'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta'_r \rangle$. On en déduit que, si $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ et $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$, alors $\langle \mathfrak{m} \rangle \not\simeq \langle \mathfrak{m}' \rangle$.

5.6 On prouve dans ce paragraphe la partie 2 du théorème 5.4. Soient \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' deux multisegments banals. On décompose \mathfrak{m} sous la forme :

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \cdots + \mathfrak{m}_t$$

avec \mathfrak{m}_i à support connexe pour $1 \leq i \leq t$ et $\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j$ à supports disjoints si $i \neq j$. D'après la proposition 5.11, on a :

$$\langle \mathfrak{m} \rangle \simeq \langle \mathfrak{m}_1 \rangle \times \cdots \times \langle \mathfrak{m}_t \rangle. \tag{5.10}$$

De même, on écrit $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'_1 + \mathfrak{m}'_2 + \cdots + \mathfrak{m}'_{t'}$ et on a $\langle \mathfrak{m}' \rangle \simeq \langle \mathfrak{m}'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \mathfrak{m}'_{t'} \rangle$. Supposons que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$ et que $\langle \mathfrak{m} \rangle$ et $\langle \mathfrak{m}' \rangle$ soient isomorphes. D'après la réciprocité de Frobenius, on a :

$$\text{Hom}_{M_\alpha}(\mathbf{r}_\alpha(\langle \mathfrak{m}'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \mathfrak{m}'_{t'} \rangle), \langle \mathfrak{m}_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle \mathfrak{m}_t \rangle) \neq \{0\},$$

où α désigne la composition correspondant à l'induite parabolique (5.10). Grâce au lemme géométrique, et par hypothèse sur les supports des \mathfrak{m}_i et des \mathfrak{m}'_j , on peut supposer que \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}'_1 ont le même support et que $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}'_1$. Écrivons \mathfrak{m}_1 sous la forme $\Delta_1 + \cdots + \Delta_r$ avec $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$ pour chaque i , où ρ est une représentation irréductible cuspidale de G_m . De façon analogue, on écrit \mathfrak{m}'_1 sous la forme $\Delta'_1 + \cdots + \Delta'_{r'}$.

D'après la partie 1 du théorème 5.4, il existe une représentation π de la forme (5.9) et une représentation $\pi' \in G_{n'}$, avec $n' = \text{deg}(\mathfrak{m}) - \text{deg}(\mathfrak{m}_1)$, telles que la représentation $\pi \otimes \pi'$ apparaisse dans $\mathbf{r}_{(m, m, \dots, m, n')}(\langle \mathfrak{m} \rangle)$. Comme dans le paragraphe 5.5, par le lemme géométrique et l'hypothèse $\mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}'_1$, pour toute représentation irréductible $\pi' \in G_{n'}$, la représentation $\pi \otimes \pi'$ n'apparaît pas dans $\mathbf{r}_{(m, m, \dots, m, n')}(\langle \Delta'_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta'_{r'} \rangle)$. D'après la partie (1) du théorème 5.4 et par exactitude du foncteur de Jacquet, elle n'apparaît pas dans $\mathbf{r}_{(m, m, \dots, m, n')}(\langle \mathfrak{m} \rangle)$. On en déduit que $\langle \mathfrak{m} \rangle \not\simeq \langle \mathfrak{m}' \rangle$.

5.7 Montrons maintenant la partie 3 du théorème 5.4. Soit π une représentation banale et soit \mathfrak{s} son support cuspidal. On note $\text{Irr}_R(\mathfrak{s})$ l'ensemble des représentations irréductibles de support cuspidal \mathfrak{s} et $\text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ l'ensemble des multisegments de support \mathfrak{s} . Ces ensembles sont finis et,

d'après le théorème 5.4 (2) qu'on vient de montrer, l'application $\mathfrak{m} \mapsto \langle \mathfrak{m} \rangle$ est une application injective de $\text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ vers $\text{Irr}_R(\mathfrak{s})$. On va prouver ici qu'elle est bijective.

Pour cela, il suffit de montrer que $\text{Irr}_R(\mathfrak{s})$ et $\text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ ont le même cardinal. On va prouver que l'application $\mathfrak{m} \mapsto Z(\mathfrak{m})$ est surjective. La preuve est la même que celle de [Zel80, 6.7] dans le cas $D = F$ et $R = \mathbf{C}$. Il faut d'abord étudier le cas de deux segments.

LEMME 5.12. *Soit ρ une représentation irréductible cuspidale de G_m , et soient deux segments banals liés $[a, b]_\rho$ et $[a', b']_\rho$ tels que le multisegment $[a, b]_\rho + [a', b']_\rho$ soit banal.*

(1) *La représentation :*

$$Z([a, b]_\rho) \times Z([a', b']_\rho) \tag{5.11}$$

est indécomposable de longueur 2.

(2) *On suppose que $[a, b]_\rho$ précède $[a', b']_\rho$. Alors l'unique sous-représentation irréductible de $Z([a, b]_\rho) \times Z([a', b']_\rho)$ est isomorphe à $Z([a, b']_\rho) \times Z([a', b]_\rho)$ et son unique quotient irréductible est une sous-représentation de $Z([a', b']_\rho) \times Z([a, b]_\rho)$.*

Démonstration. Le résultat est vrai dans le cas déployé, c'est-à-dire lorsque D est égale à F : l'argument de Zelevinski [Zel80, Proposition 4.6] dans le cas complexe est encore valable. En effet, dans la preuve, on utilise trois outils qui sont valables dans notre cadre :

- la théorie des dérivées ;
- le fait que dans l'induite $Z([a, b]_\rho) \times Z([a', b']_\rho)$ tous les facteurs ont le même support cuspidal (corollaire 4.6) ;
- le cas où les supports de $[a, b]_\rho$ et $[a', b']_\rho$ sont disjoints (voir [Zel80, § 2]), qui s'étend ici comme on l'a vu dans le théorème 5.2.

Pour prouver le résultat dans le cas général, on applique la méthode du changement de groupe exposée dans [MS12b, § 5.4] (voir notamment *ibid.*, corollaire 5.34). \square

Pour les représentations à la Langlands, voir la remarque 5.14.

Remarque 5.13. Si le multisegment $[a, b]_\rho + [a', b']_\rho$ n'est pas banal, alors l'induite :

$$Z([a, b]_\rho) \times Z([a', b']_\rho)$$

peut être de longueur strictement supérieure à 2.

Soit π une représentation irréductible banale de G_m , et soit $\Phi(\pi)$ l'ensemble des familles de segments :

$$\vec{\mathfrak{m}} = (\Delta_1, \dots, \Delta_r) \tag{5.12}$$

tels que π soit une sous-représentation de $Z(\Delta_1) \times \dots \times Z(\Delta_r)$. Cet ensemble est non vide et fini. Appelons *inversion* de (5.12) un couple d'indices (i, j) tels que $i < j$ et Δ_i précède Δ_j . On va prouver qu'il existe un élément $\vec{\mathfrak{m}} \in \Phi(\pi)$ sans inversion. Soit $\vec{\mathfrak{m}}$ dans $\Phi(\pi)$ avec un nombre d'inversions minimal, qu'on écrit sous la forme (5.12). Pour chaque i , on pose $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$. Supposons que $\vec{\mathfrak{m}}$ ait une inversion. Par le théorème 5.2, on peut bien supposer que cette inversion est de la forme $(i, i + 1)$, c'est-à-dire que Δ_i précède Δ_{i+1} . D'après la proposition 5.12, l'induite $Z(\Delta_i) \times Z(\Delta_{i+1})$ est composée de la représentation $Z([a_{i+1}, b_i]_\rho) \times Z([a_i, b_{i+1}]_\rho)$ et d'une sous-représentation irréductible de $Z(\Delta_{i+1}) \times Z(\Delta_i)$. Ainsi :

- (1) ou bien π est une sous-représentation de $Z(\Delta_1) \times \cdots \times Z(\Delta_{i+1}) \times Z(\Delta_i) \times \cdots \times Z(\Delta_r)$;
- (2) ou bien π est un sous-représentation de :

$$Z(\Delta_1) \times \cdots \times Z([a_{i+1}, b_i]_\rho) \times Z([a_i, b_{i+1}]_\rho) \times \cdots \times Z(\Delta_r)$$

et les deux familles $(\Delta_1, \dots, \Delta_{i+1}, \Delta_i, \dots, \Delta_r)$ et $(\Delta_1, \dots, [a_{i+1}, b_i]_\rho, [a_i, b_{i+1}]_\rho, \dots, \Delta_r)$ ont strictement moins d'inversions que \vec{m} d'après [Zel80, Lemma 6.7].

Cela met fin à la preuve du théorème 5.4 et donc aussi aux théorèmes 1.3 et 1.4.

Remarque 5.14. Si $[a, b]_\rho$ et $[a', b']_\rho$ sont deux segments banals liés et tels que le multisegment $[a, b]_\rho + [a', b']_\rho$ soit également banal, alors $L([a, b]_\rho) \times L([a', b']_\rho)$ est aussi de longueur 2 et indécomposable. Par exemple, la preuve de [Tad90, Proposition 4.3] est valable ici en remplaçant le théorème du quotient de Langlands par le théorème 1.4.

COROLLAIRE 5.15. *Soit $\Delta_1 + \cdots + \Delta_r$ un multisegment banal. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) pour tous $1 \leq i, j \leq r$, les segments Δ_i et Δ_j ne sont pas liés ;
- (2) la représentation $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$ est irréductible.

Démonstration. Ce corollaire suit du théorème 5.2, du lemme 5.12 et de la remarque 5.14. □

5.8 On suppose dans ce paragraphe que \mathbb{R} est le corps des nombres complexes. Si $D = \mathbb{F}$, les théorèmes 1.3 et 1.4 sont prouvés dans [Zel80, Theorem 6.1] et [Rod82, Théorème 3] respectivement. Dans le cas où $D \neq \mathbb{F}$, le théorème 1.4 est prouvé dans [Tad90, §2] lorsque la caractéristique de \mathbb{F} est nulle et dans [BHLS10] lorsque la caractéristique de \mathbb{F} est positive. Notre preuve est purement locale et ne s'appuie pas sur [DKV84]. Le théorème de classification 1.3 est aussi nouveau dans ce cas. Les résultats qui précèdent fournissent aussi, *a posteriori*, une nouvelle preuve du résultat suivant, dû à [DKV84, B.2.d] et [Bad04, Théorème 1.1].

THÉORÈME 5.16. *Si σ et σ' sont deux représentations irréductibles de carré intégrable, alors l'induite $\sigma \times \sigma'$ est irréductible.*

Démonstration. Comme dans le cas où D est égale à \mathbb{F} (la preuve non publiée de Bernstein s'étend au cas où $D \neq \mathbb{F}$, voir [Aue04] ou [BHLS10] pour plus de détails), il existe des segments centrés Δ et Δ' tels que $\sigma = L(\Delta)$ et $\sigma' = L(\Delta')$. Étant centrés, Δ et Δ' ne sont pas liés et le résultat découle maintenant du théorème 5.2. □

6. Relèvement d'une représentation banale

Soit ℓ un nombre premier différent de p . On note $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique du corps \mathbb{Q}_ℓ des nombres ℓ -adiques, $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ son anneau d'entiers et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ son corps résiduel. Dans cette section, nous montrons que toute $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ -représentation irréductible banale admet un relèvement à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

6.1 Soit un entier $m \geq 1$. Une représentation lisse de G_m sur un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel V est dite *entière* si elle est admissible et si elle admet une *structure entière*, c'est-à-dire un sous- $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ -module de V stable par G_m et engendré par une base de V sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (voir [Vig96]).

Une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation cuspidale de G_m est entière si et seulement si son caractère central est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible est entière si, et seulement si, son support cuspidal est formé de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations cuspidales entières.

Soit $\tilde{\pi}$ une représentation irréductible entière de G_m . Alors on a les propriétés suivantes (voir [Vig04, Theorem 1]) :

- (1) toutes les structures entières de $\tilde{\pi}$ sont de type fini comme $\overline{\mathbf{Z}}_\ell G$ -modules ;
- (2) si \mathfrak{v} est une structure entière de $\tilde{\pi}$, la représentation de G sur $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$ est de longueur finie ;
- (3) la semi-simplifiée de $\mathfrak{v} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$, qu'on note $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi})$ et qu'on appelle la *réduction* de $\tilde{\pi}$, ne dépend pas du choix de \mathfrak{v} mais seulement de la classe d'isomorphisme de $\tilde{\pi}$.

Par linéarité, on en déduit un morphisme de groupes :

$$\mathbf{r}_\ell : \mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}^{\text{en}}(G) \rightarrow \mathcal{G}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G),$$

où $\mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}^{\text{en}}(G)$ est le sous-groupe de $\mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(G)$ engendré par les classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations irréductibles entières de G .

On appelle *relèvement* d'une $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible π de G_m une $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation entière $\tilde{\pi}$ de G_m telle que $[\pi] = \mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi})$. Si un tel relèvement existe, on dit que π se relève.

6.2 Soit un entier $m \geq 1$. Le but de cette section est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 6.1. *Soit π une $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentation irréductible banale de G_m . Alors π admet un relèvement.*

Remarquons que, pour les représentations cuspidales banales, le théorème 6.1 est donné par la conjonction de [MS12b, Théorème 7.14], qui implique qu'une représentation irréductible cuspidale non supercuspidale n'est pas banale, et de [MS12b, Théorème 4.24].

6.2.1 On étend d'abord les définitions des opérateurs d'entrelacement de [Tad90, §5] au cas des représentations banales. On reprend les notations du paragraphe 5.1. Soient \mathfrak{m} un multisegment banal et $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ une forme rangée de \mathfrak{m} . On note $I(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ la représentation induite $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_r \rangle$.

Définition 6.2. On note :

$$\mathcal{J}_\mathfrak{m} : I(\Delta_r, \dots, \Delta_1) \rightarrow I(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

l'opérateur défini comme la composée :

$$I(\Delta_r, \dots, \Delta_1) \xrightarrow{\alpha} \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r \rangle \xrightarrow{\beta} I(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

où α et β sont respectivement la projection et l'inclusion définies par la remarque 5.9 et le théorème 5.4.

Remarque 6.3. L'opérateur $\mathcal{J}_\mathfrak{m}$ est un isomorphisme si et seulement si, pour tous entiers $1 \leq i, j \leq r$, les segments Δ_i et Δ_j ne sont pas liés.

Définition 6.4. On note :

$$\mathcal{J}'_\mathfrak{m} : I(\Delta_r, \dots, \Delta_1) \rightarrow I(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$$

l'opérateur défini comme la composée :

$$\begin{array}{ccc}
 I(\Delta_r, \dots, \Delta_3, \Delta_2, \Delta_1) & \xrightarrow{\text{id} \times \dots \times \text{id} \times \mathcal{J}(\Delta_1, \Delta_2)} & I(\Delta_r, \dots, \Delta_3, \Delta_1, \Delta_2) \\
 & \xrightarrow{\text{id} \times \dots \times \mathcal{J}(\Delta_1, \Delta_3) \times \text{id}} & I(\Delta_r, \dots, \Delta_1, \Delta_3, \Delta_2) \\
 & \vdots & \\
 & \xrightarrow{\mathcal{J}(\Delta_1, \Delta_r) \times \text{id} \times \dots \times \text{id}} & I(\Delta_1, \Delta_r, \dots, \Delta_3, \Delta_2) \\
 & \xrightarrow{\text{id} \times \dots \times \text{id} \times \mathcal{J}(\Delta_2, \Delta_3)} & I(\Delta_1, \Delta_r, \dots, \Delta_2, \Delta_3) \\
 & \vdots & \\
 & \xrightarrow{\text{id} \times \dots \times \mathcal{J}(\Delta_{r-1}, \Delta_r)} & I(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_r)
 \end{array}$$

où, pour tous segments Δ, Δ' , l'opérateur $\mathcal{J}(\Delta, \Delta')$ est défini par la définition 6.2.

LEMME 6.5. *Pour tout multisegment banal \mathfrak{m} , on a $\mathcal{J}'_{\mathfrak{m}} = \mathcal{J}_{\mathfrak{m}}$.*

Démonstration. La preuve de [Tad90, Lemma 5.1] est encore valable ici. □

6.2.2 Soit ρ une $\overline{\mathbf{F}}_{\ell}$ -représentation irréductible cuspidale banale de G_m et soit $\tilde{\rho}$ un relèvement de ρ . Pour tout segment banal $\Delta = [a, b]_{\rho}$, on pose $\tilde{\Delta} = [a, b]_{\tilde{\rho}}$.

PROPOSITION 6.6. *La $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$ -représentation $\langle \tilde{\Delta} \rangle$ est entière et on a :*

$$r_{\ell}(\langle \tilde{\Delta} \rangle) = \langle \Delta \rangle.$$

Démonstration. La représentation $\langle \tilde{\Delta} \rangle$ est entière d'après le paragraphe 6.1 et la proposition 4.10. Comme Δ est banal, $r_{\ell}(\langle \tilde{\Delta} \rangle)$ ne contient pas de représentation de support cuspidal différent du support de Δ d'après la proposition 4.5. Puisque la réduction modulo ℓ commute au foncteur de Jacquet, $r_{\ell}(\langle \tilde{\Delta} \rangle)$ est une $\overline{\mathbf{F}}_{\ell}$ -représentation dont le module de Jacquet relativement à la composition (m, \dots, m) est isomorphe à :

$$\mu_{\rho}^a \rho \otimes \mu_{\rho}^{a+1} \rho \otimes \dots \otimes \mu_{\rho}^b \rho.$$

La proposition découle alors de la proposition 5.1. □

Dans le cas général (c'est-à-dire pour un segment qui n'est pas nécessairement banal), voir [MS12b, §9.7].

PROPOSITION 6.7. *Soient $\Delta_1 = [a, b]_{\rho}$ et $\Delta_2 = [a', b']_{\rho}$ deux segments banals liés tels qu'on ait $1 \leq a + 1 \leq a' \leq b + 1 \leq b' \leq e(\rho) - 1$. Alors $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$ est entière et on a :*

$$r_{\ell}(\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle) = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle.$$

Remarquons que la condition $1 \leq a + 1 \leq a' \leq b + 1 \leq b' \leq e(\rho) - 1$ équivaut à dire que Δ_1 précède Δ_2 et que $\tilde{\Delta}_1$ précède $\tilde{\Delta}_2$.

Démonstration. La $\overline{\mathbf{Q}}_{\ell}$ -représentation $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$ est entière d'après le paragraphe 6.1. Comme le foncteur d'induction parabolique commute à la réduction, $r_{\ell}(\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle \times \langle \tilde{\Delta}_2 \rangle)$ est isomorphe à la semi-simplifiée de $\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle$, c'est-à-dire, par la proposition 5.12, à :

$$\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle \oplus (\langle a, b' \rangle_{\rho} \times \langle a', b \rangle_{\rho}).$$

Puisque, d'un autre côté, par la proposition 5.12, la représentation $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle \times \langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$ est composée des représentations $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$ et $\langle a, b' \rangle_{\tilde{\rho}} \times \langle a', b \rangle_{\tilde{\rho}}$, on a :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle \times \langle \tilde{\Delta}_2 \rangle) = \mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle) + \mathbf{r}_\ell(\langle a, b' \rangle_{\tilde{\rho}} \times \langle a', b \rangle_{\tilde{\rho}})$$

et, par la proposition 6.6 et le théorème 5.2 :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle a, b' \rangle_{\tilde{\rho}} \times \langle a', b \rangle_{\tilde{\rho}}) = \langle a, b' \rangle_\rho \times \langle a', b \rangle_\rho$$

et donc on trouve :

$$\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle) = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle,$$

ce qui termine la démonstration. □

6.2.3 Voyons maintenant que l'opérateur \mathcal{J}_m défini à la définition 6.2 se réduit bien mod ℓ .

PROPOSITION 6.8. Soient $\Delta_1 = [a, b]_\rho$ et $\Delta_2 = [a', b']_\rho$ deux segments banals liés tels qu'on ait $1 \leq a + 1 \leq a' \leq b + 1 \leq b' \leq e(\rho) - 1$. Notons \mathfrak{l}_1 et \mathfrak{l}_2 deux structures entières dans $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$ et $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$ respectivement. Alors il existe \mathfrak{l}'_1 et \mathfrak{l}'_2 deux structures entières dans $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$ et $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$ respectivement telles qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_1 & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2)}|_{\mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_1}} & \mathfrak{l}'_1 \times \mathfrak{l}'_2 \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \langle \Delta_2 \rangle \times \langle \Delta_1 \rangle & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\Delta_1, \Delta_2)}} & \langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \end{array}$$

où $\otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$ désigne le foncteur d'extension des scalaires de $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ à $\overline{\mathbf{F}}_\ell$.

Démonstration. Notons α la projection de $\langle \Delta_2 \rangle \times \langle \Delta_1 \rangle$ sur $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ définie par la remarque 5.9 et β le morphisme injectif de $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ dans $\langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle$ défini par le théorème 5.4. On définit $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ de façon analogue. D'après [Vig96, I.9.3], l'image de $\mathfrak{l}_2 \times \mathfrak{l}_1$ par $\tilde{\alpha}$ est une structure entière dans $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$, notée \mathfrak{l} . D'après la proposition 6.7, les $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentations $\mathfrak{l} \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$ et $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$ sont isomorphes. On note m le degré de $\Delta_1 + \Delta_2$ et on pose $G = G_m$.

D'après [Vig96, II.4.7] (voir aussi la preuve du lemme 6.11 dans [Dat05]), il existe une extension finie E/\mathbf{Q}_ℓ telle que les $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentations $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$, $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$ et $\langle \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2 \rangle$ admettent des modèles sur E , notés respectivement π_1^E, π_2^E et π^E . On peut supposer que \mathfrak{l} est de la forme $\overline{\mathbf{Z}}_\ell \otimes \mathfrak{v}'$ où \mathfrak{v}' est une \mathcal{O}_E -structure entière de π^E . Soient \mathfrak{v}_1 et \mathfrak{v}_2 deux \mathcal{O}_E -structures entières quelconques de π_1^E et π_2^E respectivement. Par [Vig96, I.9.3], l'image réciproque $\tilde{\beta}^{-1}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2)$ est une \mathcal{O}_E -structure entière \mathfrak{v} de π^E . Puisque \mathfrak{v}' et \mathfrak{v} sont de type fini en tant que $\mathcal{O}_E G$ -modules, il existe une constante $a \in E$ telle que $\mathfrak{v}' \subseteq a\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{v}' \not\subseteq a\mathfrak{p}_E \mathfrak{v}$. Soient $\mathfrak{l}'_1 = \overline{\mathbf{Z}}_\ell \otimes a\mathfrak{v}_1$ et $\mathfrak{l}'_2 = \overline{\mathbf{Z}}_\ell \otimes a\mathfrak{v}_2$. Ce sont des structures entières dans $\langle \tilde{\Delta}_1 \rangle$ et $\langle \tilde{\Delta}_2 \rangle$ respectivement. Par construction, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l} & \xrightarrow{\tilde{\beta}|_{\mathfrak{l}}} & \mathfrak{l}'_1 \times \mathfrak{l}'_2 \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle & \xrightarrow{\beta} & \langle \Delta_1 \rangle \times \langle \Delta_2 \rangle \end{array}$$

est commutatif, ce qui achève la preuve de la proposition. □

6.2.4 Soit $\mathfrak{s} \in \mathbf{N}(\mathcal{C}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell})$ un support connexe banal et supposons que :

$$\text{supp}(\mathfrak{s}) = [\rho] + [\rho\mu_\rho] + \cdots + [\rho\mu_\rho^t], \quad 0 \leq t \leq e(\rho) - 1.$$

Soient $\mathfrak{m} \in \text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ un multisegment banal et $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ une forme rangée de \mathfrak{m} . Pour tout $1 \leq i \leq r$, on pose $\Delta_i = [a_i, b_i]_\rho$ avec $0 \leq a_i \leq b_i \leq t$. Pour chaque entier i , on pose $\tilde{\Delta}_i = [a_i, b_i]_{\tilde{\rho}}$, puis on pose $\tilde{\mathfrak{m}} = \tilde{\Delta}_1 + \cdots + \tilde{\Delta}_r$. La condition $0 \leq a_i \leq b_i \leq t$ assure que, pour tous $1 \leq i, j \leq r$, on a :

$$\tilde{\Delta}_i \text{ précède } \tilde{\Delta}_j \text{ si et seulement si } \Delta_i \text{ précède } \Delta_j.$$

On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6.9. *Avec les notations précédentes, pour $1 \leq i \leq r$, soit \mathfrak{l}_i une structure entière dans $\langle \tilde{\Delta}_i \rangle$. Alors il existe, pour tout $1 \leq i \leq r$, une structure entière \mathfrak{l}'_i dans $\langle \tilde{\Delta}_i \rangle$ telle qu'on ait un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \cdots \times \mathfrak{l}_1 & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{m}}}|_{\mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \cdots \times \mathfrak{l}_1}} & \mathfrak{l}'_1 \times \cdots \times \mathfrak{l}'_{r-1} \times \mathfrak{l}'_r \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \mathbf{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_1) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}} & \mathbf{I}(\Delta_1, \dots, \Delta_r) \end{array}$$

où $\otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell$ désigne le foncteur d'extension des scalaires de $\overline{\mathbf{Z}}_\ell$ à $\overline{\mathbf{F}}_\ell$.

Démonstration. D'après le lemme 6.5 et la proposition 6.8, il nous reste à voir que, si Δ, Δ' sont deux segments banals non liés et \mathfrak{l} et \mathfrak{l}' sont deux structures entières dans $\langle \tilde{\Delta} \rangle$ et $\langle \tilde{\Delta}' \rangle$ respectivement, alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l} \times \mathfrak{l}' & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}')}|_{\mathfrak{l} \times \mathfrak{l}'}} & \mathfrak{l}' \times \mathfrak{l} \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \langle \tilde{\Delta} \rangle \times \langle \tilde{\Delta}' \rangle & \xrightarrow{\mathcal{J}_{(\Delta, \Delta')}} & \langle \tilde{\Delta}' \rangle \times \langle \tilde{\Delta} \rangle \end{array}$$

est toujours commutatif. Or, les flèches horizontales étant, par le théorème 5.2, des isomorphismes, le résultat est clair. \square

6.2.5 On prouve maintenant le théorème 6.1. Par la proposition 5.11, on se ramène au cas où la représentation π est de support cuspidal \mathfrak{s} connexe. On peut maintenant appliquer le corollaire 6.9. Soit $\mathfrak{m} \in \text{Mult}_R(\mathfrak{s})$ un multisegment banal tel que $\pi = \langle \mathfrak{m} \rangle$ et soit $(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ une forme rangée de \mathfrak{m} . On définit $\tilde{\mathfrak{m}}$ comme dans 6.2.4. Pour $1 \leq i \leq r$, soient $\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}'_i$ des structures entières dans $\langle \tilde{\Delta}_i \rangle$ telles qu'on ait un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \cdots \times \mathfrak{l}_1 & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\tilde{\mathfrak{m}}}|_{\mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \cdots \times \mathfrak{l}_1}} & \mathfrak{l}'_1 \times \cdots \times \mathfrak{l}'_{r-1} \times \mathfrak{l}'_r \\ \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \downarrow & & \downarrow \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \\ \mathbf{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_1) & \xrightarrow{\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}} & \mathbf{I}(\Delta_1, \dots, \Delta_r) \end{array}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}((\mathfrak{l}_r \times \mathfrak{l}_{r-1} \times \cdots \times \mathfrak{l}_1) \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell) \simeq \mathcal{J}_{\mathfrak{m}}(\mathbf{I}(\Delta_r, \dots, \Delta_1)) \simeq \pi.$$

D'un autre côté, l'image de $l_r \times l_{r-1} \times \dots \times l_1$ par $\mathcal{I}_{\tilde{\mathbf{m}}}$ est une structure entière l de la représentation $\tilde{\pi} = \langle \tilde{\mathbf{m}} \rangle$ par le lemme 6.5, et donc la commutativité du diagramme implique que :

$$l \otimes \overline{\mathbf{F}}_\ell \simeq \pi,$$

c'est-à-dire $\mathbf{r}_\ell(\tilde{\pi}) = [\pi]$, ce qui achève la preuve du théorème.

Remarque 6.10. Ainsi, pour relever une représentation irréductible banale π de la forme $\langle \mathbf{m} \rangle$ pour un multisegment $\mathbf{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ en une représentation $\tilde{\pi}$ de la forme $\langle \tilde{\mathbf{m}} \rangle$ pour un multisegment $\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\Delta}_1 + \dots + \tilde{\Delta}_r$, il suffit que les segments $\tilde{\Delta}_i$ soient des relèvements des segments Δ_i tels que, pour tous $1 \leq i, j \leq r$, on ait :

$$\tilde{\Delta}_i \text{ précède } \tilde{\Delta}_j \text{ si et seulement si } \Delta_i \text{ précède } \Delta_j.$$

L'hypothèse de banalité sur π nous assure qu'un tel choix des $\tilde{\Delta}_i$ est possible. Si on peut faire un tel choix, on a $\mathbf{r}_\ell(\langle \tilde{\mathbf{m}} \rangle) = [\langle \mathbf{m} \rangle]$.

6.3 On a introduit dans la section 2 une \mathbf{Z} -algèbre \mathcal{G}_R ne dépendant que de R et de la F -algèbre à division centrale D . Dans l'appendice A, on définit pour tout R et toute D un automorphisme involutif de \mathbf{Z} -algèbre :

$$\mathbf{D}_R : \mathcal{G}_R \rightarrow \mathcal{G}_R$$

appelé involution d'Aubert. Dans le cas où R est de caractéristique 0, elle coïncide à un signe près avec l'involution de Zelevinski de [BR07, Tad90, Zel80] qui échange $Z(\mathbf{m})$ et $L(\mathbf{m})$ pour tout multisegment \mathbf{m} (voir la proposition A.7). Pour les $\overline{\mathbf{F}}_\ell$ -représentations banales, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 6.11. *Soit ℓ un nombre premier différent de p . Pour toute représentation irréductible banale π de $\text{Irr}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(G_m)$, $m \geq 1$, on pose :*

$$|\mathbf{D}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}|(\pi) = (-1)^{m-r(\pi)} \mathbf{D}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(\pi)$$

où $r(\pi)$ est le nombre de représentations cuspidales dans le support cuspidal de π , et on note \mathbf{m} et \mathbf{m}' les multisegments banals tels que $\pi = Z(\mathbf{m}) = L(\mathbf{m}')$. On a alors :

$$|\mathbf{D}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}|(\pi) = L(\mathbf{m}) = Z(\mathbf{m}').$$

En particulier, $|\mathbf{D}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}|$ est une involution sur l'ensemble des représentations irréductibles banales.

Démonstration. Écrivons $\mathbf{m} = \Delta_1 + \dots + \Delta_r$ et notons $\tilde{\mathbf{m}} = \tilde{\Delta}_1 + \dots + \tilde{\Delta}_r$ un multisegment tel que $\mathbf{r}_\ell(Z(\tilde{\mathbf{m}})) = Z(\mathbf{m})$ (voir le théorème 6.1). La construction de $\tilde{\mathbf{m}}$ est telle que, d'après la remarque 6.10, pour tous $1 \leq i, j \leq r$, le segment $\tilde{\Delta}_i$ précède $\tilde{\Delta}_j$ si et seulement si Δ_i précède Δ_j . On pose $r = r(\pi)$, qui est aussi le nombre de représentations cuspidales dans le support cuspidal de $Z(\tilde{\mathbf{m}})$. D'après les propositions A.3 et A.7 et la remarque 6.10, on a :

$$\mathbf{D}_{\overline{\mathbf{F}}_\ell}(\pi) = \mathbf{r}_\ell(\mathbf{D}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}(Z(\tilde{\mathbf{m}}))) = \mathbf{r}_\ell((-1)^{m-r} L(\tilde{\mathbf{m}})) = (-1)^{m-r} L(\mathbf{m}).$$

L'autre assertion se prouve de façon similaire. □

REMERCIEMENTS

Le début de ce travail faisait partie de la thèse d'Alberto Mínguez sous la direction de Guy Henniart. Les auteurs le remercient pour son support constant et ses nombreuses suggestions.

Les auteurs remercient chaleureusement le rapporteur anonyme, pour sa lecture soigneuse du manuscrit et ses suggestions qui en ont amélioré la présentation.

Vincent Sécherre remercie l'Institut de Mathématiques de Luminy et l'Université de la Méditerranée Aix-Marseille 2, où il était en poste durant la majeure partie de ce travail.

Appendice A. L'involution d'Aubert

Dans cette annexe, on utilise les notations du reste de l'article. Rappelons qu'on a introduit dans la section 2 une \mathbf{Z} -algèbre \mathcal{G}_R ne dépendant que de R et de la F -algèbre à division centrale D . Dans [Zel80, § 9], dans le cas où $D = F$ et $R = \mathbf{C}$, Zelevinski définit un automorphisme involutif de cette algèbre. Tadić [Tad90, § 3] étend cette définition au cas où D n'est pas forcément commutative mais est de caractéristique nulle, puis Badulescu-Renard traitent la question sans restriction sur la caractéristique de D dans [BR07, § 2].

Pour tout groupe réductif connexe \mathbf{G} défini sur F , Aubert introduit dans [Aub95, Aub96] une involution du groupe de Grothendieck des représentations lisses complexes de longueur finie du groupe $\mathbf{G}(F)$ des F -points de \mathbf{G} (voir aussi S.-I. Kato [Kat93]), et prouve que cette involution préserve l'irréductibilité à un signe près. Elle en déduit, dans le cas où D vaut F , un automorphisme involutif de \mathbf{Z} -algèbre de \mathcal{G}_R qui coïncide à un signe près avec l'involution de Zelevinski de [Zel80].

Dans cette annexe, en reprenant la méthode utilisée dans [Aub95], on définit pour tout R et toute D un automorphisme involutif de \mathbf{Z} -algèbre :

$$\mathbf{D}_R : \mathcal{G}_R \rightarrow \mathcal{G}_R$$

appelé involution d'Aubert par analogie avec le cas où R est le corps \mathbf{C} des nombres complexes. Si R est de caractéristique nulle, on prouve que \mathbf{D}_R coïncide à un signe près avec l'involution de Zelevinski définie dans [BR07, Tad90, Zel80].

A.1 On suppose que G est le groupe des F -points d'un groupe réductif connexe défini sur F . On note $\mathcal{R}_R(G)$ la catégorie des R -représentations lisses de G et $\mathcal{G}_R(G)$ le groupe de Grothendieck de ses représentations de longueur finie. Si σ est une représentation de longueur finie de G , on note $[\sigma]$ son image dans $\mathcal{G}_R(G)$.

On a choisi au paragraphe 2.3 une racine carrée de q dans R . Si $P = MU$ est un sous-groupe parabolique de G muni d'une décomposition de Levi, on note r_P^G le foncteur de restriction parabolique normalisé (relativement à ce choix d'une racine carrée) de $\mathcal{R}_R(G)$ dans $\mathcal{R}_R(M)$ et i_P^G le foncteur d'induction parabolique normalisé qui lui correspond, c'est-à-dire son adjoint à droite. Ces deux foncteurs sont exacts, et préservent l'admissibilité et le fait d'être de longueur finie (voir [Vig96, II, paragraphes 2.1, 3.8, 5.13]). On note encore r_P^G et i_P^G les morphismes de groupes entre $\mathcal{G}_R(G)$ et $\mathcal{G}_R(M)$ induits par ces deux foncteurs.

A.2 On fixe un tore déployé maximal A de G et un sous-groupe parabolique minimal P de G contenant A . On note respectivement W et Φ le groupe de Weyl et l'ensemble des racines réduites de G relativement à A . Le choix de P détermine une base S de Φ ainsi qu'un ensemble Φ^+ de racines positives dans Φ . Pour toute partie $I \subseteq S$, on note P_I le sous-groupe parabolique de G contenant P déterminé par I et M_I le sous-groupe de Levi contenant A lui correspondant. Pour $I, J \subseteq S$, on pose :

$$\mathcal{D}(I, J) = \{w \in W \mid w^{-1}(I) \subseteq \Phi^+ \text{ et } w(J) \subseteq \Phi^+\}. \tag{A.1}$$

Étant donnée $\pi \in \mathcal{G}_R(M_J)$, on a le lemme géométrique de Bernstein et Zelevinski :

$$r_{P_I}^G(i_{P_J}^G(\pi)) = \sum_{w \in \mathcal{D}(I,J)} i_{M_I \cap P_J^{w^{-1}}}^{M_I}(w \cdot r_{M_J \cap P_I^w}^{M_J}(\pi)), \tag{A.2}$$

qui est une égalité dans le groupe de Grothendieck $\mathcal{G}_R(M_I)$, et où $w \cdot$ désigne la conjugaison par w . On renvoie à [Dat05, 2.8] pour plus de précisions.

Pour $J \subseteq S$, on note w_J l'élément de plus grande longueur dans $\mathcal{D}(J, \emptyset)$ et $J^* = w_J^{-1}(J)$.

A.3 La définition suivante étend la définition 1.5 de [Aub95] au cas des R-représentations. Si X est un ensemble fini, on note $|X|$ son cardinal.

Définition A.1. On définit un endomorphisme de groupe $\mathbf{D}_{G,R}$ de $\mathcal{G}_R(G)$ par :

$$\mathbf{D}_{G,R} = \sum_{I \subseteq S} (-1)^{|I|} \cdot i_{P_I}^G \circ r_{P_I}^G.$$

Dans le cas où G a des sous-groupes discrets cocompacts, cet endomorphisme a les propriétés suivantes.

PROPOSITION A.2. *On suppose que G possède des sous-groupes discrets cocompacts.*

(1) *Pour tout $J \subseteq S$, on a :*

$$\mathbf{D}_{G,R} \circ i_{P_J}^G = i_{P_J}^G \circ \mathbf{D}_{M_J,R} \quad \text{et} \quad r_{P_J}^G \circ \mathbf{D}_{M_J,R} = w_J \cdot (\mathbf{D}_{M_{J^*},R} \circ r_{P_{J^*}}^G).$$

(2) *C'est une involution, c'est-à-dire que $\mathbf{D}_{G,R}^2$ est l'identité sur $\mathcal{G}_R(G)$.*

Démonstration. La preuve de [Aub95, Théorème 1.7] peut être adaptée au cas modulaire. Lorsque R est de caractéristique non nulle, la seule difficulté réside dans la propriété [Aub95, (1.2)], prouvée dans [MS12b, Proposition 2.2] et [Dat09, Lemme 4.13]. La preuve repose sur la propriété d'irréductibilité générique d'une induite parabolique, elle-même prouvée dans [Dat05, Theorem 5.1] sous l'hypothèse que G possède des sous-groupes discrets cocompacts. \square

A.4 Soit ℓ un nombre premier différent de p . On dispose d'une notion de $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ -représentation entière analogue à celle du paragraphe 6.1. En particulier, on a un homomorphisme de groupes :

$$r_\ell^G : \mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}^{\text{en}}(G) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbf{F}_\ell}(G).$$

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G . La réduction modulo ℓ commute à l'induction parabolique, c'est-à-dire qu'on a l'égalité :

$$r_\ell^G \circ i_P^G = i_P^G \circ r_\ell^M$$

entre endomorphismes de $\mathcal{G}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}^{\text{en}}(M)$ (voir [Vig96, II.5]).

Si l'on suppose que G est un groupe symplectique, orthogonal, unitaire ou une forme intérieure d'un groupe linéaire général $GL_n(F)$ avec $n \geq 1$, alors la réduction modulo ℓ commute aussi à la restriction parabolique, c'est-à-dire qu'on a l'égalité :

$$r_\ell^M \circ r_P^G = r_P^G \circ r_\ell^G$$

(voir [Dat05, Proposition 6.7]). On renvoie à [MS12b, § 1.2] pour plus de détails. On en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION A.3. *On suppose que G est un groupe symplectique, orthogonal, unitaire ou une forme intérieure d'un groupe linéaire général $GL_n(\mathbb{F})$, $n \geq 1$. On a l'égalité :*

$$D_{G, \overline{\mathbb{F}}_\ell} \circ r_\ell^G = r_\ell^G \circ D_{G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell}$$

entre endomorphismes du groupe $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\text{en}}(G)$.

A.5 On suppose désormais que $G = G_m = GL_m(D)$ pour $m \geq 0$, qui possède des sous-groupes discrets cocompacts. Dans ce cas, les propositions A.2 et A.3 sont valables. Mais, contrairement à ce qui se produit dans le cas complexe, $D_{G, R}$ ne préserve pas l'irréductibilité en général lorsque R est de caractéristique non nulle.

Exemple A.4. Si la caractéristique ℓ de R divise $q + 1$, l'image par $D_{G, R}$ du caractère trivial de $GL_2(\mathbb{F})$ n'est pas irréductible : c'est la somme du caractère ν et d'une représentation irréductible cuspidale.

Rappelons qu'on a introduit dans la section 2 une \mathbf{Z} -algèbre \mathcal{G}_R .

Définition A.5. On désigne par D_R l'unique endomorphisme de \mathbf{Z} -module de \mathcal{G}_R tel que, pour toute représentation irréductible $\pi \in \text{Irr}_R(G_m)$, $m \geq 0$, on ait $D_R(\pi) = D_{G_m, R}(\pi)$.

D'après la proposition A.2, D_R est un automorphisme involutif de \mathbf{Z} -algèbre de \mathcal{G}_R .

Remarque A.6. D'après [MS12b, Lemme 9.36], il existe un unique automorphisme de \mathbf{Z} -algèbre de \mathcal{G}_R , noté E_R , tel qu'on ait :

$$E_R(Z(\Delta)) = L(\Delta)$$

pour tout segment Δ , banal ou non banal (voir [MS12b, Définition 7.5] pour la définition de $Z(\Delta)$ et $L(\Delta)$ dans le cas général). L'automorphisme E_R , dit *de Zelevinski*, et ses relations avec D_R et les involutions définies dans [Vig97] et [LTV99], sera étudié dans un article à venir.

Dans le cas des représentations irréductibles banales, voir le théorème 6.11.

A.6 Dans ce paragraphe, nous supposons que R est de caractéristique 0. Rappelons que, dans ce cas, tout multisegment est banal et toute représentation irréductible est banale.

PROPOSITION A.7. *On suppose que R est de caractéristique nulle. On définit un endomorphisme de \mathbf{Z} -module $|D_R|$ de \mathcal{G}_R en posant :*

$$|D_R|(\pi) = (-1)^{m-r(\pi)} D_R(\pi)$$

pour toute représentation irréductible $\pi \in \text{Irr}_R(G_m)$, $m \geq 0$, où $r(\pi)$ est le nombre de représentations cuspidales dans le support cuspidal de π .

(1) $|D_R|$ est un automorphisme involutif de \mathbf{Z} -algèbre préservant l'irréductibilité, c'est-à-dire que, pour tout $\pi \in \text{Irr}_R$, on a $|D_R|(\pi) \in \text{Irr}_R$.

(2) Pour tout multisegment $\mathfrak{m} \in \text{Mult}_R$, on a $|D_R|(Z(\mathfrak{m})) = L(\mathfrak{m})$ et $|D_R|(L(\mathfrak{m})) = Z(\mathfrak{m})$.

Démonstration. Les preuves du théorème 2.3 et du corollaire 3.9 de [Aub95] dans le cas complexe s'appliquent à R de caractéristique nulle et à une \mathbb{F} -algèbre à division centrale D pas forcément commutative. On en déduit d'une part que, pour tout $\pi \in \text{Irr}_R$, on a $|D_R|(\pi) \in \text{Irr}_R$, et d'autre part que, pour tout segment Δ , on a $|D_R|(Z(\Delta)) = L(\Delta)$. Par la proposition A.2, on en déduit que $|D_R|$ est un automorphisme involutif de \mathbf{Z} -algèbre de \mathcal{G}_R .

L'assertion (2) de la proposition est bien connue, mais nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature. En voici une démonstration. Soit donc $\mathfrak{m} = \Delta_1 + \cdots + \Delta_r$ un multisegment. Avec les notations du paragraphe 5.3, et d'après la remarque 5.8, $\langle \mathfrak{m} \rangle$ est l'unique représentation irréductible satisfaisant aux conditions suivantes :

- (1) c'est une sous-quotient irréductible de $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle$;
- (2) le module de Jacquet $r_\alpha(\langle \mathfrak{m} \rangle)$ contient la représentation π_0 (voir (5.5) et (5.6)).

Par additivité, $|\mathbf{D}_R|(\langle \mathfrak{m} \rangle)$ est un sous-quotient irréductible de :

$$|\mathbf{D}_R|(\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_r \rangle) = |\mathbf{D}_R|(\langle \Delta_1 \rangle) \times \cdots \times |\mathbf{D}_R|(\langle \Delta_r \rangle).$$

Pour la même raison, $|\mathbf{D}_R|(\pi_0)$ est un sous-quotient irréductible de $r_\alpha(|\mathbf{D}_R|(\langle \mathfrak{m} \rangle))$. De la remarque 5.8 et du fait que $|\mathbf{D}_R|$ échange $Z(\Delta)$ et $L(\Delta)$, on déduit que $|\mathbf{D}_R|$ échange $Z(\mathfrak{m})$ et $L(\mathfrak{m})$. \square

REFERENCES

- Ari02 S. Ariki, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, University Lecture Series, vol. 26 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2002).
- Aub95 A.-M. Aubert, *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2179–2189.
- Aub96 A.-M. Aubert, *Erratum à Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 4687–4690.
- Aue04 A. N. Auel, *Une démonstration d'un théorème de Bernstein sur les représentations de quasi carré intégrable de $GL_n(F)$ où F est un corps local non archimédien*, Mémoire de DEA, Université Paris Sud (2004).
- Bad04 A. I. Badulescu, *Un résultat d'irréductibilité en caractéristique non nulle*, Tohoku Math. J. (2) **56** (2004), 583–592.
- BHLS10 A. I. Badulescu, G. Henniart, B. Lemaire and V. Sécherre, *Sur le dual unitaire de $GL_r(D)$* , Amer. J. Math. **132** (2010), 1365–1396.
- BR07 A. I. Badulescu and D. Renard, *Zelevinsky involution and Mœglin–Waldspurger algorithm for $GL_n(D)$* , Funct. Anal. IX **48** (2007), 9–15.
- BZ76 I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, *Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field*, Uspehi Mat. Nauk **31** (1976), 5–70.
- BZ77 I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p-adic groups. I*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér **10** (1977), 441–472.
- CG97 N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry* (Birkhäuser, Boston, MA, 1997).
- Dat05 J.-F. Dat, *ν -tempered representations of p-adic groups, I: l-adic case*, Duke Math. J. **126** (2005), 397–469.
- Dat09 J.-F. Dat, *Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques*, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), 261–333.
- DKV84 P. Deligne, D. Kazhdan and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, in *Representations of reductive groups over a local field* (Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984), 33–117.
- Kat93 S.-I. Kato, *Duality for representations of a Hecke algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 941–946.

- LTV99 B. Leclerc, J.-Y. Thibon and E. Vasserot, *Zelevinsky's involution at roots of unity*, J. Reine Angew. Math. **513** (1999), 33–51.
- Min09 A. Mínguez, *Sur l'irréductibilité d'une induite parabolique*, J. Reine Angew. Math. **629** (2009), 107–131.
- MS12a A. Mínguez and V. Sécherre, *Types modulo ℓ pour les formes intérieures de GL_n sur un corps local non archimédien*, Prépublication (2012).
- MS12b A. Mínguez and V. Sécherre, *Représentations lisses modulo ℓ de $GL_m(\mathbb{D})$* , Prépublication (2012).
- Rod82 F. Rodier, *Représentations de $GL(n, k)$ où k est un corps p -adique*, in *Bourbaki seminar, Vol. 1981/1982*, Astérisque, vol. 92 (Soc. Math. France, Paris, 1982), 201–218.
- Tad90 M. Tadić, *Induced representations of $GL(n, A)$ for p -adic division algebras A* , J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 48–77.
- Vig96 M.-F. Vignéras, *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , Progress in Mathematics, vol. 137 (Birkhäuser, Boston, MA, 1996).
- Vig97 M.-F. Vignéras, *Cohomology of sheaves on the building and R -representations*, Invent. Math. **127** (1997), 349–373.
- Vig04 M.-F. Vignéras, *On highest Whittaker models and integral structures*, in *Contributions to Automorphic forms, geometry and number theory: Shalikafest 2002* (Johns Hopkins University Press, 2004), 773–801.
- Zel80 A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$* , Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **13** (1980), 165–210.

Alberto Mínguez minguez@math.jussieu.fr

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75005 Paris, France

Vincent Sécherre vincent.secherre@math.uvsq.fr

Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France