Can. J. Math., Vol. XXXV, No. 2, 1983, pp. 218–273

PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE DE CORPS VALUES

JEAN FRESNEL ET MICHEL MATIGNON

0. Introduction. Soient K un corps local, $\bar{K}$ sa clôture algébrique, R, L, M trois corps tels que $K \subset R \subset L \subset \bar{K}$ et $K \subset R \subset M \subset \bar{K}$. Supposons que L et M soient linéairement disjoints sur R. Quel est le complété du corps LM (compositum de L et M) pour une norme de R-algèbre qui coïncide avec la valeur absolue sur $L \cup M$? On sait que LM est isomorphe en tant que R-algèbre au produit tensoriel $L \otimes_R M$ et il est facile de montrer que la valeur absolue est la plus petite norme du type considéré ci-dessus et que la norme tensorielle en est la plus grande. C'est pourquoi nous étudions d'abord le complété de $L \otimes_R M$ pour la norme tensorielle. Citons dans ce cas les résultats essentiels lorsque la caractéristique de K est nulle. On définit naturellement une notion d'idéal différente dans les extensions de degré infini qui sera noté $\mathfrak{D}_{L/R}$ et $\mathfrak{D}_{M/R}$. Tout d'abord la norme tensorielle est équivalente à la valeur absolue si et seulement si $\mathfrak{D}_{L/R} \neq (0)$ ou $\mathfrak{D}_{M/R} \neq (0)$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$, le produit tensoriel complété $L \hat{\otimes}_R M$ est un anneau local qui possède un unique idéal maximal $\mathfrak{N}$, il est non nul, le nilradical $\mathfrak{N}$ est dense dans $\mathfrak{N}$. Le quotient $L \hat{\otimes}_R M/\mathfrak{N}$ est isomorphe et isométrique au complété $(LM)^\wedge$ de LM pour la valeur absolue. Ce dernier résultat peut s'interprèter ainsi: le seul corps entre LM et $(LM)^\wedge$, complet pour une norme coïncidant avec la valeur absolue sur $L \cup M$ est $(LM)^\wedge$. Sous cette forme le résultat peut paraître assez naturel, en revanche l'apparition d'éléments nilpotents dans $L \hat{\otimes}_R M$ lorsque $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$ est quelque chose d'assez étonnant. La condition $\mathfrak{D}_{L/R} = (0)$ est plus forte que la condition indice de ramification sauvage infini, à titre d'exemple une extension galoisienne complètement ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ dont le groupe de Galois est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$ est de différente nulle.

Notre étude se place dans la situation où L et M ne sont pas nécessairement linéairement disjoints sur R.

Au paragraphe 1, on réduit l'étude au cas où R, L, M sont des traces sur $\bar{K}$ de corps fermés de $\hat{\bar{K}}$ contenant K. De tels corps sont parfaitement caractérisés depuis les résultats de Ax, Sen, Tate et Matignon (pour la caractéristique $p > 0$).

Au paragraphe 2 on définit la notion de spectre et de transformation

Reçu le 7 avril, 1981.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

de Gelfand d'une $\hat{R}$-algèbre de Banach et nous donnons quelques propriétés dans le cas de l'algèbre $L \hat{\otimes}_R M$.

Le paragraphe 3 a pour objet de définir la différente dans les extensions séparables infinies, c'est un outil essentiel dans tout ce travail. Il y est montré un résultat fondamental qui est le suivant: soit L une extension algébrique séparable de R telle que $\mathfrak{D}_{L/R} = (0)$, soit L' une extension algébrique séparable de L, alors

$$|\mathfrak{D}_{L'/L}| = 1 \quad \text{où} \quad |\mathfrak{D}_{L'/L}| = \sup_{x \in \mathfrak{D}_{L'/L}} |x|.$$

Au paragraphe 4 on donne une première application du paragraphe 3 en comparant la norme tensorielle et la norme spectrale de $L \otimes_R M$ à l'aide de $\mathfrak{D}_{M/R}$ et $\mathfrak{D}_{L/R}$.

Au paragraphe 5 on étudie l'algèbre $L \hat{\otimes}_R M$ lorsque le corps local est de caractéristique $p > 0$. On montre que la transformation de Gelfand de $L \hat{\otimes}_R M$ est un morphisme strict et que le nilradical $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans le radical $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$.

Il nous reste donc à étudier $L \hat{\otimes}_R M$ lorsque R est de caractéristique nulle et $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$. Le problème de l'existence d'un radical et d'un nilradical non nuls est beaucoup plus délicat qu'en caractéristique $p > 0$. En effet, dans ce dernier cas, $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$ n'est autre que l'adhérence du radical de $L \otimes_R M$. En revanche, en caractéristique nulle, le radical de $L \otimes_R M$ est réduit à (0). L'exemple type est le suivant: soient $R = \mathbf{Q}_p$ le complété du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels pour la valeur absolue p-adique, $L = M = C_\infty = \bigcup_{n \geq 1} C_n$ où $C_n = \mathbf{Q}_p\,(\sqrt[p^n]{1})$. Pour étudier l'algèbre $C_\infty \hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} C_\infty$ on utilise un travail sur l'algèbre $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ [**7**].

Cette algèbre est la limite inductive topologique des algèbres de groupe $C_\infty[\Gamma_n]$ où Γ_n est le groupe cyclique d'ordre p^n. Nous savons que l'algèbre de Gelfand, $\mathscr{G}(\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty))$ est l'algèbre $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty)$ des fonctions continues sur l'anneau des entiers p-adiques, le noyau de $\mathscr{G}$ est le radical $\mathfrak{R}_\infty$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$, il est non nul, le nilradical $\mathfrak{N}_\infty$ est dense dans $\mathfrak{R}_\infty$. De plus $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)/\mathfrak{R}_\infty$ est isomorphe et isométrique à $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty)$. On en déduit alors les mêmes résultats pour l'algèbre $C_\infty \hat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p} C_\infty$ parce que celle-ci est facteur direct de l'algèbre $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$. Ces propriétés se transfèrent assez facilement aux algèbres $L \hat{\otimes}_R M$ lorsque $C_\infty \subset L$ et $C_\infty \subset M$.

En revanche, la propriété, le nilradical est dense dans le radical, ne se transmet pas "naturellement" aux sous-algèbres. C'est pourquoi on a exhibé au paragraphe 6.1 une famille dense dans $\mathfrak{R}_\infty$ d'éléments nilpotents définis par des "conditions linéaires", ces conditions étant stables vis-à-vis des opérateurs "traces" on peut alors prouver, au paragraphe 6.4.1 l'existence d'une famille de nilpotents dense dans le radical de $L \hat{\otimes}_R M$.

Enfin au paragraphe 7 on applique ces résultats pour montrer que la catégorie des $\hat{R}$-algèbres de Banach dont le spectre est compact, dont la

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

transformation de Gelfand est un morphisme strict et qui satisfont une condition supplémentaire ((iii) du Théorème 16), est stable par produit tensoriel topologique.

Ainsi donc cette étude est une conséquence essentiellement de deux résultats sur les corps valués:

l'un sur l'algèbre $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ [7] ou peut-être plus simplement un résultat sur la nature topologique de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique totalement ramifiée, C_∞ de Q_p;

l'autre sur la différente dans les extensions infinies ou plus simplement l'étude de la différente $\mathfrak{D}_{LM/L}$ en fonction de $\mathfrak{D}_{L/R}$ et $\mathfrak{D}_{M/R}$. Le résultat étonnant de cette étude, dont nous ne percevons pas l'interprétation arithmétique, est que le nilradical de $L \hat{\otimes}_R M$ est dense dans le radical de $L \hat{\otimes}_R M$.

1. Réduction aux extensions algébriques. Soient K un corps local, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K et $\hat{\bar{K}}$ le complété de $\bar{K}$ pour la valeur absolue. Soient $K \subset R \subset L, K \subset R \subset M$ des sous-corps de $\hat{\bar{K}}$. Soit t la semi-norme tensorielle sur la R-algèbre produit tensoriel $L \otimes_R M$, elle coïncide avec la valeur absolue sur $L \otimes_R R$ et $R \otimes_R M$. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il suffit d'étudier le cas où R, L et M sont des extensions algébriques de K traces sur $\bar{K}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{K}}$. Au paragraphe 1.1 on étudie la semi-norme tensorielle sur $E \otimes_R F$ lorsque E et F sont deux R-espaces vectoriels normés et R un corps valué. Au paragraphe 1.2 on considère la semi norme tensorielle sur $L \otimes_R M$ lorsque R, L, M sont trois sous-corps de $\hat{\bar{K}}$ contenant K.

1.1. *La semi-norme tensorielle sur* $E \otimes_R F$. Dans ce paragraphe R désigne un corps valué, E et F deux R-espaces normés, $\|\,.\,\|_E$ (resp. $\|\,.\,\|_F$) la norme sur E (resp. F).

1.1.1. *Semi-norme tensorielle et c-bases sur* $E \otimes_R F$.

Définition 1. On appelle *semi-norme tensorielle* sur $E \otimes_R F$ la semi-norme t définie de la façon suivante.

Soit $z \in E \otimes_R F$, alors z s'écrit sous la forme

$$(1) \qquad z = \sum_i e_i \otimes f_i$$

où $e_i \in E$ et $f_i \in F$, on pose:

$$t(z) = \inf \sup_i \|e_i\|_E \|f_i\|_F$$

où l' "inf" est pris sur toutes les décompositions de z sous la forme (1).

Convention de notation. Soit $N_t = \{z \in E \otimes_R F | t(z) = 0\}$, on note $(E \otimes_R F)^t$ le *séparé-complété* de $E \otimes_R F$, c'est le R-espace complété du R-espace normé, $E \otimes_R F/N_t$ pour la norme induite par t.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Si E est un R-espace vectoriel normé, $\| \, . \, \|_E$ sa norme, on notera $\hat{E}$ ou $E^\wedge$ le complété de E pour $\| \, . \, \|_E$. Le $\hat{R}$-espace vectoriel $\hat{E} \otimes_{\hat{R}} \hat{F}$ désigne le $\hat{R}$-espace vectoriel produit tensoriel des $\hat{R}$-espaces vectoriels $\hat{E}$ et $\hat{F}$.

Définition 2. Soient R un corps valué, E un R-espace normé de dimension n, $\| \, . \, \|$ sa norme. Soit $0 < c \leqq 1$, on dit qu'une base $e_1, \ldots, e_n$ de E sur R est *une c-base de E sur R* si pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in R$ on a:

$$c \sup_i |\lambda_i| \, \|e_i\| \leqq \left\| \sum_i \lambda_i e_i \right\| \leqq \sup_i |\lambda_i| \, \|e_i\|.$$

On a le lemme suivant de continuité des c-bases.

LEMME 1. *Soient R un corps valué, E un R-espace normé de dimension n, $\| \, . \, \|_E$ sa norme. Soient $0 < c \leqq 1$ et $e_1, \ldots, e_n$ une c-base de E sur R. Soient $e_1', \ldots, e_n'$, n éléments de E tels que $\|e_i - e_i'\|_E < c$, alors $e_1', \ldots, e_n'$ est une c-base de E sur R.*

Nous ne donnons pas la démonstration de ce lemme, elle est immédiate. L'existence de c-base est assurée par la proposition suivante:

PROPOSITION 1. ([**12**], p. 50) *Soient R un corps valué complet, E un R-espace normé de dimension n, $\| \, . \, \|_E$ sa norme. Soit $0 < c < 1$, alors E admet une c-base sur R. De plus si la valuation de R est discrète, on peut prendre $c = 1$.*

On en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soient R un corps valué complet, E, F deux R-espaces normés, $\| \, . \, \|_E$ et $\| \, . \, \|_F$ leurs normes respectives. On a les propriétés suivantes:*

i) *Si $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ est une c-base de E', sous-espace de E sur R de dimension finie, alors tout élément z de $E' \otimes_R F$ s'écrit sous la forme:*

$$z = \sum_i e_i \otimes f_i \quad \textit{où} \quad f_i \in F$$

et de plus si t désigne la semi-norme tensorielle sur $E' \otimes_R F$, alors:

$$c \max{}_i \|e_i\|_E \|f_i\|_F \leqq t(z) \leqq \max{}_i \|e_i\|_E \|f_i\|_F.$$

ii) *Si $E' \subset E$ est un sous-espace de E, la semi-norme tensorielle sur $E' \otimes_R F$ est la restriction à $E' \otimes_R F$ de la semi-norme tensorielle sur $E \otimes_R F$.*

iii) *La semi-norme tensorielle sur $E \otimes_R F$ est une norme.*

Pour la démonstration, voir par exemple [**9**] Gruson, Théorie de Fredholm p-adique.

1.1.2. *Réduction aux espaces vectoriels normés complets.* On conserve les notations des paragraphes précédents.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 3. *Soient R un corps valué, E, F, deux R-espaces normés, $\hat{R}$, $\hat{E}$, $\hat{F}$ les complétés respectifs. Soient t la semi-norme tensorielle sur $E \otimes_R F$ et $\hat{t}$ la norme tensorielle sur $\hat{E} \otimes_{\hat{R}} \hat{F}$. Si ρ désigne l'homomorphisme canonique défini par $\rho(e \otimes_R f) = e \otimes_{\hat{R}} f$, on a la relation:*

$$(2) \qquad t = \hat{t} \circ \rho.$$

Preuve. Il est clair que l'on a

$$(3) \qquad \hat{t} \circ \rho \leqq t.$$

Pour montrer l'autre inégalité, on peut supposer que E est un R-espace de dimension finie. Soit $(e_i)_{1 \leqq i \leqq r}$ une c-base $(0 < c < 1)$ de $\hat{E}$ sur $\hat{R}$. D'après le Lemme 1 (§ 1.1.1) de continuité des c-bases on peut supposer que $e_i \in E$. Complétons ces éléments R-indépendants en une base $(e_i)_{1 \leqq i \leqq s}$ de E sur R.

Pour $\nu > r$

$$e_\nu = \sum_{1 \leqq i \leqq r} \lambda_{\nu,i} e_i \quad \text{où} \quad \lambda_{\nu,i} \in \hat{R}.$$

Soient $\epsilon > 0$ et $\lambda'_{\nu,i} \in R$ tels que

$$|\lambda_{\nu,i} - \lambda'_{\nu,i}| < \epsilon.$$

Soit z un élément de $E \otimes_R F$

$$(4) \qquad z = \sum_{1 \leqq i \leqq s} e_i \otimes_R f_i = \sum_{1 \leqq i \leqq r} e_i \otimes_R \left(f_i + \sum_{\nu > r} \lambda_{\nu,i} f_\nu\right).$$

Considérons $z' \in E \otimes_R F$

$$(5) \qquad z' = \sum_{1 \leqq i \leqq r} e_i \otimes_R \left(f_i + \sum_{\nu > r} \lambda'_{\nu,i} f_\nu\right)$$

z' vérifie la double inégalité

$$(6) \qquad ct(z') \leqq \hat{t} \circ \rho(z') \leqq t(z').$$

En effet, l'écriture (5) de z' montre que:

$$t(z') \leqq \max_i \|e_i\|_E \left\| f_i + \sum_{\nu > r} \lambda'_{\nu,i} f_\nu \right\|_F.$$

Comme la famille $(e_i)_{1 \leqq i \leqq r}$ forme une c-base de $\hat{E}$ sur $\hat{R}$, on déduit de i) Proposition 2 (§ 1.1.1) que

$$c \max_i \|e_i\|_E \left\| f_i + \sum_{\nu > r} \lambda'_{\nu,i} f_\nu \right\|_F \leqq t \circ \rho(z'),$$

d'où:

$$ct(z') \leqq t \circ \rho(z').$$

L'autre inégalité est (3) pour z'.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Les relations (4) et (5) permettent d'écrire:

$$z - z' = \sum_{r+1 \leqq \nu \leqq s} \left(e_\nu - \sum_{1 \leqq i \leqq r} \lambda'_{\nu,i} e_i \right) \otimes_R f_\nu$$

et

$$\left\| e_\nu - \sum_{1 \leqq i \leqq r} \lambda'_{\nu,i} e_i \right\| = \left\| \sum_{1 \leqq i \leqq r} (\lambda_{\nu,i} - \lambda'_{\nu,i}) e_i \right\| \leqq \epsilon \max_{1 \leqq i \leqq r} \|e_i\|$$

d'où

(7) $\quad t(z - z') \leqq \epsilon \max_{1 \leqq i \leqq r} \|e_i\|_E \max_{r<\nu} \|f_\nu\|_F$

et d'après la linéarité de ρ et (3)

(8) $\quad \hat{t}(\rho(z) - \rho(z')) \leqq t(z - z')$.

Deux cas peuvent se présenter:

Premier cas. Si $\rho(z) \neq 0$:
On choisit

$$\epsilon < \frac{\hat{t} \circ \rho(z)}{\max_{1 \leqq i \leqq r} \|e_i\|_E \max_{r<\nu} \|f_\nu\|_F}.$$

Il suit de (7), (8) et du choix de ϵ que

$$t(z - z') < \hat{t} \circ \rho(z) \leqq t(z)$$

ce qui montre que

$$t(z) = t(z')$$

et

$$\hat{t}(\rho(z) - \rho(z')) < \hat{t} \circ \rho(z)$$

ce qui montre que

$$\hat{t} \circ \rho(z) = \hat{t} \circ \rho(z')$$

ceci joint à la double inégalité (6) on obtient:

(9) $\quad ct(z) \leqq \hat{t} \circ \rho(z) \leqq t(z)$

et (9) est vérifiée pour $0 < c < 1$, d'où l'égalité (2) cherchée.

Deuxième cas. $\rho(z) = 0$:
De (6), (7), (8) on tire:

$$t(z') \leqq \frac{1}{c} \hat{t} \circ \rho(z') \leqq \frac{\epsilon}{c} \max_{1 \leqq i \leqq r} \|e_i\|_E \max_{r<\nu} \|f_\nu\|_F$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

et ceci joint à (7) montre que:

$$t(z) \leqq \frac{\epsilon}{C} \max_{1 \leqq i \leqq r} \|e_i\|_E \max_{r<\nu} \|f_\nu\|_F$$

par suite $t(z) = 0$, ce qui montre encore (2).

Remarque. L'égalité $\hat{t} \circ \rho = t$ montre que l'on a $\ker \rho = N_t$.

1.2. *Les semi-normes sur* $L \otimes_R M$.

1.2.1. *Corps locaux.*

Définition 3. On appelle *corps local* un corps valué complet pour une valuation discrète et à corps résiduel parfait. Désormais K désigne un corps local et on note $|\ .\ |$ une valeur absolue.

Si la caractéristique de K est p non nulle, on sait ([**17**], p. 43) que K est un corps de séries formelles $k_K((T))$, où k_K est le corps résiduel de K et T une uniformisante. Soit $n \in \mathbf{N}$, on note K_n le corps local $K^{p^{-n}} = k_K((T^{p^{-n}}))$ et $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n$, c'est la clôture radicielle $K^{p^{-\infty}}$ de K. Puisqu'une extension finie d'un corps local est un corps local on a la proposition suivante:

PROPOSITION 4. ([**10**]). *Soient K un corps local de caractéristique p non nulle, et R une extension algébrique de K; alors les extensions radicielles de R (resp. de l'adhérence $\hat{R}$ de R) sont les corps RK_n ou RK_∞ (resp. $\hat{R}K_n$ ou $\hat{R}K_\infty$).*

Le théorème suivant caractérise les sous-corps fermés du complété $\hat{\bar{K}}$ de la clôture algébrique $\bar{K}$ de K qui contiennent K.

THÉORÈME 1 ([**10**] et [**7**]). *Soient K un corps local, $\bar{K}$ la clôture algébrique de K, $\hat{\bar{K}}$ le complété de $\bar{K}$. Soit F un sous-corps fermé de $\hat{\bar{K}}$ tel que $K \subset F$. Alors:*

$$F = (F \cap \bar{K})\hat{}.$$

De plus, si K est de caractéristique nulle, l'application $F \mapsto F \cap \bar{K}$ est une bijection des sous-corps fermés de $\hat{\bar{K}}$ contenant K sur les extensions algébriques de K. Et si K est de caractéristique p non nulle, si R désigne une extension algébrique de K et $\hat{R}$ le complété de R, alors le corps $\hat{R} \cap \bar{K}$ est soit R, soit la clôture radicielle $R^{p^{-\infty}} = RK_\infty$ de R.

Le Théorème 1 et la Proposition 4 permettent de démontrer le lemme suivant:

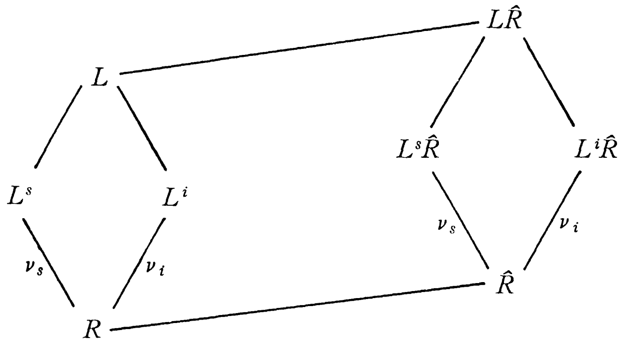
LEMME 2. *Soient K un corps local, R une extension algébrique de K, $\hat{R}$ son complété, L une extension algébrique de R telle que $L \cap \hat{R} = R$. Alors L et $\hat{R}$ sont linéairement disjoints sur R. Soit c réel, $0 < c < 1$, si $L \cap \hat{R} = R$ et si L est de dimension finie sur R, alors L admet une c-base sur R.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Preuve. On peut supposer que L est une extension algébrique finie de R puisque la linéaire disjonction est une propriété de type fini. Soit donc L une extension finie de R; supposons la séparable. Soit alors $\bar{L}$ sa clôture galoisienne sur R. Le Théorème 1 montre que $\bar{K} \cap \hat{R}$ est une extension purement inséparable de R et donc $\bar{L} \cap \hat{R} = R$ et le Théorème 1 de [**4**] montre que $\bar{L}$ et $\hat{R}$ sont linéairement disjointes sur $\bar{L} \cap \hat{R} = R$, il en est a fortiori de même pour L et $\hat{R}$.

Soit maintenant L supposée purement inséparable sur R. La Proposition 4 montre que $L = R^{p^{-n}}$ et il existe x élément de L tel que $L = R(x)$ et $[L : R] = p^n$ avec $x^{p^n} \in R$. Mais $L\hat{R} = \hat{R}(x)$. Supposons que $x^{p^{n-1}} \in \hat{R}$, par hypothèse $x^{p^{n-1}} \in L \cap \hat{R} = R$, d'où la contradiction. Par conséquent $[\hat{R}(x) : \hat{R}] = p^n$ et donc L et $\hat{R}$ sont linéairement disjointes sur R.

Dans le cas général, soit L^s l'extension séparable maximale de R dans L, L^i l'extension purement inséparable maximale de R dans L.



Soit $\nu_s = [L^s : R]$, $\nu_i = [L^i : R]$. Les deux premiers cas de la démonstration montrent que $[L^s\hat{R} : \hat{R}] = \nu_s$ et $[L^i\hat{R} : \hat{R}] = \nu_i$. Mais les extensions algébriques $L^s\hat{R}$ et $L^i\hat{R}$ de $\hat{R}$ sont linéairement disjointes puisque $L^s\hat{R}$ est une extension séparable et $L^i\hat{R}$ est purement inséparable sur $\hat{R}$ ([**4**]) et donc $[L\hat{R} : \hat{R}] \geqq \nu_i\nu_s$. On déduit facilement, grâce à la Proposition 4, que $L = L^sL^i$ et donc $[L : R] = \nu_i\nu_s$, par suite $[L\hat{R} : \hat{R}] = [L : R]$. Supposons maintenant que $n = [L\hat{R} : \hat{R}] = [L : R]$. D'après la Proposition 1 et le Lemme 1, il existe une c-base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $L\hat{R}$ sur $\hat{R}$ telle que $e_i \in L$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Ainsi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une c-base de L sur R ce qui montre le Lemme 2.

1.2.2. *Réduction aux extensions algébriques.*

PROPOSITION 5. *Soient R, L, M des extensions algébriques du corps local K, $R \subset L$, $R \subset M$ qui sont traces sur $\bar{K}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{K}}$. On a les propriétés suivantes:*

i) *L'homomorphisme canonique ρ de $L \otimes_R M$ dans $\hat{L} \otimes_{\hat{R}} \hat{M}$ est injectif;*

ii) *La semi-norme tensorielle t sur $L \otimes_R M$ est une norme;*

iii) *L'homomorphisme ρ définit par complétion un isomorphisme isométrique entre $(L \otimes_{\hat{R}} M)^t$ et $(\hat{L} \otimes_{\hat{R}} \hat{M})^t$.*

Preuve. Puisque R est la trace sur $\bar{K}$ d'un sous-corps fermé de $\hat{\bar{K}}$, on a $L \cap \hat{R} = R$ d'après le Théorème 1 (§ 1.2.1). Le Lemme 2 (§ 1.2.1) montre alors que si $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ sont n éléments de L, R-indépendants, ils sont $\hat{R}$-indépendants; d'où la propriété i). Les propriétés ii) et iii) s'en déduisent immédiatement avec la Proposition 3 (§ 1.1.2).

Convention de notation. Nous nous plaçons désormais dans la situation où R, L, M sont traces sur $\bar{K}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{K}}$.

Nous noterons désormais $L \hat{\otimes}_R M$ l'algèbre normée, complétée de $L \otimes_R M$ pour la norme tensorielle. Cette norme sera notée $\|\cdot\|$.

2. La transformation de Gelfand. Nous allons ici définir la transformation de Gelfand d'une $\hat{R}$-algèbre de Banach et décrire plus précisément le spectre, le noyau de la transformation de Gelfand et la semi-norme spectrale dans le cas de la $\hat{R}$-algèbre $L \hat{\otimes}_R M$.

2.1. *Définitions.* Soient R une extension algébrique d'un corps local, $\bar{R}$ sa clôture algébrique, $\hat{R}$ et $\hat{\bar{R}}$ les complétés respectifs. Soit A une $\hat{R}$-algèbre de Banach unitaire on appelle *spectre* de A et on le note $X(A)$ (ou X) l'ensemble des $\hat{R}$-homomorphismes continus de A dans $\hat{\bar{R}}$. On munit X de la topologie de la convergence simple.

Le groupe compact G des $\hat{R}$-automorphismes continus de $\hat{\bar{R}}$ (qui est le groupe des R-automorphismes de $\bar{R}$) opère *continuement* sur $X(A)$ par $(g, x) \mapsto g \circ x$.

La transformation de Gelfand de A est le $\hat{R}$-homomorphisme $\mathscr{G}$ de A dans l'algèbre $\mathscr{C}_b(X, \hat{\bar{R}})$ des fonctions continues et bornées de X dans $\hat{\bar{R}}$ défini par:

$$\mathscr{G}(a)(x) = x(a), \text{ pour tout } a \in A \text{ et } x \in X(A).$$

L'algèbre $\mathscr{C}_b(X, \hat{\bar{R}})$ étant normée par la norme de la convergence uniforme sur X on a

$$\|\mathscr{G}(a)\| \leqq \|a\| \text{ pour tout } a \in A.$$

La démonstration en est classique. Soient $0 \neq \pi \in R$, $|\pi| < 1$ et $0 \neq a \in A$. Soit n un entier, alors il existe un entier s tel que:

$$|\pi|^{(s+1)/n} \leqq \|a\| < |\pi|^{s/n}, \text{ ainsi on a } \|a^n\| < |\pi^s| \text{ et } \|\pi^{-s}a^n\| < 1.$$

Comme $\lim_{r \to \infty} \|(\pi^{-s}a^n)^r\| = 0$ il s'ensuit que

$$\lim_{r \to \infty} x((\pi^{-s}a^n)^r) = 0,$$

donc que $|x(\pi^{-s}a^n)| < 1$. L'entier n étant arbitraire il en résulte que

$$|x(a)| \leqq \|a\|.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Ainsi la transformation de Gelfand $\mathscr{G}$ est un homomorphisme continu de norme 1. En plus on a:

$$\mathscr{G}(A) \subset \{f \in \mathscr{C}_b(X, \hat{\bar{R}}) | f(gx) = f(x)^g, \text{ pour tout } g \in G\}.$$

2.2. *L'algèbre* $L \hat{\otimes}_R M$. Dans tout ce paragraphe 2.2, R, L, M sont trois extensions algébriques, traces sur $\bar{R}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{R}}$ avec $R \subset L$ et $R \subset M$.

Il est facile de vérifier que le spectre $X = X(L \otimes_R M)$ est homéomorphe à l'espace compact $G/H_1 \times G/H_2$ où G est le groupe des R-automorphismes de $\bar{R}$, H_1 le sous-groupe des L-automorphismes de $\bar{R}$ et H_2 le sous-groupe des M-automorphismes de $\bar{R}$. Enfin G/H_i est l'ensemble (compact) des classes à gauche modulo H_i.

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
L \hat{\otimes}_R M \arrow[r, "\mathscr{G}"] & \mathscr{C}(X, \hat{\bar{R}}) \\
L \otimes_R M \arrow[r, "\mathscr{G}'"] \arrow[u, hook] & \mathrm{Loc}\,(X, \bar{R}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les injections canoniques, $\mathscr{G}'$ est la restriction à $L \otimes_R M$ de la transformation de Gelfand $\mathscr{G}$, et Loc $(X, \bar{R})$ désigne l'algèbre des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans $\bar{R}$.

PROPOSITION 6. *Soient R, L, M trois extensions algébriques d'un corps local traces sur $\bar{R}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{R}}$ et telles que $R \subset L$, $R \subset M$. Soient X le spectre de $L \hat{\otimes}_R M$, $\mathscr{G}$ la transformation de Gelfand de $L \hat{\otimes}_R M$ et G le groupe des R-automorphismes de la clôture algébrique $\bar{R}$ de R.*

$$\mathscr{G}(L \otimes_R M) = \left\{ f \in \mathrm{Loc}\,(X, \bar{R}) \left| \begin{array}{l} f(gx) = f(x)^g \textit{ pour tout } x \in X \textit{ et } g \in G \\ f(x) \in L^{g_1} M^{g_2} \textit{ pour tout } x = (g_1, g_2) \in X \end{array} \right. \right\}.$$

Preuve. On se ramène au cas où L et M sont de dimension finie sur R et où G est le groupe des R-automorphismes d'une extension normale et finie sur R contenant L et M. Soient $g_1 \in G$ et $f \in$ Loc $(X, \bar{R})$ définie par

$$f(g, gg_1) = 1 \text{ pour tout } g \in G$$
$$f(g', g'') = 0 \text{ si } (g', g'') \notin \{(g, gg_1) | g \in G\}.$$

Il s'agit de montrer que $f \in$ Im $(\mathscr{G})$.

Soient M^s l'extension séparable maximale de R contenue dans M, $e_1, e_2, \ldots, e_t$ une base de M^s sur R. Soient $r = [(M^s)^{g_1} L : L]$, $g_1, g_2, \ldots, g_r \in G$ tels que $(g_i \circ g_1^{-1})_{1 \leqq i \leqq r}$ soient les r L-homomorphismes de $(M^s)^{g_1}.L$ dans $\bar{R}$. Soient alors $g_1, g_2, \ldots, g_r, g_{r+1}, \ldots, g_t$ les R-homomorphismes

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

de M^s dans $\bar{R}$. Résolvons le système suivant où $l_1, l_2, \ldots, l_t$ sont les inconnues:

$$\begin{aligned}
1 &= l_1e_1^{g_1} + l_2e_2^{g_1} + \ldots + l_te_t^{g_1}\\
1 &= l_1e_1^{g_2} + l_2e_2^{g_2} + \ldots + l_te_t^{g_2}\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
1 &= l_1e_1^{g_r} + l_2e_2^{g_r} + \ldots + l_te_t^{g_r}\\
0 &= l_1e_1^{g_{r+1}} + l_2e_2^{g_{r+1}} + \ldots + l_te_t^{g_{r+1}}\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
0 &= l_1e_1^{g_t} + l_2e_2^{g_t} + \ldots + l_te_t^{g_t}.
\end{aligned}$$

Soit $\{e_1^*, e_1^*, \ldots, e_t^*\}$ la base duale de $\{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$ par rapport à la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{Tr}_{LM^s|L}(xy)$. On a donc:

$$l_i = e_i^{*g_1} + e_i^{*g_2} + \ldots + e_i^{*g_r} = \mathrm{Tr}_{L(M^s)^{g_1}|L}(e_i^{*g_1}) \in L.$$

Ainsi

$$l_1 \otimes e_1 + l_2 \otimes e_2 + \ldots + l_t \otimes e_t \in L \bigotimes_R M.$$

Il est alors facile de vérifier que

$$f = \mathscr{G}\left(\sum_{t=1}^{t} l_t \otimes e_t\right).$$

Il est alors facile de montrer la Proposition 6.

Remarque 1. L'un des résultats fondamentaux de ce travail sera de montrer que:

$$\mathscr{G}(L \hat{\bigotimes}_R M) = \left\{ f \in \mathscr{C}(X, \hat{\bar{R}}) \,\middle|\, \begin{array}{l} f(gx) = f(x)^g \text{ pour tout } x \in X \text{ et } g \in G \\ f(g_1, g_2) \in (L^{g_1}M^{g_2})\hat{}\ \text{pour tout } x = (g_1, g_2) \in X \end{array} \right\}.$$

Remarque 2. Si R est de caractéristique nulle on a

$$\mathscr{G}(L \bigotimes_R M) = \{f \in \mathrm{Loc}\,(X, \bar{R}) | f(gx) = f(x)^g \text{ pour tout } x \in X \text{ et } g \in G\}.$$

THÉORÈME 2. *Soient R, L, M trois extensions algébriques d'un corps local, traces sur $\bar{R}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{R}}$ avec $R \subset L$ et $R \subset M$. Alors*

i) *tout idéal premier de $L \bigotimes_R M$ est maximal*

ii) *le noyau de la transformation de Gelfand de $L \hat{\otimes}_R M$ est le radical $\mathfrak{R}(L \hat{\bigotimes}_R M)$ de $L \hat{\bigotimes}_R M$.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Pour montrer i) on se ramène au cas où L et M sont finis sur R et alors un idéal premier d'une algèbre de dimension finie sur un corps est maximal.

Montrons ii). Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $L \hat{\otimes}_R M$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap (L \otimes_R M)$ qui est maximal d'après i). On a alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
L \otimes_R M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "s'"'] & L \hat{\otimes}_R M \arrow[d, "s"] \\
\dfrac{L \otimes_R M}{\mathfrak{m}} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, hook, "u'"] & \dfrac{L \hat{\otimes}_R M}{\mathfrak{M}} \\
& \hat{\bar{R}}
\end{tikzcd}$$

où i, j sont les injections canoniques, s, s' les surjections canoniques et comme $L \otimes_R M/\mathfrak{m}$ est un corps algébrique sur R il existe un homomorphisme injectif u' de $L \otimes M/\mathfrak{m}$ dans $\bar{R}$.

La norme tensorielle induit sur $L \hat{\otimes}_R M/\mathfrak{M}$ une norme de $\hat{R}$-algèbre que l'on notera $\| \ \|_1$, ce qui induit sur $u'(L \otimes_R M/\mathfrak{m})$ la norme $\alpha \mapsto \|u'^{-1}(\alpha)\|_1$. Or le lemme suivant montre que l'on a

$$|\alpha| \leqq \|u'^{-1}(\alpha)\|_1.$$

Ainsi donc u' est continu et se prolonge par continuité en un homomorphisme u de $L \hat{\otimes}_R M/\mathfrak{M}$ dans $\hat{\bar{R}}$. Il suit alors que $u \circ s$ est un homomorphisme continu de $L \hat{\otimes}_R M$ dans $\hat{\bar{R}}$ donc que $u \circ s \in X$, le spectre de $L \hat{\otimes}_R M$ et comme on a $\mathfrak{M} = \ker (u \circ s)$ il suit que $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M) = \ker \mathscr{G}$, le noyau de la transformation de Gelfand.

LEMME 3. *Soit K un corps local, M une extension algébrique de K; $|\cdot|$ la valeur absolue de M prolongeant celle de K. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur la K-algèbre M. Alors on a $|\alpha| \leqq \|\alpha\|$ pour tout $\alpha \in M$.*

Preuve. On se ramène au cas où M est de dimension finie sur K, comme toutes les normes sont équivalentes sur M (à cause de la dimension finie). Il existe une constante c telle que

$$|\alpha| < c\|\alpha\| \text{ pour tout } \alpha \in M.$$

Il suit que

$$|\alpha^n| < c\|\alpha^n\|, \text{ pour tout } n \geqq 1, \text{ donc}$$
$$|\alpha| \leqq c^{1/n}\|\alpha\|,$$

ce qui prouve le lemme.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

2.3. *La semi-norme spectrale.* Les corps R, L, M satisfont toujours les conditions du paragraphe 2.2.

Définition 4. Soient $a \in L \hat{\otimes}_R M$, $\|\cdot\|$ la norme tensorielle sur $L \hat{\otimes}_R M$, alors la suite $\|a^n\|^{1/n}$ est convergente ([**6**]). Soit

$$s(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Alors s est une semi-norme potentiellement multiplicative appelée la *semi-norme spectrale.*

PROPOSITION 7. *Soient toujours R, L, M trois corps satisfaisant les hypothèses du paragraphes 2.2, $\mathscr{G}$ la transformation de Gelfand de $L \hat{\otimes}_R M$ et s la semi-norme spectrale de $L \hat{\otimes}_R M$. Alors on a*

$$s(a) = \|\mathscr{G}(a)\| \text{ pour tout } a \in L \hat{\otimes}_R M,$$

où $\|\mathscr{G}(a)\|$ est la norme de $\mathscr{G}(a)$ dans l'algèbre $\mathscr{C}(X, \hat{\hat{R}})$.

Preuve. Clairement on a:

$$\|\mathscr{G}(a)\| \leqq s(a) \leqq \|a\| \text{ pour tout } a \in L \hat{\otimes}_R M.$$

Il suffit de montrer que $\|\mathscr{G}(a)\| = s(a)$ pour tout $a \in L \otimes M$. Si $\mathscr{G}(a) = 0$ alors a est nilpotent (théorème 2, i) et alors $s(a) = 0$. L'élément a s'écrit sous la forme:

$$a = \sum l_i \otimes m_i.$$

Soit φ l'homomorphisme canonique de $K[l_i]_i \otimes_K K[m_i]_i$ dans $L \otimes_R M$. Alors $s \circ \varphi$ et $\|\mathscr{G} \circ \varphi(.)\|$ sont deux semi-normes sur $K[l_i]_i \otimes_K K[m_i]_i$ ayant même noyau. Ces semi-normes sont donc équivalentes, ainsi il existe une constante $c > 0$ telle que

$$cs(a^n) \leqq \|\mathscr{G}(a^n)\| \leqq s(a^n), \text{ pour tout } n \geqq 1.$$

Comme $s(a^n) = s(a)^n$ et $\mathscr{G}(a^n) = \mathscr{G}(a)^n$, on a

$$\|\mathscr{G}(a)\| = s(a) \text{ pour tout } a \in L \otimes_R M.$$

3. La différente dans les extensions infinies. Le but de ce paragraphe est de définir la différente pour des extensions algébriques séparables de degré infini. Celle-ci permet, au paragraphe 4, de comparer la norme spectrale et la norme tensorielle. Il est ensuite montré un théorème important (Théorème 3) sur la différente d'une extension LM de L lorsque $\mathfrak{D}_{L/R} = (0)$. Ce théorème qui est une généralisation d'un théorème de Tate [**19**] est essentiel pour démontrer des propriétés de transfert.

3.1. *Définitions.* Si L est un corps valué, O_L désigne toujours l'anneau de valuation de L, $\mathfrak{M}_L$ l'idéal de valuation de O_L.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Définition 5. Soit K un corps local, R une extension algébrique de K et L une extension algébrique séparable de degré fini de R. On appelle *différente* de L sur R ([**17**], ch. III, § 3) l'idéal $\mathfrak{D}_{L/R}$ de O_L dont l'inverse $\mathfrak{D}_{L/R}^{-1}$ est ainsi défini:

$$\mathfrak{D}_{L/R}^{-1} = \{x \in L | \mathrm{Tr}_{L/R}(xO_L) \subset O_R\}$$

où $\mathrm{Tr}_{L/R}$ désigne la trace de L sur R.

Cette différente peut s'exprimer à partir d'extensions de degré fini de K.

PROPOSITION 8. *Soit K un corps local, R une extension algébrique de K et L une extension algébrique séparable de degré fini de R. Soient R_0 une extension de degré fini de K et L' une extension séparable de degré fini de R_0 telles que $R_0 \subset R$ et $RL' = L$. Alors:*

$$\mathfrak{D}_{L/R} = \bigcup_i \mathfrak{D}_{L'R_i/R_i}$$

oú la réunion est prise sur tous les corps R_i tels que

$$R_0 \subset R_i \subset R \text{ et } [R_i : R_0] < \infty$$

(il y a confusion entre l'idéal $\mathfrak{D}_{L'R_i/R_i}$ de $O_{L'R_i}$ et celui qu'il engendre dans O_L).

Preuve. Immédiate.

Définition 6. Soit K un corps local, R une extension algébrique de K et L une extension algébrique séparable de R. On appelle *différente* de L sur R, l'idéal $\mathfrak{D}_{L/R}$ de O_L défini par

$$\mathfrak{D}_{L/R} = \bigcap_i \mathfrak{D}_{L_i/R}$$

où l'intersection est prise sur tous les corps L_i tels que

$$R \subset L_i \subset L \quad \text{et} \quad [L_i : R] < \infty$$

(il y a confusion entre l'idéal $\mathfrak{D}_{L_i/R}$ de O_{L_i} et celui qu'il engendre dans O_L). Nous appelons valeur absolue de $\mathfrak{D}_{L/R}$ le nombre réel, noté $|\mathfrak{D}_{L/R}|$ et défini par

$$|\mathfrak{D}_{L/R}| = \sup_{x \in \mathfrak{D}_{L/R}} |x|.$$

3.2. *Extensions de corps de différente nulle en caractéristique nulle.* Le but de ce paragraphe est de démontrer un résultat essentiel qui est le suivant: soient K un corps local de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p > 0$, R, L, M des extensions algébriques de K telles que $R \subset L \subset M$, $\mathfrak{D}_{L/R} = (0)$; alors $|\mathfrak{D}_{M/L}| = 1$. La démonstration se fera en deux étapes, d'abord le cas où M est cyclique de degré p, c'est 3.2.1 et ensuite le cas général en 3.2.2.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

3.2.1. *Le cas cyclique de degré p.* Il s'agit de démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 9. *Soient K un corps local de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p > 0$, R une extension algébrique de degré fini de K, L une extension algébrique de degré fini de R contenant les racines p-ièmes de 1 et M une extension cyclique de L définie par adjonction d'une racine du polynôme $X^p - a \in R[X]$ avec $|a| = 1$. Soit $\alpha \geqq 2$ un entier tel que*

$$|\mathfrak{D}_{L/R}| \leqq |p|^{2\alpha},$$

alors

$$|\mathfrak{D}_{M/L}| > |p|^{u_\alpha} \quad où \quad u_\alpha = \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Cette proposition sera la conséquence de quelques lemmes préliminaires. Pour des raisons de commodités nous utiliserons la valuation notée v au lieu de la valeur absolue.

LEMME 4. *Les hypothèses sont celles de la Proposition 9. Alors pour tout $x \in L$ on a:*

$$v(x^p - a) \leqq \frac{p}{p-1} v(p).$$

Preuve. On peut supposer que $v(x) = 0$. Puisque le polynôme $X^p - a$ est irréductible sur L, il en est de même du polynôme

$$(Y + x)^p - a = Y^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} Y^{p-i} x^i + x^p - a.$$

Si y est racine, on a donc:

$$v(y) = \frac{1}{p} v(x^p - a).$$

Si $v(y) = 0$, le lemme est trivialement vérifié, supposons $v(y) > 0$. Comme

$$v(pyx^{p-1}) < v\left(\binom{p}{i} y^{p-i} x^i\right)$$

pour $i = 1, 2, \ldots, p - 2$, on a:

$$v(pyx^{p-1}) \geqq v(y^p) = v(x^p - a)$$

ce qui prouve que:

$$v(x^p - a) \leqq \frac{p}{p-1} v(p).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

LEMME 5. *Les hypothèses sont celles de la Proposition* 9. *En plus, soient* $\beta \geqq 2$ *un entier et* $x \in L$ *tels que*

$$(15) \quad v(x^p - a) \geqq \left(\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p^{\beta-1}(p-1)}\right)v(p)$$

alors

$$v(\mathfrak{D}_{M/L}) \leqq \frac{1}{p^{\beta-1}} v(p).$$

Preuve. Soit $\rho \in L$ tel que $v(\rho) = v(x^p - a) - v(p)$, par exemple $\rho = (x^p - a)/p$. Puisque $X^p - a$ est irréductible sur L, le polynôme

$$g(Y) = \rho^{-p}((\rho Y + x)^p - a)$$

l'est aussi. De plus il est unitaire et à coefficients dans l'anneau O_L (Lemme 4), alors (Corollaire 2, p. 66, [**17**])

$$v(\mathfrak{D}_{M/L}) \leqq v(g'(y))$$

où y est une racine de $g(Y)$ dans M.
Or

$$g'(y) = p\rho^{-(p-1)}(\rho y + x)^{p-1}.$$

Donc

$$v(g'(y)) = v(p) - (p-1)v(\rho) = pv(p) - (p-1)v(x^p - a) \leqq \frac{v(p)}{p^{\beta-1}}.$$

Ainsi

$$v(\mathfrak{D}_{M/L}) \leqq \frac{v(p)}{p^{\beta-1}}.$$

Ce lemme montre qu'il suffit de construire un élément $x \in L$ satisfaisant (15) ($\alpha = \beta$) pour démontrer la Proposition 9. Ceci résultera des Lemmes 6 et 7.

Soit K_0 un sous-corps local de K, non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et à même corps résiduel que K, on sait que le degré de K sur K_0 est l'indice de ramification de K sur K_0 (Théorème 4, p. 46 [**17**]). Soient I l'extension non ramifiée maximale de K_0 contenue dans L, $I' = IR$ l'extension non ramifiée maximale de R contenue dans L. Soient θ une uniformisante de L et π une uniformisante de R.

L'élément θ est racine d'un polynôme d'Eisenstein sur I' de la forme

$$h(X) = \pi(a_0 + a_1 X + \ldots + a_{\mu-1}X^{\mu-1}) + X^\mu$$

où $v(a_i) \geqq 0$ et $v(a_0) = 0$.

On a

$$v(\mathfrak{D}_{L/R}) = v(\mathfrak{D}_{L/I'}) = v(h'(\theta)).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Comme les nombres $v(ia_i\theta^{i-1}) + v(\pi)$, $1 \leqq i < \mu$ et $v(\mu\theta^{\mu-1})$ sont deux à deux distincts, on a donc, si $v(\mathfrak{D}_{L/R}) \geqq 2\alpha v(p)$

$$v(ia_i\theta^{i-1}) + v(\pi) \geqq 2\alpha v(p)$$

et

$$v(\mu\theta^{\mu-1}) \geqq 2\alpha v(p),$$

ce qui implique puisque $v(p) \geqq v(\pi) > 0$, que $v(a_i) \geqq \alpha v(p)$ pour $1 \leqq i < \mu$, $i \not\equiv 0 \bmod p^\alpha$ et $\mu \equiv 0 \bmod p^\alpha$.

On peut ainsi écrire $h(X)$ sous la forme

$$h(X) = \pi(b_0 + b_1X^{p^\alpha} + \ldots + b_{r-1}X^{(r-1)p^\alpha}) + X^{rp^\alpha} + p^\alpha R(X)$$

où $b_i \in O_{I'}$, $v(b_0) = 0$ et $R(X) \in O_{I'}[X]$.

De la même façon, θ est racine d'un polynôme d'Eisenstein sur I, de la forme

$$l(X) = p(c_0 + c_1X^{p^\alpha} + \ldots + c_{s-1}X^{(s-1)p^\alpha}) + X^{sp^\alpha} + p^\alpha S(X)$$

où $c_i \in O_I$, $v(c_0) = 0$ et $S(X) \in O_I[X]$.

Nous dirons que x et x' éléments de O_L sont congrus modulo p^α si $x - x' \in p^\alpha O_L$. Nous le noterons $x \equiv x' \bmod p^\alpha$.

LEMME 6. *Il existe des polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ à coefficients dans O_I tels que*

(16) $\quad p \equiv \theta^{sp}P(\theta^{p^\alpha}) \bmod p^\alpha$

(17) $\quad a \equiv Q(\theta^{p^\alpha}) \bmod p^\alpha$

(l'élément a est le terme constant du polynôme $X^p - a$ de la Proposition 9).

Preuve. La forme du polynôme $l(X)$ montre que

$$p(c_0 + c_1\theta^{p^\alpha} + \ldots + c_{s-1}\theta^{(s-1)p^\alpha}) \equiv -\theta^{sp^\alpha} \bmod p^\alpha.$$

Comme $v(c_0) = 0$, il existe $P(X) \in O_I[X]$ tel que

$$(c_0 + c_1\theta^{p^\alpha} + \ldots + c_{s-1}\theta^{(s-1)p^\alpha})^{-1} \equiv -P(\theta^{p^\alpha}) \bmod p^\alpha,$$

ce qui prouve la relation (16).

Afin de prouver la relation (17), montrons tout d'abord qu'il existe $Q(X) \in O_I[X]$ tel que

(18) $\quad \pi \equiv \theta^{rp^\alpha}Q(\theta^{p^\alpha}) \bmod p^\alpha.$

La forme du polynôme $h(X)$ montre qu'il existe $Q_0(X) \in O_{I'}[X]$ tel que

$$\pi \equiv \theta^{rp^\alpha}Q_0(\theta^{p^\alpha}) \bmod p^\alpha.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Le polynôme $Q_0(X)$ peut s'écrire:

$$Q_0(X) = Q_1(X) + \pi Q_2(X)$$

où $Q_1(X) \in O_I(X)$ et $Q_2(X) \in O_{I'}[X]$.

Ainsi:

$$\pi \equiv \theta^{rp^\alpha}(Q_1(\theta^{p^\alpha}) + \pi Q_2(\theta^{p^\alpha})) \bmod p^\alpha.$$

Montrons que pour tout entier $k \geqq 0$, il existe deux polynômes $Q_{1,k}(X) \in O_I[X]$ et $Q_{2,k}(X) \in O_{I'}[X]$ tels que

$$(19) \quad \pi \equiv \theta^{rp^\alpha}(Q_{1,k}(\theta^{p^\alpha}) + \pi\theta^{krp^\alpha}Q_{2,k}(\theta^{p^\alpha})) \bmod p^\alpha.$$

En effet, par récurrence, on déduit aussitôt de (19):

$$\pi \equiv \theta^{rp^\alpha}(Q_{1,k}(\theta^{p^\alpha}) + \theta^{(k+1)rp^\alpha}(Q_{1,k}(\theta^{p^\alpha}) + \pi\theta^{krp^\alpha}Q_{2,k}(\theta^{p^\alpha})) \times Q_{2,k}(\theta^{p^\alpha})) \bmod p^\alpha.$$

En écrivant:

$$Q_{2,k}(X) = Q'_{2,k}(X) + \pi Q''_{2,k}(X)$$

où $Q'_{2,k}(X) \in O_I[X]$ et $Q''_{2,k}(X) \in O_{I'}[X]$, on aura (19) à l'indice $k + 1$ avec

$$Q_{1,k+1}(X) = Q_{1,k}(X) + X^{(k+1)r}Q_{1,k}(X)Q'_{2,k}(X)$$
$$Q_{2,k+1}(X) = X^{kr}Q_{2,k}{}^2(X) + Q_{1,k}(X)Q''_{2,k}(X).$$

Il suffit alors de prendre k suffisamment grand pour obtenir (18). Puisque $O_{I'} = O_I[\pi]$, l'élément $a \in O_R$ s'écrit:

$$a = A(\pi)$$

où $A[X] \in O_I[X]$.

La relation (17) se déduit de (18).

Lemme 7. *Pour tout polynôme* $W(X) \in O_I[X]$ *il existe un polynôme* $\tilde{W}(X) \in O_I[X]$ *tel que*

$$(20) \quad (\tilde{W}(X))^p \equiv W(X^p) \bmod pO_I[X].$$

Preuve. En effet, pour tout $w \in O_I$, il existe $\tilde{w} \in O_I$ tel que $\tilde{w}^p \equiv w \pmod p$ puisque le corps résiduel de I est parfait et que p est une uniformisante de I. Si

$$W(X) = w_0 + w_1X + \ldots + w_mX^m$$

on prend

$$\tilde{W}(X) = \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1X + \ldots + \tilde{w}_mX^m.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Nous pouvons maintenant démontrer la Proposition 9. On construit par récurrence une suite finie $(x_i)_{1 \leqq i \leqq \alpha}$ d'éléments de L possédant les propriétés suivantes:

(21) $x_i = T_i(\theta^{p^{\alpha-i}})$

(22) $x_i^p \equiv a + \theta^{s(p^\alpha + p^{\alpha-1} + \ldots + p^{\alpha-i+1})} U_i(\theta^{p^{\alpha-i}}) \bmod \mathfrak{p}^\alpha$

où $T_i(X)$ et $U_i(X)$ sont des polynômes à coefficients dans O_I.

On part de

$$x_1 = \tilde{Q}(\theta^{p^{\alpha-1}})$$

où $Q(X)$ est le polynôme du Lemme 6 et $\tilde{Q}(X)$ est défini par le Lemme 7 à partir de $Q(X)$. On a:

$$x_1^p = Q(\theta^{p^\alpha}) + pV(\theta^{p^{\alpha-1}})$$

où $V(X) \in O_I[X]$. D'après le Lemme 8, on a alors

$$x_1^p \equiv a + \theta^{sp^\alpha} P(\theta^{p^\alpha}) V(\theta^{p^{\alpha-1}}) \bmod \mathfrak{p}^\alpha.$$

Par récurrence supposons donné $x_i \in L$ satisfaisant à (21) et (22). Posons:

$$x_{i+1} = x_i - \theta^{s(p^{\alpha-1} + p^{\alpha-2} + \ldots + p^{\alpha-i})} \tilde{U}_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}}).$$

L'élément x_{i+1} est bien de la forme $T_{i+1}(\theta^{p^{\alpha-i-1}})$, ce qui est (21), et

$$x_{i+1}^p = x_i^p - \theta^{s(p^\alpha + \ldots + p^{\alpha-i+1})} U_i(\theta^{p^{\alpha-i}}) + p\theta^{s(p^{\alpha-1} + \ldots + p^{\alpha-i})} \times V_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}})$$

où $V_i(X) \in O_I[X]$.

On a donc:

$$x_{i+1}^p \equiv a + p\theta^{s(p^{\alpha-1} + \ldots + p^{\alpha-i})} V_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}}) \bmod \mathfrak{p}^\alpha;$$

mais d'après le Lemme 6 on peut écrire:

$$x_{i+1}^p \equiv a + \theta^{s(p^\alpha + \ldots + p^{\alpha-i})} P(\theta^{p^\alpha}) V_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}}) \bmod \mathfrak{p}^\alpha$$

ce qui est bien de la forme (22).

On construit donc ainsi une suite $(x_i)_{1 \leqq i \leqq \alpha}$ de L, satisfaisant (21) et (22). La relation (22) appliquée à x_α donne alors, puisque $\alpha \geqq 2$:

$$v(x_\alpha^p - a) \geqq \frac{s(p^\alpha + p^{\alpha-1} + \ldots + p)}{sp^\alpha} v(p) = \left(\frac{p}{p-1} - \frac{1}{p^{\alpha-1}(p-1)}\right) v(p),$$

puisque $sp^\alpha v(\theta) = v(p)$. Ce qui montre la Proposition 9.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

3.2.2. *Le cas général.*

THÉORÈME 3. *Soient K un corps local de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p > 0$, L une extension algébrique de K telle que $\mathfrak{D}_{L/K} = (0)$, M une extension algébrique de L. Alors $|\mathfrak{D}_{M/L}| = 1$.*

Preuve. Il est clair qu'il suffit de démontrer le Théorème 3 pour M galoisien de degré fini sur L, ce que nous supposons désormais. Il existe un corps L' et une extension galoisienne T de L' de degré fini sur L' telle que

$$M = LT \quad \text{et} \quad [L' : K] < \infty.$$

L'extension T sur L' admet la suite de sous-corps suivante

$$L' \subset T_0 \subset T_1 \subset T_2 \ldots \subset T_n = T,$$

avec T_0 non ramifiée sur L', T_1 sans ramification sauvage sur T_0 et T_{i+1} cyclique de degré p sur T_i pour $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Nous allons démontrer que

$$|\mathfrak{D}_{L(\sqrt[p]{1})/L}| = 1, \ |\mathfrak{D}_{T_0 L(\sqrt[p]{1})/L(\sqrt[p]{1})}| = 1$$

et

$$|\mathfrak{D}_{T_{i+1} L(\sqrt[p]{1})/T_i L(\sqrt[p]{1})}| = 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n - 1,$$

ce qui démontrera que $|\mathfrak{D}_{M/L}| = 1$.

Comme T_0 est inerte sur L' il est clair que

$$\mathfrak{D}_{T_0 L(\sqrt[p]{1})/L(\sqrt[p]{1})} = (1).$$

D'autre part, $L(\sqrt[p]{1})/L$ et $T_1L(\sqrt[p]{1})/T_0L(\sqrt[p]{1})$ sont deux extensions sans ramification sauvage, elles sont donc définies par un polynôme de la forme

$$X^e - a$$

où $(e, p) = 1$ et $|a| < 1$. Comme $\mathfrak{D}_{L/K} = (0)$ l'indice de ramification sauvage de L sur K est infini.

Soit $0 < c < 1$, il existe $\rho \in L$ tel que

$$c < |\rho^e a| < 1,$$

ainsi le polynôme $f(Y) = Y^e - \rho^e a$ définit la même extension, si y est racine, on a:

$$|f'(y)| = |ey^{e-1}| = |\rho^e a|^{(e-1)/e} > c^{(e-1)/e}$$

ce qui prouve (Corollaire 2, p. 66 de [**17**]) que:

$$|\mathfrak{D}_{L(\sqrt[p]{1})/L}| = |\mathfrak{D}_{T_1 L(\sqrt[p]{1})/T_0 L(\sqrt[p]{1})}| = 1.$$

L'extension $T_{i+1}L(\sqrt[p]{1})/T_iL(\sqrt[p]{1})$ est cyclique de degré p ou 1. Si elle est de degré p, la théorie de Kummer dit qu'elle est définie par un poly-

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

nôme $X^p - a \in T_i(\sqrt[p]{1})[X]$. Quitte à remplacer L' par un corps L'' plus grand de degré fini sur K on peut dire que l'extension $T_{i+1}L(\sqrt[p]{1})/T_iL(\sqrt[p]{1})$ est définie par le polynôme $X^p - a \in L''T_i(\sqrt[p]{1})$ avec $|a| = 1$. Soit $\alpha \geqq 2$ un entier et L_1 une extension de L'' contenue dans L et telle que

$$|\mathfrak{D}_{L_1 T_i(\sqrt[p]{1})/L'' T_i(\sqrt[p]{1})}| < |p|^{2\alpha},$$

alors la Proposition 9 montre que

$$|\mathfrak{D}_{L_1 T_{i+1}(\sqrt[p]{1})/L_1 T_i(\sqrt[p]{1})}| > |p|^{u_\alpha} \text{ ou } u_\alpha = 1/p^{\alpha-1}.$$

D'après la Proposition 8, on a:

$$|\mathfrak{D}_{L T_{i+1}(\sqrt[p]{1})/L T_i(\sqrt[p]{1})}| \geqq |\mathfrak{D}_{L_1 T_{i+1}(\sqrt[p]{1})/L_1 T_i(\sqrt[p]{1})}| \geqq |p|^{u_\alpha}$$

il s'ensuit que

$$|\mathfrak{D}_{L T_{i+1}(\sqrt[p]{1})/L T_i(\sqrt[p]{1})}| = 1$$

ce qui démontre le Théorème 3.

Remarque. Le Théorème 5 est une généralisation d'un théorème démontré par Tate dans le cas particulier où $K = \mathbf{Q}_p$ et où $L = C_\infty$, avec $C_\infty = \bigcup_{n \geqq 1} C_n$ et $C_n = \mathbf{Q}_p(\sqrt[p^n]{1})$ (Proposition 9, p. 174 [**19**]).

3.3. *Extension de corps de différente nulle en caractéristique $p > 0$.* Les résultats concernant la caractéristique $p > 0$ se trouvent dans [**10**] et [**11**].

THÉORÈME 4 ([**10**] [**11**]). *Soient K un corps local de caractéristique $p > 0$, $\mathscr{F}$ l'ensemble des sous-corps fermés de $\hat{\bar{K}}$ contenant K, $\mathscr{A}$ l'ensemble des extensions algébriques de K. Soit g l'application qui à F élément de $\mathscr{F}$ fait correspondre sa trace $F \cap \bar{K}$ dans $\mathscr{A}$, et soit f l'application qui à L de $\mathscr{A}$ associe son adhérence $\hat{L}$ dans $\mathscr{F}$. Alors:*

i) $f \circ g = \mathbf{1}_{\mathscr{F}}$

ii) *soit L un élément de $\mathscr{A}$, alors*

$$g \circ f(L) = \begin{cases} L & si\ \mathfrak{D}_{L^s/K} \neq (0), \\ LK_\infty & si\ \mathfrak{D}_{L^s/K} = (0), \end{cases}$$

où L^s désigne l'extension séparable maximale de K dans L.

PROPOSITION 10 ([**11**]). *Soient K un corps local de caractéristique $p > 0$, L un corps parfait algébrique sur K, M une extension algébrique de L. Alors $|\mathfrak{D}_{M/L}| = 1$.*

Preuve. L'application $x \mapsto x^p$ est un isomorphisme de M sur M puisque L est parfait. Ainsi

$$\mathfrak{D}_{M/L}^{1/p} = \mathfrak{D}_{M^{p^{-1}}/L^{p^{-1}}} = \mathfrak{D}_{M/L}.$$

Si M est de degré fini sur L, alors $\mathfrak{D}_{M/L} \neq 0$ et ainsi $\mathfrak{D}_{M/L} = O_M$ ou $\mathfrak{D}_{M/L} = \mathfrak{M}_M$ (l'idéal maximal de O_M). La proposition en résulte.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

4. Norme tensorielle, norme spectrale, un théorème de transfert. Dans ce paragraphe 4, on montre (Théorème 5) que sur $L \otimes_R M$ la norme tensorielle t est équivalente à la norme spectrale s si M est algébrique séparable sur R et si $\mathfrak{D}_{M/R} \neq (0)$. Inversement, on montre en caractéristique nulle que si $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$ alors s et t ne sont pas équivalentes. Ensuite, dans la situation L' (resp. M') extension algébrique séparable de L (resp. M) et $\mathfrak{D}_{L'/L} \neq (0)$, $\mathfrak{D}_{M'/M} \neq (0)$, on montre (Théorème 6) que le radical de $L' \hat{\otimes}_R M'$ est l'idéal fermé engendré par le radical de $L \hat{\otimes}_R M$.

4.1. *Bases orthogonales dans les extensions algébriques.*

LEMME 8. *Soient K un corps local, R une extension algébrique de K et M une extension algébrique séparable de degré n de R. Soit* $0 < c < 1$, *alors il existe une c-base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de M sur R telle que*

$$e_1 = 1,\ |e_i| \leqq 1,\ |\mathfrak{D}_{M/R}^{-1}| \leqq \max |e_i^*| \leqq c^{-1}|\mathfrak{D}_{M/R}^{-1}|,$$

où $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ est la base duale de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ par rapport à la forme bilinéaire

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{M/R}(xy).$$

Preuve. Puisque M est séparable sur R, on a $M \cap \hat{R} = R$ (Théorème 4, § 3.3) et nous sommes dans les conditions d'application du Lemme 2, § 1.2.1.

Si R est à valuation discrète, la Proposition 1, § 1.1.1, montre qu'il existe une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de O_M sur O_R et l'on a $e_i^* \in \mathfrak{D}_{M/R}{}^{-1}$.

Si R est à valuation dense, soit $\pi \in R$ tel que $c < |\pi^2| < 1$ et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une $|\pi|$-base de M sur R. Quitte à multiplier les e_i par un élément de R on peut avoir, $|\pi| \leqq |e_i| \leqq 1$. Ainsi

$$\bigoplus_i O_R e_i \subset O_M \subset \bigoplus_i O_R\, e_i/\pi^2.$$

Par suite

$$\bigoplus_i O_R\, \pi^2 e_i^* \subset \mathfrak{D}_{M/R}^{-1} \subset \bigoplus_i O_R\, e_i^*,$$

ce qui prouve que $\pi^2\, e_i^* \in \mathfrak{D}_{M/R}^{-1}$, donc que $|e_i^*| < c^{-1}|\mathfrak{D}_{M/R}^{-1}{}^{-1}|$.

PROPOSITION 11. *Soient K un corps local, R une extension algébrique de K et L une extension algébrique séparable de R de dimension dénombrable sur R. Soient L_i une suite de sous-corps de L tels que $R \subset L_i \subset L_{i+1} \subset L$, $L = \bigcup_i L_i$, $[L_i : R] = n_i < \infty$ et c un nombre réel,* $0 < c < 1$. *Alors il existe une c-base $(e_n)_n$ de L sur R telle que.*

i) *$\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_i}\}$ soit une base de L_i sur R*

ii) $e_1 = 1,\ |e_n| \leqq 1$ *et* $\max_{1 \leqq n \leqq n_i} |e_n{}^i| < c^{-1}|\mathfrak{D}_{L_i/R}^{-1}|$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

où $\{e_1{}^i, e_2{}^i, \ldots, e_{n_i}{}^i\}$ *est la base duale de* $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_i}\}$ *par rapport à la forme bilinéaire* $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L_i/R}(xy)$.

Si R *est à valuation discrète on peut prendre* $c = 1$.

Preuve. Si R est à valuation discrète, L_i est à valuation discrète pour tout i. Soient $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_i}\}$ une base de O_{L_i} sur O_R (Lemme 8), et (f_j) une base de $O_{L_{i+1}}$ sur O_{L_i}, telle que $f_1 = 1$, alors $\{e_n f_j\}_{n,j}$ est une base de $O_{L_{i+1}}$ sur O_R. Ce qui permet de construire par récurrence sur i une base de O_L sur O_R satisfaisant i). Il s'ensuit que $e_n{}^i \in \mathfrak{D}_{L_i/R}^{-1}$ ce qui montre ii).

Si R est à valuation dense, soit c_n une suite décroissante telle que $\lim_{n\to\infty} c_n = c^{1/2}$. Soit $\{e_1, \ldots, e_{n_i}\}$ une c_i-base de L_i sur R telle que $c_i < |e_n| \leqq 1$. Soit (f_j) une c_{i+1}/c_i-base de L_{i+1} sur L_i (Lemme 8) telle que $f_1 = 1$ et $c_{i+1}/c_i < |f_j| \leqq 1$. Alors $\{e_n f_j\}$ est une c_{i+1}-base de L_{i+1} sur R qui complète la base $\{e_1, \ldots, e_{n_i}\}$ et telle que

$$c_{i+1} \leqq |e_n f_j| \leqq 1.$$

Il s'ensuit comme dans la démonstration du Lemme 8 que

$$|e_n{}^{i+1}| < c_{i+1}{}^{-2} |\mathfrak{D}_{L_{i+1}/R}^{-1}|.$$

4.2. *Comparaison de la norme tensorielle et de la norme spectrale.*

THÉORÈME 5. *Soient* K *un corps local,* R, L, M *des extensions algébriques de* K *avec* $R \subset L$, $R \subset M$ *séparable sur* R. *Si* $\mathfrak{D}_{M/R} \neq (0)$ *on a pour tout* $z \in L \otimes_R M$

$$|\mathfrak{D}_{M/R}| \,.\, t(z) \leqq s(z).$$

Si K *est de caractéristique nulle et si* $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$, *alors la norme spectrale* s *et la norme tensorielle* t *ne sont pas équivalentes.*

Preuve. Soit $z \in L \otimes_R M$, alors il existe une extension M' de R de degré fini sur R telle que $M' \subset M$ et $z \in L \otimes_R M'$. Soit $0 < c < 1$, alors il existe une c-base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de M' sur R telle que $|e_i| \leqq 1$ et

$$|\mathfrak{D}_{M'/R}^{-1}| \leqq \max |e_i{}^*| \leqq c^{-1} |\mathfrak{D}_{M'/R}^{-1}|,$$

si $\{e_1{}^*, e_2{}^*, \ldots, e_n{}^*\}$ désigne la base duale de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ par rapport à la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{M'/R}(xy)$ (Lemme 8, § 4.1). L'élément z s'écrit de façon unique sous la forme

$$z = \sum_{i=1}^{n} l_i \otimes e_i, \quad \text{avec } l_i \in L$$

et l'on a

$$t(z) \leqq \sup_i |l_i|.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

De plus on a:

$$l_i = \sum_g \mathcal{G}(z)(1, g)e_i^{*g}$$

où g parcourt les n R-homomorphismes de M' dans K. Ainsi

$$|l_i| \leqq s(z)|e_i^*|.$$

Ce qui prouve que

$$c|\mathfrak{D}_{M'/R}|t(z) \leqq s(z)$$

ce qui montre que

$$c|\mathfrak{D}_{M/R}|t(z) \leqq s(z).$$

Supposons maintenant que K soit de caractéristique nulle et que $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$. Soient M' une extension de degré fini de R telle que $M' \subset M$, $0 < c < 1$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une c-base de M' sur R satisfaisant le Lemme 8. Puisque $\mathfrak{D}_{L/R} = 0$, on sait (Théorème 3, § 3.2.2) que $|\mathfrak{D}_{LM'/L}| = 1$, ainsi il existe $x \in LM'$ tel que

$$\mathrm{Tr}_{LM'/L}(x) = 1 \quad \text{et} \quad |x| < c^{-1}.$$

Soit i_0 tel que $|e_{i_0}^*| = \max |e_i^*|$ et

$$l_i = \mathrm{Tr}_{LM'/L}\left(\frac{x}{\overset{*}{e}_{i_0}} \times e_i^*\right),$$

il est clair que $l_i \in L$ et que $|l_i| \leqq c^{-1}$ et $l_{i_0} = 1$.

Soit

$$z = \sum_{i=1}^n l_i \otimes e_i.$$

Nous avons:

$$\mathcal{G}(z)(g_1, g_2) = \sum_i l_i^{g_1} e_i^{g_2} = \sum_g \left(\frac{x}{\overset{*}{e}_{i_0}}\right)^{g_1 g}\left(\sum_i e_i^{*g_1 g} e_i^{g_2}\right)$$

où g décrit les L-homomorphismes de LM' dans $\bar{K}$.

En calculant la fonction caractéristique de $(\mathbf{1}_{M'}, \mathbf{1}_{M'})$ dans $\mathcal{G}(M' \otimes_R M')$, on montre la relation suivante:

$$\sum_{i=1}^n e_i^{*g_1 g} e_i^{g_2} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_1 g_{|M'} = g_{2|M'} \\ 0 & \text{si} \quad g_1 g_{|M'} \neq g_{2|M'}. \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathcal{G}(z)(g_1, g_2) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{\overset{*}{e}_{i_0}}\right)^{g_1 g} & \text{s'il existe } g \text{ tel que } g_1 g_{|M'} = g_{2|M'} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Donc

$$s(z) = \left| \frac{x}{e_{i_0}^*} \right| .$$

Comme $|e_{i_0}^*| \geqq |\mathfrak{D}_{M'/R}^{-1}|$ et $|x| < c^{-1}$, on a:

$$s(z) \leqq c^{-1}|\mathfrak{D}_{M'/R}|.$$

De plus

$$t(z) \geqq c \max_i |l_i| \geqq c.$$

Ainsi

$$t(z) \geqq \frac{c^2}{|\mathfrak{D}_{M'/R}|} s(z),$$

ce qui prouve que t et s ne sont pas équivalentes puisque $\mathfrak{D}_{M/R} = (0)$.

COROLLAIRE. *Soient K un corps local de caractéristique résiduelle nulle, R, L, M des extensions algébriques de K avec $R \subset L$, $R \subset M$. Alors la norme spectrale s et la norme tensorielle t sont équivalentes.*

4.3. *Un théorème de transfert.* Dans tout ce paragraphe 4.3, nous nous placerons dans la situation suivante. Soient K un corps local, R, L, L', M, M' des extensions algébriques de K telles que $R \subset L \subset L'$, $R \subset M \subset M'$, L' (resp. M') est une extension séparable de L (resp. M) et $\mathfrak{D}_{L'/L} \neq (0)$, $\mathfrak{D}_{M'/M} \neq (0)$.

PROPOSITION 12. *Soient K un corps local, R, L, L', M, M' des extensions algébriques de K satisfaisant les conditions du début du paragraphe 4.3. Supposons de plus que L' (resp. M') soit de dimension dénombrable sur L (resp. M). Soient c un nombre réel, $0 < c < 1$ et $(e_i)_i$ (resp. $(f_j)_j$) une c-base orthogonale de L' (resp. M') sur L (resp. M) satisfaisant les conditions de la Proposition 11. Soient $\mathcal{G}'$ (resp. $\mathcal{G}$) la transformation de Gelfand de $L' \otimes_R M'$ (resp. $L \otimes_R M$).*

Alors la famille $(\mathcal{G}'(e_i \otimes f_j))_{i,j}$ est une c'-base orthogonale de $\mathcal{G}'(L' \otimes_R M')$ sur $\mathcal{G}(L \otimes_R M)$ avec $c' = c^2|\mathfrak{D}_{L'/L}| \cdot |\mathfrak{D}_{M'/M}|$.

Preuve. Il est clair que $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est une c^2-base de $L' \otimes_R M'$ sur $L \otimes_R M$. Soit $x \in L' \otimes_R M'$, il se décompose donc sous la forme

$$x = \sum_{i,j} a_{i,j}(e_i \otimes f_j) \quad \text{où} \quad a_{i,j} \in L \otimes_R M.$$

De plus il existe une extension finie L_s (resp. M_t) de L (resp. M) telle que $x \in L_s \otimes_R M_t$ et $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n_s}$ (resp. $(f_j)_{1 \leqq j \leqq m_t}$) est une base de L_s (resp. M_t) sur L (resp. M). Soient donc (e_i^*) (resp. (f_j^*)) leurs bases duales par

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

rapport aux formes bilinéaires

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L_s/L}(xy)$$

(resp. $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{M_t/M}(xy)$).

Soient $h_1, h_2, \ldots, h_{n_s}$ les n_s L-homomorphismes de L_s dans $\bar{K}$ et $s_1, \ldots, s_{m_t}$ les m_t M-homomorphismes de M_t dans $\bar{K}$. Alors on a:

$$\mathcal{G}(a_{i,j})(g_1, g_2) = \sum_{r=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{m_t} \mathcal{G}'(x)(g_1 h_r, g_2 s_k) e_i^{*g_1 h_r} f_j^{*g_2 s_k}.$$

On a donc

$$c^2 |\mathfrak{D}_{L'/L}| \cdot |\mathfrak{D}_{M'/M}| \max_{i,j} \|\mathcal{G}(a_{ij})\| \cdot \|e_i\| \cdot \|f_j\| \leqq \|\mathcal{G}'(x)\| \leqq \max \|\mathcal{G}(a_{ij})\| \, \|e_i\| \, \|f_j\|$$

ce qui prouve la Proposition 12.

THÉORÈME 6. *Soient K un corps local, R, L, L', M, M' des extensions algébriques de K satisfaisant les conditions du début du paragraphe, $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{G}'$) la transformation de Gelfand de $L \hat{\otimes}_R M$ (resp. $L' \hat{\otimes}_R M'$).*

i) *Alors le radical de $L' \hat{\otimes}_R M'$, $\mathfrak{R}(L' \hat{\otimes}_R M') = \ker \mathcal{G}'$ est l'idéal fermé engendré par $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M) = \ker \mathcal{G}$.*

ii) *Si $\mathcal{G}$ est un morphisme strict, alors $\mathcal{G}'$ est un morphisme strict. En particulier, $\mathcal{G}'(L' \hat{\otimes}_R M')$ est complet.*

iii) *Si de plus $|\mathfrak{D}_{L'/L}| = |\mathfrak{D}_{M'/M}| = 1$ et si $\mathcal{G}$ induit un isomorphisme isométrique de $L \hat{\otimes}_R M/\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$ sur $\mathcal{G}(L \hat{\otimes}_R M)$, alors $\mathcal{G}'$ indui un isomorphisme isométrique de $L' \hat{\otimes}_R M'/\mathfrak{R}(L' \hat{\otimes}_R M')$ sur $\mathcal{G}'(L' \hat{\otimes}_R M')$.*

Preuve. Soit $x \in L' \hat{\otimes}_R M'$, comme x est limite d'une suite de $L' \otimes_R M'$, il existe un corps L'' (resp. M'') tel que $L \subset L'' \subset L'$ (resp. $M \subset M'' \subset M'$), de dimension dénombrable sur L (resp. sur M). Soit $(e_i)_i$ (resp. $(f_j)_j$) une c-base de L'' sur L (resp. M) satisfaisant les conditions de la Proposition 11. Alors x s'écrit

$$x = \sum_{i,j} a_{ij}(e_i \otimes f_j) \quad \text{où} \quad a_{ij} \in L \hat{\otimes}_R M$$

et $\lim_{i,j} \|a_{ij}\| \, \|e_i\| \, \|f_j\| = 0$. Donc

$$\mathcal{G}'(x) = \sum_{i,j} \mathcal{G}(a_{ij}) \mathcal{G}'(e_i \otimes f_j).$$

Si $\mathcal{G}'(x) = 0$, la Proposition 12 montre que $\mathcal{G}(a_{ij}) = 0$ pour tout i, j. Donc

$$a_{i,j} \in \mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M) = \ker \mathcal{G}.$$

Ensuite ii) et iii) sont conséquences immédiates de la Proposition 12.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

5. L'algèbre $L \hat{\otimes}_R M$ en caractéristique $p > 0$. Dans tout ce paragraphe R désigne une extension algébrique d'un corps local K de caractéristique $p > 0$, $\bar{R}$ la clôture algébrique de R et $\hat{\bar{R}}$ le complété de $\bar{R}$.

THÉORÈME 7. *Soient R, L, M trois extensions algébriques d'un corps local de caractéristique $p > 0$, traces sur $\bar{R}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{R}}$ et telles que $R \subset L$, $R \subset M$. Alors la transformation de Gelfand de $L \otimes_R M$ est un morphisme strict et le nilradical $\mathfrak{N}$ $(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans le radical $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$.*

Preuve. Soient R'' (resp. R') l'extension purement inséparable de R contenue dans L (resp. M). Soient L^s (resp. M^s) l'extension séparable maximale de R contenue dans L (resp. M). Alors on a $L = L^sR''$ et $M = M^sR'$. Il suit que $\mathfrak{D}_{L/R''} \neq (0)$ et $\mathfrak{D}_{M/R'} \neq (0)$. En effet si $\mathfrak{D}_{L^s/R}$ $\neq 0$ c'est clair et si $\mathfrak{D}_{L^s/R} = (0)$, alors $R'' = RK_\infty$, ainsi R'' est parfait et c'est la Proposition 10. Alors le théorème résulte du Théorème 6 et de la proposition suivante.

PROPOSITION 13. *Soient R, R', R'' trois extensions algébriques d'un corps local K de caractéristique $p > 0$, traces sur $\bar{R}$ de sous-corps fermés de $\hat{\bar{R}}$. On suppose en outre que R' (resp. R'') est purement inséparable sur R. Alors la transformation de Gelfand de $R'' \hat{\otimes}_R R'$ est un morphisme strict et le nilradical $\mathfrak{N}(R'' \hat{\otimes}_R R')$ est dense dans le radical $\mathfrak{R}(R'' \hat{\otimes}_R R')$ de $R'' \hat{\otimes}_R R'$.*

Preuve. Soit $\mathscr{G}$ la transformation de Gelfand de $R'' \hat{\otimes}_R R'$. Il est immédiat de vérifier que $\mathscr{G}(R'' \hat{\otimes}_R R') = \hat{R}''$ (si $R'' \supset R'$). D'autre part on sait que le radical de $R'' \otimes_R R'$ est le nilradical de $R'' \otimes_R R'$ (on peut utiliser le Théorème 2, i)). Il en résulte que le nilradical de $R'' \otimes_R R'$ est dense dans le radical de $R'' \hat{\otimes}_R R'$ et ainsi la proposition est démontrée.

6. L'algèbre $L \hat{\otimes}_R M$ en caractéristique nulle lorsque $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$. Dans tout ce paragraphe 6, K désigne un corps local de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p > 0$. Il contient donc $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Soient $\overline{\mathbf{Q}}_p$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, Γ_n le sous-groupe de $\overline{\mathbf{Q}}_p^\times$ des racines p^n-ièmes de l'unité et $\Gamma = \bigcup_{n \geqq 1} \Gamma_n$. Soient $C_n = \mathbf{Q}_p(\Gamma_n)$ le corps engendré sur $\mathbf{Q}_p$ par Γ_n et $C_\infty = \bigcup_{n \geqq 1} C_n$. L'étude du radical et du nilradical de $L \hat{\otimes}_R M$ se déduit par des techniques de transfert plus ou moins compliquées de l'étude de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ [7]. Au paragraphe 6.1 nous rappelons le théorème fondamental de [7] qui décrit le radical de l'algèbre $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ et nous raffinons un résultat de [7] sur les nilpotents. Ces résultats se transfèrent sans problèmes à l'algèbre $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$ (§ 6.2). Le transfert de ces résultats à $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$ (§ 6.3) est un peu long mais nécessite uniquement des techniques usuelles. En revanche, le paragraphe 6.4 et plus précisément

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

le paragraphe 6.4.1 utilise des techniques vraiment nouvelles pour montrer que le nilradical de $L \hat{\otimes}_R M$ est dense dans le radical de $L \hat{\otimes}_R M$.

6.1. *L'algèbre* $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$. C'est l'algèbre des fonctions définies sur Γ, à valeurs dans $\hat{C}_\infty$ qui tendent vers zéro selon le complémentaire des parties finies de Γ. L'addition est l'addition usuelle des fonctions et le produit est la convolution définie par

$$f*g(\gamma) = \sum_{\delta \in \Gamma} f(\delta) g(\delta^{-1}\gamma).$$

La norme sur $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ notée $\|\cdot\|_1$ est définie par

$$\|f\|_1 = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|.$$

Soit $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty)$ l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\hat{C}_\infty$ munie de la norme de la convergence uniforme notée $\|\cdot\|$. D'autre part, la transformation de Fourier (ou transformation de Gelfand) $\mathscr{F}_1$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ dans $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty)$ est définie par $\mathscr{F}_1(f) = \hat{f}$ où

$$\hat{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^x.$$

Les résultats essentiels sur $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ et $\mathscr{F}_1$ se trouvent dans [**7**].

THÉORÈME 8. ([**7**]). *La transformation de Fourier $\mathscr{F}_1$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ dans $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty)$ est un homomorphisme surjectif. Le noyau de $\mathscr{F}_1$ est le radical $\mathfrak{R}_1$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ (c'est-à-dire l'intersection des idéaux maximaux), il est non nul. L'idéal $\mathfrak{N}_1$ des nilpotents de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ est dense dans $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{R}_1$. Enfin $\mathscr{F}_1$ induit un isomorphisme isométrique de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)/\mathfrak{R}_1$ sur $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty)$.*

Nous avons besoin de préciser le résultat sur les nilpotents. Nous allons montrer qu'un sous-ensemble $\mathfrak{N}_s$ de $\mathfrak{N}_1$ est dense dans $\mathfrak{R}_1$. L'intérêt de ce sous-ensemble est que son image par certaines applications linéaires restera un ensemble de nilpotents.

PROPOSITION 14. *Soit $k \geqq 1$ un entier et $f \in \mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ tels que $f(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin \Gamma_k$. Il existe un unique polynôme $P(X) \in \hat{C}_\infty[X]$ de degré inférieur à p^k tel que $P(\gamma) = f(\gamma)$ si $\gamma \in \Gamma_k$. Si*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{p^k-1} a_i X^i,$$

on pose $\|P\|_g = \sup |a_i|$. Alors on a les relations:
i) $\|f\|_1 \leqq \|\hat{f}\| \, |p|^{-k}$
ii) $\|\hat{f}\| = \|P\|_g |p|^k$.

La preuve est immédiate (cf. aussi le Lemme 1 de [**7**]).

Définition 7. Soit $d \geqq 1$ un entier, $S \subset \mathbf{N}$ un sous-ensemble infini d'entiers. Soit $\mathfrak{N}_{S,d}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ des éléments f qui sont limites d'une suite $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ possédant les propriétés suivantes:

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

i) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $s_k \in S$ tel que $f_k(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin \Gamma_{s_k}$;
ii) Pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout k on a $f_k(\gamma) \in C_{s_k}$;
iii) $\lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k\| \, |p^{-s_k/d}| = 0$.

PROPOSITION 15. *Pour tout $f \in \mathfrak{N}_{S,d}$ on a $f^d = 0$.*

Preuve. Soit $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ où la suite $(f_k)_k$ satisfait i), ii), iii) de la Définition 7

$$\|\hat{f}_k{}^d\| \leqq \|\hat{f}_k\|^d.$$

Ainsi (iii) montre que

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k{}^d\| \, |p|^{-s_k} = 0.$$

Or d'après la Proposition 14

$$\|f_k{}^d\|_1 \leqq \|\hat{f}_k{}^d\| \, |p|^{-s_k}.$$

Ainsi

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k{}^d\|_1 = 0 \quad \text{et} \quad f^d = 0.$$

Définition 8. Soit $\mathfrak{N}_S$ le sous-ensemble de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ défini par $\mathfrak{N}_S = \bigcup_{d\geqq 1} \mathfrak{N}_{S,d}$.

Il s'agit de montrer que $\mathfrak{N}_S$ est dense dans $\mathfrak{N}_1$. La démonstration utilise le travail de [7] et plus particulièrement le Lemme 5 que nous traduisons ici.

LEMME 9. *Soient $r, s, t \in \mathbf{N}$ tels que $0 < r \leqq s \leq t$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $0 \leqq \lambda \leqq \mu \leqq 1$. Soient C' un sous-corps de $\hat{\bar{\mathbf{Q}}}_p$ et $P(X) \in C'[X]$ un polynôme de degré inférieur à p^s tel que*

$$\|P\|_g \leqq |p|^{-\lambda s}.$$

Alors il existe un polynôme $Q(X) \in C'C_t[X]$ de degré inférieur à p^t tel que

$$\|Q\|_g \leqq |p|^{-\mu t}$$
$$Q(\gamma) = P(\gamma) \quad \textit{pour } \gamma \in \Gamma_r$$
$$|Q(\gamma)| = |P(\gamma)| \quad \textit{pour } \gamma \in \Gamma_s$$
$$|Q(\gamma)| \leqq c|p|^{(\mu-\lambda)s-\mu r} \quad \textit{pour } \gamma \in \Gamma_t - \Gamma_s,$$

où $c = |p|^{-1/p-1}$.

Preuve. Ce lemme est le Lemme 5, page 234 de [7].

THÉORÈME 9. *Le sous-ensemble $\mathfrak{N}_S$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ est dense dans le radical $\mathfrak{N}_1$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$.*

Preuve. Soient $\epsilon > 0$ et $g \in \mathfrak{N}_1$. Soit $g_k \in \mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ tel que $g_k(\gamma) = g(\gamma)$ si $\gamma \in \Gamma_k$ et $g_k(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin \Gamma_k$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Soit r_1 un entier tel que

$$|g(\gamma)| < \epsilon \quad \text{si } \gamma \notin \Gamma_{r_1}.$$

Soit $s_1 > r_1$ et $s_1 \in S$ tel que

$$\|\hat{g}_{s_1}\| < c^{-1} \frac{\epsilon}{2} |p|^{r_1}.$$

Soit λ_1 tel que

$$\|\hat{g}_{s_1}\| \leqq |p|^{(1-\lambda_1)s_1} < c^{-1} \frac{\epsilon}{2} |p^{r_1}|$$

et

$$0 < \lambda_1 < 1.$$

Il existe λ_2 tel que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 1$$

et

$$|p|^{(\lambda_2-\lambda_1)s_1-r_1} < c^{-1}\epsilon.$$

Soit $f_1 \in \mathfrak{L}^1(\Gamma, C_\infty)$ tel que

$$\|f_1 - g_{s_1}\| < \|\hat{g}_{s_1}\|$$

et

$$f_1(\gamma) = 0 \quad \text{si } \gamma \notin \Gamma_{s_1}.$$

Il existe $n_0 \geqq s_1$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait $f_1(\gamma) \in C_{n_0}$. Soit $P_1(X) \in C_{n_0}[X]$, l'unique polynôme de degré inférieur à p^{s_1} tel que

$$P_1(\gamma) = f_1(\gamma) \quad \text{pour } \gamma \in \Gamma_{s_1}.$$

Soit d un entier tel que $1 - 1/(d-1) > \lambda_2$ et soit $(\lambda_n)_{n\geqq 3}$ une suite croissante de limite $1 - 1/(d-1)$, avec $\lambda_3 > \lambda_2$. Soit (r_k) la suite définie par $r_k = r_1 + k - 1$. Alors il existe une suite d'entiers $(s_k)_{k\geqq 2}$ contenue dans S, telle que

$$s_k \geqq r_k$$

$$(23) \quad (\lambda_{k+1} - \lambda_k)s_k - \lambda_{k+1}r_k \geqq (\lambda_2 - \lambda_1)s_1 - \lambda_2 r_1$$

et

$$(24) \quad \lim_{k\to\infty} ((\lambda_{k+1} - \lambda_k)s_k - \lambda_{k+1}r_k) = +\infty.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Alors le Lemme 9 permet de construire une suite $(P_k)_k$ de polynômes qui satisfont

(25) $P_k(X) \in C_{n_0}C_{s_k}[X], \quad d^0P_k(X) < p^{s_k}$

(26) $\|P_k\|_g \leqq |p|^{-\lambda_k s_k}$

(27) $P_k(\gamma) = P_{k-1}(\gamma) \quad$ pour $\gamma \in \Gamma_{r_{k-1}}$

(28) $|P_k(\gamma)| = |P_{k-1}(\gamma)| \quad$ pour $\gamma \in \Gamma_{s_{k-1}}$

(29) $|P_k(\gamma)| \leqq c|p|^{(\lambda_k-\lambda_{k-1})s_{k-1}-\lambda_k r_{k-1}} \quad$ pour $\gamma \in \Gamma_{s_k} - \Gamma_{s_k-1}$.

En effet, par définition, $P_1(X) \in C_{n_0}[X]$, il est de degré inférieur à s_1, et de plus

$$\|P_1\| = \|\hat{f}_1\| \, |p|^{-s_1} = \|\hat{g}_{s_1}\| \, |p|^{-s_1} \leqq |p|^{-\lambda_1 s_1}.$$

Le Lemme 9 montre qu'il existe un polynôme $P_2(X)$ satisfaisant (25), (26), (27), (28), (29). Il est alors clair que le Lemme 9 permet de construire par récurrence la suite de polynômes $(P_k)_{k\geqq 2}$ satisfaisant (25), (26), (27), (28), (29).

Soit f_k l'élément de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, C_\infty)$ défini par

$$f_k(\gamma) = P_k(\gamma) \quad \text{si } \gamma \in \Gamma_{s_k}$$
$$f_k(\gamma) = 0 \quad \text{si } \gamma \notin \Gamma_{s_k}.$$

Les relations (24), (27), (28), (29) montrent que la suite (f_k) est convergente et que

$$f_k(\gamma) = f_1(\gamma) \quad \text{si } \gamma \in \Gamma_{r_1}$$
$$|f_k(\gamma)| < \epsilon \quad \text{si } \gamma \notin \Gamma_{r_1}.$$

Soit $f = \lim_{k\to\infty} f_k$, alors

$$\|f - g\|_1 < \epsilon.$$

De plus les relations (26) et ii) de la Proposition 14 montrent que

$$\|\hat{f}_{s_k}\| = \|P_k\|_g \cdot |p|^{s_k} \leqq |p|^{s_k(1-\lambda_k)},$$

et puisque $\lambda_k \leqq 1 - 1/(d-1)$, nous avons

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k\| \, |p|^{-(1/d)s_k} = 0.$$

Enfin la relation (25) montre que

$$f_k(\gamma) \in C_{s_k}, \quad \text{si } s_k \geqq n_0.$$

Ceci prouve que $f \in \mathfrak{R}_{S,d}$, ainsi $\mathfrak{R}_S$ est dense dans $\mathfrak{R}_1$.

6.2. *L'algèbre* $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$. Soient C' un sous-corps de C_∞ de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$ et $G = \text{Gal}\,(C_\infty/C')$ le groupe de Galois de C_∞ sur C'. On identifiera G à un sous-groupe de $\mathbf{Z}_p^\times$ qui est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}_p$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Définition 9. Soient $d \geqq 1$ un entier, S une partie infinie de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers. Soit $\mathfrak{N}_{S,d}$ $(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ le sous-ensemble des $z \in C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$ qui sont limites d'une suite z_k satisfaisant les propriétés suivantes:

i) Pour tout k, il existe $s_k \in S$ tel que $z_k \in C_{s_k} \otimes_{C'} C_{s_k}$

ii) $\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}(z_k)\| \, |p^{-s_k/d}| = 0$.

Proposition 16. *Pour tout* $z \in \mathfrak{N}_{S,d}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ *on a* $z^d = 0$.

Preuve. Soit $z \in \mathfrak{N}_{S,d}$ et z_k une suite convergent vers z et satisfaisant i) et ii) de la Définition 9. Nous savons que

$$\|\mathcal{G}(z_k{}^d)\| \, |p^{-s_k}| \leqq (\|\mathcal{G}(z_k)\| \, . \, |p^{-s_k/d}|)^d. \tag{30}$$

Or

$$|\mathfrak{D}_{C_{s_k}|C'}| > |p|^{s_k}.$$

Ainsi

$$\|\mathcal{G}(z_k{}^d)\| \, |\mathfrak{D}_{C_{s_k}|C'}|^{-1} < \|\mathcal{G}(z_k{}^d)\| \cdot |p|^{-s_k}.$$

Ainsi ii) de la Définition 9, (30) et le Théorème 5 montrent que

$$z^d = \lim_{k\to\infty} z_k{}^d = 0.$$

Définition 10. Soit $\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty) = \bigcup_{d\geqq 1} \mathfrak{N}_{S,d}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$.

Il suit de la Proposition 16 que l'ensemble $\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ est contenu dans l'idéal $\mathfrak{N}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ des nilpotents de $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$.

Théorème 10. *Soit C' un sous-corps de C_∞ de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$. Alors le radical $\mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ de $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$ est le noyau de la transformation de Gelfand $\mathcal{G}$ de $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$. L'homomorphisme $\mathcal{G}$ induit un isomorphisme isométrique de $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty/\mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ sur $\mathcal{G}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$. Le nilradical $\mathfrak{N}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ de $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$ est dense dans $\mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ et*

$$\mathfrak{N}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty) \neq \mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty).$$

Plus précisément l'ensemble $\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ est dense dans $\mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$.

Preuve. Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty) \arrow[r, "\mathcal{F}_1"] \arrow[d, "v"'] & \mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty) \arrow[d, "\alpha"] \\
C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty \arrow[r, "\mathcal{G}"] & \mathcal{C}(G \times G, \hat{C}_\infty)
\end{tikzcd}$$

où

$$v(f) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) \otimes \gamma$$

$$\alpha(\varphi)(g_1, g_2) = \varphi(g_1{}^{-1}g_2)^{g_1}.$$

Ce diagramme est commutatif et on a $\|v\| = \|\alpha\| = 1$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Soient $0 < c < 1$ et $\varphi \in \mathscr{G}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$. Puisque G est ouvert, il existe $\varphi_1 \in \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \hat{C}_\infty)$ tel que $\|\varphi\| = \|\varphi_1\|$ et $\alpha(\varphi_1) = \varphi$. D'après le Théorème 8 il existe $f_1 \in \mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ tel que $\mathscr{F}_1(f_1) = \varphi_1$ et $\|f_1\| \leqq c^{-1}\|\varphi_1\|$. Ainsi

$$\|v(f_1)\| \leqq c^{-1}\|\varphi\| \quad \text{et} \quad \mathscr{G}(v(f_1)) = \varphi.$$

Ce qui prouve que $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty/\mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ est isomorphe et isométrique à $\mathscr{G}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$.

Soit $u \in \mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty)$ l'unique élément tel que $\mathscr{F}_1(u)$ soit la fonction caractéristique de G et que $u(\gamma) = 0$ sauf pour un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$. On a $v(u) = 1$ et donc $v(1 - u) = 0$. Alors

$$\ker(\alpha \circ \mathscr{F}_1) = (1 - u) * \mathfrak{L}^1(\Gamma, \hat{C}_\infty) + \mathfrak{R}_1.$$

Ainsi

$$v(\mathfrak{R}_1) = \mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty).$$

Puisque $\mathfrak{N}_S$ est dense dans $\mathfrak{R}_1$ (Théorème 9) il est clair que $v(\mathfrak{N}_S)$ est dense dans $v(\mathfrak{R}_1) = \mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$. Il est d'autre part immédiat que

$$v(\mathfrak{N}_S) \subset \mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty).$$

Ce qui prouve que $\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ est dense dans $\mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$. Enfin

$$\mathfrak{N}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty) \neq \mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$$

résulte de la proposition suivante:

Proposition 17. ([**7**]). *Soit K un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique, complet, de caractéristique résiduelle $p \neq 0$ et soit A une K-algèbre de Banach. Désignons par $\mathfrak{N}$ l'idéal des nilpotents de A et par $\mathfrak{R}$ le radical de A. Supposons que $\hat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{R}$ et qu'il existe un idempotent e de norme supérieure à 1 et de norme 1 dans $A/\mathfrak{R}$. Alors $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{R}$.*

6.3. *L'algèbre $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$.* Le but de ce paragraphe est de transférer les propriétés de l'algèbre $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$ à l'algèbre $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$. Pour cela quelques lemmes sont nécessaires, nous conservons toujours les notations et les hypothèses du début du paragraphe 6.

Lemme 10. *Soient R une extension algébrique du corps local K, telle que $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$, $C' = R \cap C_\infty$ et K_0' un sous-corps fermé de KC' contenant C', non ramifié sur C' et dont le corps résiduel est celui de KC'. Soient $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une 1-base orthogonale de O_{C_∞} sur $O_{C'}$. Alors pour toute famille finie (λ_n) où $\lambda_n \in R$, on a*

$$(31) \qquad |\mathfrak{D}_{R/K_0'}| \max_n |\lambda_n|\,|e_n| \leqq \left|\sum_n \lambda_n e_n\right| \leqq \max_n |\lambda_n| \cdot |e_n|.$$

Preuve. Montrons d'abord que C' est une extension de degré fini de $\mathbf{Q}_p$. Soit K_0 un sous-corps fermé de K non ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ dont le corps résiduel

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

est celui de K (Théorème 4, p. 46, [**17**]). Comme C' est complètement ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ on a $O_{K_0C'} = O_{K_0}O_{C'}$ et ainsi

$$|\mathfrak{D}_{K_0C'/K_0}| = |\mathfrak{D}_{C'/\mathbf{Q}_p}|.$$

Or:

$$|\mathfrak{D}_{K/K_0}| \cdot |\mathfrak{D}_{KC'/K}| = |\mathfrak{D}_{K_0C'/K_0}| \cdot |\mathfrak{D}_{KC'/K_0C'}|.$$

Si C' était de degré infini sur $\mathbf{Q}_p$ on aurait

$$0 = |\mathfrak{D}_{C'/\mathbf{Q}_p}| = |\mathfrak{D}_{K_0C'/K_0}|$$

et ainsi $0 = |\mathfrak{D}_{KC'/K}|$, ce qui contredit $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$.

Puisque C' est de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$, alors KC' est un corps local. Soit K_0' un sous-corps fermé de KC' non ramifié sur C' et dont le corps résiduel est celui de KC' (Théorème 4, p. 46 [**17**]). Ainsi KC' est une extension algébrique de K_0' dont le degré est l'indice de ramification de KC' sur K_0'. Par suite R est algébrique sur K_0' et $\mathfrak{D}_{R/K_0'} \neq (0)$.

Soient $\lambda_n \in R$ pour $1 \leqq n \leqq s$, $x = \sum_{n=1}^{s} \lambda_n e_n$, il existe une extension R' de degré fini sur K_0' telle que $R' \subset R$ et $\lambda_n \in R'$ pour $1 \leqq n \leqq s$. Soit $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ une 1-base orthogonale de $O_{R'}$ sur $O_{K_0'}$ et $\{f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*\}$ la base duale par rapport à la forme K_0'-bilinéaire

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{R'/K_0'}(xy),$$

on a $f_i^* \in \mathfrak{D}_{R'/K_0'}^{-1}$. Ecrivons λ_n sur la base $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^{m} \mu_{n,i} f_i \quad \text{où } \mu_{n,i} \in K_0'$$

ainsi

$$x = \sum_i \left(\sum_n \mu_{n,i} e_n \right) f_i$$

et par suite

$$\nu_i = \sum_n \mu_{n,i} e_n = \mathrm{Tr}_{R'/K_0'}(x f_i^*)$$

et

$$|\nu_i| \leqq |\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^{-1} \cdot |x|.$$

Puisque K_0' est non ramifié sur C', que C_∞ est complètement ramifié sur C', on a $O_{K_0'C_\infty} = O_{K_0'}O_{C_\infty}$. Si

$$\nu = \sum_n \mu_n e_n \quad \text{avec } \mu_n \in K_0',$$

alors

$$|\nu| = \max_n |\mu_n|\, |e_n|.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Donc

$$\sup_{n,i} |\mu_{n,i}|\, |e_n| \leqq |\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^{-1} \cdot |x|.$$

Or

$$|\lambda_n| \leqq \max_i |\mu_{n,i}|.$$

Donc

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}| \max_n |\lambda_n| \cdot |e_n| \leqq |x| \leqq \max_n |\lambda_n| \cdot |e_n|,$$

ce qui prouve le lemme.

LEMME 11. *Les hypothèses sont celles du Lemme* 10. *Alors l'injection canonique* α *de* $C_\infty \otimes_{C'} C_\infty$ *dans* $RC_\infty \otimes_R RC_\infty$ *se prolonge par continuité en une injection toujours notée* α *de* $C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$ *dans* $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$. *Pour toute famille finie* $(\lambda_{n,m})$ *où* $\lambda_{n,m} \in R$ *on a:*

$$(32) \quad |\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \max_{n,m} |\lambda_{n,m}| \cdot |e_n| \cdot |e_m| \leqq \left\| \sum_{n,m} \lambda_{n,m} e_n \otimes e_m \right\|$$
$$\leqq \max |\lambda_{n,m}| \cdot |e_n| \cdot |e_m|.$$

Preuve. La relation (32) est une conséquence immédiate de la relation (31). Ce qui prouve que

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \|z\| \leqq \|\alpha(z)\| \leqq \|z\|, \quad \text{pour tout } z \in C_\infty \otimes_{C'} C_\infty.$$

LEMME 12. *Les hypothèses sont celles du Lemme* 11. *De plus, soit* R' *un sous-corps de* R *contenant* KC' *et de dimension sur* KC' *dénombrable. Alors l'injection canonique* β *de* $R'C_\infty \otimes_{R'} R'C_\infty$ *dans* $RC_\infty \otimes_R RC_\infty$ *se prolonge par continuité en une injection toujours notée* β *de* $R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty$ *dans* $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$. *Pour tout* $y \in R'C_\infty \otimes_{R'} R'C_\infty$ *on a:*

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \|y\| \leqq \|\beta(y)\| \leqq \|y\|.$$

Soit $(u_\nu)_\nu$ *une* 1-*base orthogonale de* $O_{R'}$ *sur* $O_{C'}$. *Alors pour tout* $z \in \beta(R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty)$ *il existe une famille* $(z_\nu)_\nu$ *unique avec* $z_\nu \in C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$, $\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = 0$

$$z = \sum_\nu u_\nu \alpha(z_\nu)$$

et

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}| \max_\nu |u_\nu| \cdot \|z_\nu\| \leqq \|z\| \leqq \max_\nu |u_\nu| \cdot \|z_\nu\|.$$

Preuve. On a trivialement $\|\beta(y)\| \leqq \|y\|$. Si

$$y = \sum_{n,m} \lambda_{n,m} e_n \otimes e_m, \quad \text{où } \lambda_{n,m} \in R',$$

d'après le Lemme 11 on a

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \max_{n,m} |\lambda_{n,m}| \cdot |e_n| \cdot |e_m| \leqq \|\beta(y)\| \leqq \max_{n,m} |\lambda_{n,m}| \cdot |e_n| \cdot |e_m|$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

et puisque

$$\|y\| \leqq \max_{n,m} |\lambda_{n,m}| \cdot |e_n| \cdot |e_m|.$$

Alors

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \cdot \|y\| \leqq \|\beta(y)\| \leqq \|y\|$$

ainsi β se prolonge par continuité en une injection.

Montrons qu'il existe une 1-base orthogonale de $O_{R'}$ sur $O_{C'}$. En effet, un relèvement d'une base du corps résiduel de K_0' sur le corps résiduel de C' est une 1-base orthogonale de $O_{K_0'}$ sur $O_{C'}$. D'autre part, puisque K_0' est un corps local et que R' est algébrique et de dimension dénombrable sur K_0', il existe une 1-base orthogonale de $O_{R'}$ sur $O_{K_0'}$. Le compositum des deux bases est alors une 1-base orthogonale $(u_\nu)_\nu$ de $O_{R'}$ sur $O_{C'}$.

Soit $z \in \beta(R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty)$, il existe une famille $(\lambda_{n,m})_{n,m}$ telle que,

$$\lambda_{n,m} \to 0,\ \lambda_{n,m} \in \hat{R}' \quad \text{et}$$

$$z = \sum_{n,m} \lambda_{n,m} e_n \otimes e_m$$

(33) $\quad |\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \max_{n,m} |\lambda_{n,m}| \cdot |e_n| \cdot |e_m| \leqq \|z\| \leqq \max_{n,m} |\lambda_{n,m}| \cdot |e_n| \cdot |e_m|,$

c'est le Lemme 11.

On décompose $\lambda_{n,m}$ sur la 1-base $(u_\nu)_\nu$ et l'on a

$$\lambda_{n,m} = \sum_\nu \overset{\nu}{\mu}_{n,m} u_\nu$$

avec $\overset{\nu}{\mu}_{n,m} \in C'$, $\overset{\nu}{\mu}_{n,m} \to 0$ et

(34) $\quad |\lambda_{n,m}| = \max_\nu |\overset{\nu}{\mu}_{n,m}| \cdot |u_\nu|.$

Ainsi

$$z = \sum_\nu \left(\sum_{n,m} \overset{\nu}{\mu}_{n,m} e_n \otimes e_m \right) u_\nu.$$

On pose:

$$z_\nu = \sum_{n,m} \overset{\nu}{\mu}_{n,m} e_n \otimes e_m$$

et on a

(35) $\quad \|z_\nu\| = \max_{n,m} |\overset{\nu}{\mu}_{n,m}| \cdot |e_n|\, |e_m|.$

Ainsi les relations (33), (34), (35) montrent que

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \max_\nu |u_\nu|\, \|z_\nu\| \leqq \|z\| \leqq \max_\nu |u_\nu| \cdot \|z_\nu\|.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

LEMME 13. *Les hypothèses sont celles des Lemmes* 11 *et* 12. *Soient* $z \in \beta(R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty)$ *et* $z \in \Re(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$ *le radical de* $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$. *Alors il existe une famille* $(z_\nu)_\nu$ *unique telle que* $z_\nu \in \Re(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$, $\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = 0$,

$$z = \sum_\nu u_\nu \alpha(z_\nu)$$

et

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \max_\nu |u_\nu| \cdot \|z_\nu\| \leqq \|z\| \leqq \max_\nu |u_\nu| \cdot \|z_\nu\|.$$

Preuve. Puisque Gal (C_∞/C') = Gal (RC_∞/R) il existe une injection canonique α' de $\mathscr{G}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ dans $\mathscr{G}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty & \xrightarrow{\alpha} & RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty \\ \downarrow \mathscr{G} & & \downarrow \mathscr{G} \\ \mathscr{G}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathscr{G}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty) \end{array}$$

Soit $z \in \beta(R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty)$, d'après le Lemme 12 il se décompose sous la forme

$$z = \sum_\nu u_\nu \cdot \alpha(z_\nu)$$

avec $z_\nu \in C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$, $\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = 0$ et

$$|\mathfrak{D}_{R/K_0'}|^2 \max_\nu |u_\nu| \cdot \|z_\nu\| \leqq \|z\| \leqq \max_\nu |u_\nu| \cdot \|z_\nu\|.$$

Si $z \in \Re(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$, alors $\mathscr{G}(z) = 0$, donc

$$0 = \sum_\nu u_\nu \mathscr{G}(z_\nu)(g_1, g_2), \quad \text{pour tout } g_1, g_2 \in \text{Gal }(RC_\infty/R).$$

Or le Lemme 10 montre que $R' \hat{\otimes}_C C_\infty$ est canoniquement isomorphe à $(R'C_\infty)\hat{}$ et comme $(u_\nu)_\nu$ est une 1-base orthogonale de R' sur C' on a

$$\mathscr{G}(z_\nu)(g_1, g_2) = 0, \text{ pour tout } \nu \text{ et pour tout } g_1, g_2 \in \text{Gal }(RC_\infty/R).$$

Donc $z_\nu \in \ker \mathscr{G} = \Re(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$. Ce qui prouve le lemme.

THÉORÈME 11. *Les hypothèses sont celles du début du paragraphe* 6. *Soient* R *une extension algébrique du corps local* K *telle que* $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$, $C' = R \cap C_\infty$. *Alors la transformation de Gelfand* $\mathscr{G}$ *de* $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$ *induit un isomorphisme isométrique de* $RC_\infty \hat{\otimes} RC_\infty/\Re(RC_\infty \hat{\otimes} RC_\infty)$ *sur* $\mathscr{G}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$. *Le* R-*espace vectoriel fermé engendré par* $\alpha(\Re(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty))$ *est* $\Re(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Soit $\varphi \in \mathscr{G}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$, il existe $y \in RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$ tel que $\mathscr{G}(y) = \varphi$. Comme y est limite d'une suite d'éléments de $RC_\infty \otimes_R RC_\infty$, il existe une extension R' de K de dimension dénombrable sur K telle que

$$R' \subset R \quad \text{et} \quad y \in \beta(R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty).$$

Ainsi $\varphi \in \mathscr{G}(R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty)$.

Soit c un nombre réel tel que $0 < c < 1$, alors $R'C_\infty$ admet une c-base orthogonale $(v_\nu)_\nu$ sur C_∞. En effet, le Lemme 10 montre que toute 1-base de K_0' sur C' est une 1-base de $K_0'C_\infty$ sur C_∞, ensuite comme $R'C_\infty$ est algébrique et de dimension dénombrable sur $K_0'C_\infty$ il admet une c-base sur $K_0'C_\infty$, ainsi $R'C_\infty$ admet une c-base sur C_∞.

Soit $g \in \mathrm{Gal}\,(R'C_\infty/R')$, alors $\varphi(1, g)$ admet une décomposition unique sous la forme

$$(36) \quad \varphi(1, g) = \sum_\nu a_\nu(g) v_\nu$$

avec $a_\nu(g) \in C_\infty$, $\lim_{\nu\to\infty} |a_\nu(g)|\,|v_\nu| = 0$ et:

$$c \max_\nu |a_\nu(g)| \cdot |v_\nu| \leqq |\varphi(1, g)| \leqq \max_\nu |a_\nu(g)|\,|v_\nu|.$$

Soit b_ν la fonction définie sur $G \times G$ à valeurs dans C_∞, où

$$G = \mathrm{Gal}\,(C_\infty/C') = \mathrm{Gal}\,(R'C_\infty/R')$$

définie par

$$(37) \quad b_\nu(g_1, g_2) = a_\nu(g_1^{-1}g_2)^{g_1}.$$

Il est clair que $b_\nu \in \mathscr{G}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty')\hat{}$. Or, d'après le Théorème 10, il existe $z_\nu \in C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty$ tel que

$$(38) \quad \mathscr{G}(z_\nu) = b_\nu \quad \text{et} \quad c\|z_\nu\| \leqq \|b_\nu\|.$$

Soit donc

$$z = \sum_\nu \alpha(z_\nu)(v_\nu \otimes 1).$$

Alors les relations (36), (37), (38) montrent que

$$\mathscr{G}(z)(1, g) = \varphi(1, g) \quad \text{et donc} \quad \mathscr{G}(z) = \varphi$$

et

$$c^2\|z\| \leqq \|\varphi\|.$$

Soit $z \in \mathfrak{R}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$, comme z est limite d'une suite de $RC_\infty \otimes_R RC_\infty$ il existe un corps $R' \subset R$ contenant KC' et de dimension dénombrable sur KC' tel que

$$z \in \beta(R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Alors le Lemme 13 montre que z appartient au R'-espace vectoriel fermé engendré par $\alpha(\mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty))$.

6.4. *L'algèbre* $L \hat{\otimes}_R M$.

6.4.1. *Les nilpotents de* $L \hat{\otimes}_R M$. L'objet de ce paragraphe est de montrer que $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$. Nous verrons en 6.4.2 qu'il suffit d'étudier deux cas: celui où $M \subset RC_\infty$ et celui où $M \cap RC_\infty$ est de degré fini sur R. Le premier cas est assez facile, en revanche le second cas utilisera 6.1, 6.2, 6.3.

Cas où $M \subset RC_\infty$.

Définition 11. Soient R une extension algébrique du corps local K, L une extension algébrique de R telle que $\mathfrak{D}_{L/R} = (0)$. Alors le Théorème 3, § 3.2.2, montre que $|\mathfrak{D}_{LC_\infty/L}| = 1$. Alors l'extension LC_∞ de L satisfait aux hypothèses de la Proposition 11, § 4.1, en prenant $L_i = LC_i$. Soient $0 < c_2 < 1$ et $(f_n)_n$ une base de LC_∞ sur L satisfaisant aux conditions i) et ii) de la Proposition 11. Il existe une forme L-linéaire ρ sur LC_∞ telle que

$$\rho(x) = \mathrm{Tr}_{LC_i/L}(f_1{}^i x) \quad \text{si } x \in LC_i$$

et l'on a pour tout $x \in LC_\infty$

$$|\rho(x)| \leqq c_2{}^{-1}|x|.$$

Ainsi ρ se prolonge par continuité en une forme $\hat{L}$-linéaire sur $(LC_\infty)\hat{}$ telle que

$$\rho(x) = x \quad \text{si } x \in \hat{L}.$$

THÉORÈME 12. *Soient R une extension algébrique du corps local K, M une extension algébrique de R contenue dans RC_∞ et telle que $\mathfrak{D}_{M/R} = (0)$. Soit L une extension algébrique de R telle que $\mathfrak{D}_{L/R} = (0)$. Alors le nilradical $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans le radical $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$.*

Preuve. Puisque $\mathfrak{D}_{M/R} = (0)$, la proposition montre que $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$. Soit $C' = R \cap K_\infty$, puisque $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$, l'argument du début de la preuve du Lemme 10, § 6.3, montre que C' est de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$. D'autre part la théorie de Galois montre qu'il existe un corps intermédiaire T entre C' et C_∞ tel que $M = RT$. Comme $\mathfrak{D}_{M/R} = (0)$, on a $\mathfrak{D}_{T/\mathbf{Q}_p} = (0)$. La théorie de Galois montre que C_∞ est de degré fini sur T. Soient $n = [C_\infty: T]$ et $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de RC_∞ sur RT telle que $e_1 = 1$. Soit $\{e_1{}^*, e_2{}^*, \ldots, e_n{}^*\}$ la base duale de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ par rapport à la forme M-bilinéaire de $MC_\infty = RC_\infty$,

$$(x, y) \to \mathrm{Tr}_{MC_\infty/M}(xy).$$

Soit τ la forme M-linéaire sur MC_∞ définie par

$$\tau(x) = \mathrm{Tr}_{MC_\infty/M}(e_1{}^* x)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

on a

$$\tau(x) = x \quad \text{pour tout } x \in M$$

et

$$|\tau(x)| \leqq |e_1^*| \cdot |x| \quad \text{pour tout } x \in MC_\infty.$$

Ainsi τ se prolonge par continuité en une forme $\hat{M}$-linéaire de $(MC_\infty)^\wedge$ telle que

$$\tau(x) = x \quad \text{pour tout } x \in \hat{M}.$$

Soit ρ la $\hat{L}$ forme linéaire sur $(LC_\infty)^\wedge$. Alors $\rho \otimes \tau$ est une application $L \hat{\otimes}_R M$-linéaire de $LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty$ telle que

(39) $$\rho \otimes \tau(z) = z \quad \text{pour tout } z \in L \hat{\otimes}_R M$$

et

$$\|\rho \otimes \tau(z)\| \leqq |e_1^*| c_2^{-1} \|z\| \quad \text{pour tout } z \in LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty.$$

Montrons la relation suivante pour tout $z \in LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty$

(40) $$\|\mathscr{G}(\rho \otimes \tau(z))\| \leqq |e_1^*|\, |c_2^{-1}| \cdot \|\mathscr{G}(z)\|.$$

Il suffit de montrer cette relation pour $z = a \otimes b$ où $a \in LC_{n_i}$ et $b \in MC_\infty$

$$\mathscr{G}(\rho \otimes \tau(a \otimes b))(g_1, g_2) = \sum_\sigma \sum_{\sigma'} (f_1{}^i a)^{g_1\sigma} (e_1^* b)^{g_2\sigma'}$$

où σ et σ' parcourent une famille finie d'éléments de Gal $(\bar{K}/R)$. Ainsi

$$\mathscr{G}(\rho \otimes \tau(a \otimes b))(g_1, g_2) = \sum_\sigma \sum_{\sigma'} (f_1{}^i)^{g_1\sigma} (e_1^*)^{g_2\sigma'} \times \mathscr{G}(a \otimes b)(g_1\sigma, g_2\sigma').$$

Comme σ et σ' sont des isométries il est clair que

$$|\mathscr{G}(\rho \otimes \tau(a \otimes b))(g_1, g_2)| \leqq |c_2^{-1}|\, |e_1^*|\, \|\mathscr{G}(a \otimes b)\|,$$

ce qui prouve (40).

On déduit des relations (39), (40) que

$$\rho \otimes \tau(\Re(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)) \subset \Re(L \hat{\otimes}_R M).$$

D'autre part le Théorème 6, § 4.3, montre que

$$\Re(L \hat{\otimes}_R M) \subset \Re(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty);$$

les conditions d'application du Théorème 6 sont satisfaites, on a:

$$|\mathfrak{D}_{LC\infty/L}| = |\mathfrak{D}_{MC\infty/M}| = 1$$

puisque $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$ (Théorème 3, § 3.2.2).

Ainsi la relation (39) montre que

$$\rho \otimes \tau(\Re(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)) \supset \rho \otimes \tau(\Re(L \hat{\otimes}_R M)) = \Re(L \hat{\otimes}_R M).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Ainsi

(41) $\rho \otimes \tau(\mathfrak{R}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)) = \mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$.

Puisque $\mathfrak{D}_{RC_\infty/R} = (0)$ le Théorème 3, § 3.2.2, montre que

$$|\mathfrak{D}_{LC_\infty/RC_\infty}| = |\mathfrak{D}_{MC_\infty/RC_\infty}| = 1$$

et alors le Théorème 6, § 4.3, dit que $\mathfrak{R}(RC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)$ est l'idéal fermé engendré par $\mathfrak{R}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$. Or le Théorème 11 montre que le R-espace vectoriel engendré par $\alpha(\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty))$ est dense dans $\mathfrak{R}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$. Ainsi le $L \otimes_R M$-module engendré par $\alpha(\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty))$ est dense dans $\mathfrak{R}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$.

Il suit alors de (41) et du fait que $\rho \otimes \tau$ est continu que

$$\rho \otimes \tau(\alpha(\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)))$$

est dense dans $\mathfrak{R}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)$. Il reste donc à montrer que

$$\rho \otimes \tau(\alpha(\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)))$$

est un ensemble de nilpotents.

Soit $z \in \mathfrak{N}_{S,d}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ et $(z_k)_k$ une suite convergente vers z et satisfaisant i), ii) de la Définition 9, § 6.2,

(42) $z_k \in C_{s_k} \otimes_{C'} C_{s_k}$

(43) $\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}(z_k)\| \, |p^{-s_k/d}| = 0$.

Soit k_0 un entier tel que $e_1^* \in RK_{s_{k_0}}$. Alors pour tout $k \geqq k_0$, on a

$$\rho \otimes \tau(z_k) \in L \otimes_R RC_{s_k}.$$

Les relations (40) et (43) montrent que

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}(\rho \otimes \tau(z_k))\| \cdot |p^{-s_k/d}| = 0.$$

Soit donc

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}(\rho \otimes \tau(z_k))\| \cdot |\mathfrak{D}_{RC_{s_k}/R}|^{-1/d} = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}((\rho \otimes \tau(z_k))^d)\| \cdot |\mathfrak{D}_{RC_{s_k}/R}|^{-1} = 0.$$

Comme $(\rho \otimes \tau(z_k))^d \in L \otimes_R RC_{s_k}$, le Théorème 5, § 4.2, montre que

$$\lim_{k\to\infty} (\rho \otimes \tau(z_k))^d = 0.$$

Donc que

$$(\rho \otimes \tau(z))^d = 0.$$

Ainsi $\rho \otimes \tau(\alpha(\mathfrak{N}_S(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)))$ est un ensemble de nilpotents et le théorème est démontré.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Cas où $M \cap RC_\infty$ est de degré fini sur R. Ce cas nécessite quelques propositions et lemmes préliminaires.

PROPOSITION 18. *Soit R une extension algébrique du corps local K. Alors il existe une constante c_1 ne dépendant que de K telle que pour toute extension algébrique M de R satisfaisant*

$$|\mathfrak{D}_{M/R}| < |p|^{2s}$$

où $s \in \mathbf{N}$, on ait

$$c_1 < |\mathfrak{D}_{MC_s/M}|.$$

Preuve. On peut supposer que M est de degré fini sur R. De plus il existe une extension R' de degré fini sur K, $R' \subset R$ et une extension M' de R' tels que:

$$[M' : R'] = [M : R], \quad [RC_s : R] = [R'C_s : R']$$

et

$$|\mathfrak{D}_{M'/R'}| < |p|^{2s}.$$

D'autre part on a:

$$|p^n| < |\mathfrak{D}_{C_n/\mathbf{Q}_p}|$$

donc

$$|p^n| < |\mathfrak{D}_{R'C_n/R'}|.$$

Si $n \geqq 1$

$$|\mathfrak{D}_{M'C_n/R'C_n}| = |\mathfrak{D}_{M'/R'}| \cdot |\mathfrak{D}_{M'C_n/M'}| \cdot |\mathfrak{D}_{R'C_n/R'}|^{-1},$$

donc

$$|\mathfrak{D}_{M'C_n/R'C_n}| \leqq |p|^{2s-n} \leqq |p|^{2(s-n)}.$$

Ainsi la Proposition 9, § 3.2.1, montre que:

$$|\mathfrak{D}_{M'C_{n+1}/M'C_n}| > |p|^{\alpha_n} \quad \text{où } \alpha_n = 1/(p^{(s-n)-1}).$$

Donc

$$|\mathfrak{D}_{M'C_s/M'}| > |\mathfrak{D}_{M'C_1/M'}|\, |p|^{\sum_{n=1}^{s-1} \alpha_n} \geqq |p|^2.$$

PROPOSITION 19. *Soient R une extension algébrique du corps local K et M une extension algébrique de R telle que $M \cap RK_\infty$ soit de dimension finie sur R et $\mathfrak{D}_{M/R} = (0)$. Soit $(M_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'extensions de degré fini de R*

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

satisfaisant les conditions suivantes:

(44) $M \cap RC_\infty \subset M_k \subset M_{k+1} \subset M$ *pour tout* $k \in \mathbf{N}$

(45) $\lim_{k\to\infty} |\mathfrak{D}_{M_k/R}| = 0$

(46) *soit* s_k *l'entier défini par*

$$|p|^{2s_k+1} < |\mathfrak{D}_{M_k/R}| < |p|^{2s_k}$$

la suite s_k *est strictement croissante et* $s_0 \geqq 1$.

Soit $\pi \in M_0$ tel que $|\pi| < |p^4|c_1$ *où* c_1 *est défini par la Proposition* 18. *Alors il existe une base* $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *de* MC_∞ *sur* M *satisfaisant les propriétés suivantes:*

i) $\{e_1, e_2, \ldots, e_{\sigma_k}\}$ *est une* $|\pi|^k$*-base orthogonale de* $M_kC_{s_k}$ *sur* M_k *et aussi une* $|\pi|^k$*-base de* MC_{s_k} *sur* M, *où* $\sigma_k = [M_kC_{s_k} : M_k]$ *et où* $e_1 = 1$;

ii) *la base duale* $\{e_1^k, e_2^k, \ldots, e_{\sigma_k}^k\}$ *de* $\{e_1, e_2, \ldots, e_{\sigma_k}\}$ *par rapport à la forme bilinéaire*

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{M_kC_{s_k}/M_k}(xy)$$

est telle que

$$|e_i^k| \leqq |\pi|^{-k} \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq \sigma_k.$$

Preuve. Il existe dans M_k un élément π_k satisfaisant

$$|p|^{1/p^{s_k}} \leqq |\pi_k| < 1;$$

si R est à valuation discrète, l'uniformisante de M_k satisfait cette relation puisque

$$|\mathfrak{D}_{M_k/R}| > p^{2s_k+1},$$

si R est à valuation dense il existe dans R un élément π_k satisfaisant cette inégalité. On a:

$$\prod_{k=0}^{\infty} |\pi_k| \geqq |p|.$$

On construit la base $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ par récurrence sur k de la façon suivante: soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_{\sigma_k}\}$ une $|\pi|^k$-base de $M_kC_{s_k}$ sur M_k telle que

(47) $|\pi_1\pi_2 \ldots \pi_k| < |e_i| \leqq 1$ pour $1 \leqq i \leqq \sigma_k$

(48) $|e_i^k| \leqq |\pi|^{-k}$ pour $1 \leqq i \leqq \sigma_k$

où (e_i^k) désigne la base duale de $\{e_1, e_2, \ldots, e_{\sigma_k}\}$ par rapport à la forme bilinéaire

$$(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{M_kC_{s_k}/M_k}(xy).$$

Nous allons compléter cette base en une base de $M_{k+1}C_{s_{k+1}}$ sur M_{k+1}. Les relations (47) et (48) montrent que $\{e_1, e_2, \ldots, e_{\sigma_k}\}$ est une $|\pi|^k$-base

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

de MC_{s_k} sur M et en particulier de $M_{k+1}C_{s_k}$ sur M_{k+1}. Soit (f_j) une $|\pi_{k+1}|$-base de $M_{k+1}C_{s_{k+1}}$ telle que

$$|\pi_{k+1}| \leqq |f_j| \leqq 1 \quad \text{et} \quad f_1 = 1.$$

Alors $(e_i f_j)_{1 \leqq i \leqq \sigma_k, j}$ est une $|\pi^k \pi_{k+1}|$-base de $M_{k+1}C_{s_{k+1}}$ sur $M_{k+1}C_{s_k}$ telle que

$$|\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_k \pi_{k+1}| < |e_i f_j| \leqq 1.$$

On en déduit que

$$O_{M_{k+1}C_{s_{k+1}}} \subset \bigoplus_{i,j} O_{M_{k+1}} \frac{e_i f_j}{\pi^k \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_k \pi_{k+1}^2}.$$

Si $((e_i f_j)^*)_{i,j}$ est la base duale de $(e_i f_j)_{i,j}$ par rapport à la forme bilinéaire

$$(x, y) \mapsto \operatorname{Tr}_{M_{k+1}C_{s_{k+1}}/M_{k+1}}(xy),$$

on a:

$$(\pi^k \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_k \pi_{k+1}^2) \bigoplus_{i,j} O_{M_{k+1}}(e_i f_j)^* \subset \mathfrak{D}^{-1}_{M_{k+1}C_{s_{k+1}}/M_{k+1}}$$

ce qui prouve en utilisant la Proposition 18 que

$$|(e_i f_j)^*| \leqq |\pi^k \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_k \pi_{k+1}^2|^{-1} c_1^{-1} \leqq |\pi|^{-(k+1)}.$$

Ainsi on peut construire une $|\pi|^{k+1}$-base de $M_{k+1}C_{s_{k+1}}$ sur M_{k+1} qui complète $\{e_1, e_2, \ldots, e_{\sigma_k}\}$ et qui satisfait (47) et (48).

Il est clair que (47) et (48) impliquent i) et ii), ce qui montre la Proposition 19.

Définition 12. Soient R une extension algébrique du corps K, M une extension algébrique de R telle que $\mathfrak{D}_{M/R} = (0)$. Soit $(M_k)_k$ une suite de sous-corps de M satisfaisant les hypothèses de la Proposition 19. Puisque

$$[M_k C_{s_k} : M_k] = [MC_{s_k} : M] = \sigma_k,$$

soient $h_1, h_2, \ldots, h_{\sigma_k} \in \operatorname{Gal}(\bar{K}/M)$ des M-automorphismes de $\bar{K}$ dont les restrictions à $M_k C_{s_k}$ sont les σ_k, M_k-homomorphismes de $M_k C_{s_k}$ dans $\bar{K}$.

Soient $e_1{}^k$ défini dans la Proposition 19 et τ_k la M-forme linéaire sur $\bar{K}$ définie par

$$\tau_k(x) = \sum_{i=1}^{\sigma_k} (e_1{}^k x)^{h_i}.$$

Nous avons:

$$|\tau_k(x)| \leqq c^{-k}|x| \quad \text{si } c = |\pi|,$$

ainsi τ_k se prolonge par continuité à $\bar{K}$ en une application toujours notée τ_k.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

En particulier si $x \in MC_{s_k}$, c'est-à-dire

$$x = \sum_{i=1}^{\sigma k} \lambda_i e_i \quad \text{avec } \lambda_i \in M,$$

par définition de la base duale on a

$$\tau_k(x) = \mathrm{Tr}_{MC_{s_k}/M}(e_1{}^k x) = \lambda_1,$$
$$\tau_k(x) \in M_k \quad \text{si } x \in M_k C_{s_k},$$
$$\tau_k(x) \in M \quad \text{si } x \in MC_{s_k},$$
$$\tau_k(x) = x \quad \text{si } x \in \hat{M}.$$

De plus si $x \in MC_{s_k}$, on a

$$\tau_{k+1}(x) = \tau_k(x).$$

LEMME 14. *Soient C' une extension de degré fini de $\mathbf{Q}_p$ telle que $C' \subset C_\infty$, $r \in \mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$, $S \subset \mathbf{N}$, $0 < c < 1$, $\epsilon > 0$. Alors il existe un entier $d \geqq 1$, $z \in \mathfrak{R}_{S,d}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ et une suite z_k convergente vers z telle que*

i) $z_k \in C_{s_k} \otimes_{C'} C_{s_k}$ *où* $s_k \in S$

ii) $s_{k+1} > s_k$

iii) $\|z - z_k\| < \epsilon c^{2(k+1)}$, $\|z - r\| < \epsilon$

iv) $\lim_{k\to\infty} c^{-k}\|\mathcal{G}(z_k)\| \cdot |p^{-s_k/d}| = 0.$

Preuve. Le Théorème 10, § 6.2, montre qu'il existe un entier $d \geqq 1$ et $z \in \mathfrak{R}_{S,d}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ tels que $\|r - z\| < \epsilon$. D'après la Définition 9 de $\mathfrak{R}_{S,d}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$, il existe une suite $(y_k)_k$ convergente vers z telle que

(49) $\quad y_k \in C_{t_k} \otimes_{C'} C_{t_k}$ où $t_k \in S$

(50) $\quad \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}(y_k)\| \, |p^{-t_k/d}| = 0.$

Il est clair que toute suite infinie extraite de $(y_k)_k$ satisfait toujours (49), (50). Soit donc $(y_{\sigma(k)})_k$ une suite extraite telle que

(51) $\quad \|z - y_{\sigma(k)}\| < \epsilon c^{2(k+1)}.$

Toute suite infinie extraite de $(y_{\sigma(k)})_k$ satisfait toujours (51).

Soit $(y_{\sigma'\circ\sigma(k)})_k$ une suite extraite de $(y_{\sigma(k)})_k$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} c^{-k}\|\mathcal{G}(y_{\sigma'\circ\sigma(k)})\| \, |p^{-t_{\sigma'\circ\sigma(k)}}| = 0$$

et

$$t_{\sigma'\circ\sigma(k+1)} > t_{\sigma'\circ\sigma(k)}.$$

Ainsi on pose

$$z_k = y_{\sigma'\circ\sigma(k)}$$
$$s_k = t_{\sigma'\circ\sigma(k)}$$

et la suite $(z_k)_k$ satisfait i), ii), iii), iv).

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

LEMME 15. *Soient* $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$, $S \subset \mathbf{N}$, $0 < c < 1$, $\epsilon > 0$. *Alors il existe* $d \geqq 1$, $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathfrak{N}_{S,d}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ *et des suites* $(z_{i,k})_k$ *telles que*

i) $z_{i,k} \in C_{s_k} \otimes_{C'} C_{s_k}$ *où* $s_k \in S$

ii) $\|z_i - z_{i,k}\| < \epsilon c^{2(k+1)}$, $\|z_i - r_i\| < \epsilon$

iii) $\lim_{k\to\infty} c^{-k}\|\mathcal{G}(z_{i,k})\| \, |p^{-s_k/d}| = 0$.

Preuve. Le Lemme 14 permet, par récurrence sur i, $1 \leqq i \leqq n$ de montrer qu'il existe un entier $d_i \geqq 1$, $z_i \in \mathfrak{N}_{S,d_i}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ et une suite $(y_{i,k})_k$ telle que

(52) $y_{i,k} \in C_{s_{i,k}} \otimes_{C'} C_{s_{i,k}}$ où $s_{i,k} \in S^{i-1} = \{s_{i-1,k}\}_k$, $S = S^0$

(53) $s_{i,k+1} > s_{i,k}$

(54) $\|z_i - y_{i,k}\| < \epsilon c^{2(k+1)}$, $\|r_i - z_i\| < \epsilon$

(55) $\lim_{k\to\infty} c^{-k}\|\mathcal{G}(y_{i,k})\| \cdot |p^{-s_{i,k}/d_i}| = 0$.

Toute suite infinie extraite de $(y_{i,k})_k$ satisfait (52), (53), (54), (55). Soit $(\sigma_i(k))_k$ la suite définie par

$$s_{i,\sigma_i(k)} = s_{n,k}.$$

Posons

$$z_{i,k} = y_{i,\sigma_i(k)}$$
$$s_k = s_{n,k}$$
$$d = \max_{1\leqq i\leqq n} d_i.$$

Alors les suites $(z_{i,k})_k$ satisfont i), ii), iii).

THÉORÈME 13. *Soient* R *une extension algébrique du corps local* K, L *et* M *deux extensions algébriques de* R *telles que* $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$, M *est de dimension dénombrable sur* R, *et* $M \cap RC_\infty$ *est de degré fini sur* R. *Alors le nilradical* $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ *est dense dans le radical* $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$.

Preuve. Puisque $\mathfrak{D}_{L/R} = (0)$ le Théorème 3, § 3.2.2, montre que $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$, ainsi $C' = R \cap C_\infty$ est de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$. Soient K_0' le sous-corps de KC' défini par le Lemme 10 et

$$r \in \mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M) \subset \mathfrak{R}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty) \quad \text{tel que} \quad \|r\| < |\mathfrak{D}_{R/K'_0}|.$$

Soient $c = |p^5|c_1$ où c_1 est défini par la Proposition 18, c_2 défini par la Définition 11 et $\epsilon_1 > 0$.

Montrons qu'il existe $l_i \in LC_\infty$, $m_i \in MC_\infty$ et $r_i \in \mathfrak{R}(C_\infty \hat{\otimes}_{C'} C_\infty)$ tels que

$$(56) \quad \left\| r - \sum_{i=1}^{n} (l_i \otimes m_i)\alpha(r_i) \right\| < \epsilon_1 c c_2,$$
$$|l_i| \leqq 1, \ |m_i| \leqq 1, \ \|r_i\| \leqq 1.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Puisque r est limite d'une suite de $L \otimes_R M$ il existe une extension L' de R de dimension dénombrable sur R, telle que $L' \subset L$ et $r \in \mathfrak{R}(L' \hat{\otimes}_R M)$. Puisque $\mathfrak{D}_{RC\infty/R} = (0)$ on a

$$|\mathfrak{D}_{L'C\infty/RC\infty}| = |\mathfrak{D}_{MC\infty/RC\infty}| = 1$$

(Théorème 3, § 3.2.2). Alors la Proposition 12, § 4.3, montre qu'il existe $\lambda_j \in L'C_\infty$, $\mu_j \in MC_\infty$, $z_j \in \mathfrak{R}(L' \hat{\otimes}_R M)$ tels que

$$\left\|r - \sum_j (\lambda_j \otimes \mu_j)z_j\right\| < \epsilon_1 c c_2 \tag{57}$$

$$|\lambda_j| \leqq 1, |\mu_j| \leqq 1 \quad \text{et} \quad |z_j| < |\mathfrak{D}_{R/K_0'}|.$$

D'autre part, pour chaque z_j il existe une extension R' de KC' de dimension au plus dénombrable sur K, telle que

$$R' \subset R, y_j \in R'C_\infty \hat{\otimes}_{R'} R'C_\infty \quad \text{et} \quad z_j = \beta(y_j)$$

(selon les notations du Lemme 12, § 6.3). Alors le Lemme 13, § 6.3, montre qu'il existe $z_{j,\nu} \in \mathfrak{R}(C_\infty \otimes_{C'} C_\infty)$ tels que

$$z_j = \sum_\nu u_\nu \cdot \alpha(z_{j,\nu})$$

où $u_\nu \in R'$, $\max_\nu \|z_{j,\nu}\| \leqq 1$ et $\lim_{\nu\to\infty} z_{j,\nu} = 0$. Ce qui prouve la relation (56).

Soit $(M_k)_k$ une suite croissante de sous-corps de M satisfaisant les hypothèses de la Proposition 19 et $\bigcup_k M_k = M$.

Soit σ_k l'entier défini par

$$|p|^{2\sigma_k+1} < |\mathfrak{D}_{M_k/R}| \leqq |p|^{2\sigma_k}.$$

Il existe un entier k_0 tel que $m_i \in M_{k_0}C_{k_0}$ pour $1 \leqq i \leqq n$.

Soit

$$S = \{\sigma_k | k \geqq k_0\}.$$

Si l'on pose $\epsilon = \epsilon_1 c c_2$, soit $(z_{i,k})$ la suite associée à $r_1, r_2, \ldots, r_n$ satisfaisant les relations i), ii), iii) du Lemme 15.

En particulier,

$$z_{i,k} \in C_{s_k} \otimes_{C'} C_{s_k} \quad \text{où } s_k \in S.$$

Pour tout entier k choisissons un entier α_k tel que

$$\sigma_{\alpha_k} = s_k.$$

Alors

$$|p|^{2s_k+1} < |\mathfrak{D}_{M_{\alpha_k}/R}| \leqq |p|^{2s_k}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Soient $M_k' = M_{\alpha k}$ et τ_k la $\hat{M}$-forme linéaire de $\hat{\hat{K}}$ associée à la suite $(M_k')_k$. Soit ρ la $\hat{L}$-forme linéaire sur $(LC_\infty)^\wedge$ définie par la Définition 12. Posons:

$$z_k = \rho \otimes \tau_k\left(\sum_{i=1}^{n} (l_i \otimes m_i) z_{i,k}\right).$$

Puisque $m_i \in M_{k_0} C_{k_0} \subset M_1' C_{s_1}$, que $z_{i,k} \in C_{s_k} \otimes_{C'} C_{s_k}$, nous avons:

$$z_k \in L \otimes_R M_k'.$$

Puisque $r \in L \hat{\otimes}_R M$, nous avons

$$r = \rho \otimes \tau_1(r).$$

Ainsi

$$r - z_1 = \rho \otimes \tau_1\left(r - \sum_{i=1}^{n} (l_i \otimes m_i) z_{i,1}\right).$$

Donc

$$\|r - z_1\| \leqq c_2^{-1} c^{-1} \epsilon = \epsilon_1.$$

De plus:

$$z_{k+1} - z_k = \rho \otimes \tau_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{n} (l_i \otimes m_i) z_{i,k+1}\right) - \rho \otimes \tau_k\left(\sum_{i=1}^{n} (l_i \otimes m_i) z_{i,k}\right)$$

$$z_{k+1} - z_k = \rho \otimes \tau_{k+1}\left(\sum_{i=1}^{n} (l_i \otimes m_i)(z_{i,k+1} - z_{i,k})\right).$$

Donc

$$\|z_{k+1} - z_k\| \leqq c_2^{-1} c^{-(k+1)} \max_i \|z_{i,k+1} - z_{i,k}\| \leqq \epsilon_1 c^{k+1}.$$

Ainsi la suite $(z_k)_k$ est convergente, soit z sa limite. Nous avons:

$$\|r - z\| \leqq \epsilon_1.$$

Il reste à montrer que $z^d = 0$. Posons

$$z_{i,k} = \sum_j a_j \otimes b_j, \quad \text{où } a_j, b_j \in C_{s_k}.$$

On a:

$$\mathscr{G}(\rho \otimes \tau_k((l_i \otimes m_i) z_{i,k}))(g_1, g_2) = \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} \sum_j (l_i a_j f_1^{sk})^{g_1^{\sigma}} (m_i b_j e_1^{k})^{g_2^{\sigma'}}$$

où σ, σ' parcourt un ensemble fini d'éléments de Gal $(\bar{K}/R)$

$$\mathscr{G}(\rho \otimes \tau_k((l_i \otimes m_i)z_{i,k}))(g_1, g_2) = \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} (l_i f_1^{sk})^{g_1\sigma} (m_i e_1^{k})^{g_2\sigma'} \left(\sum_j a_j^{g_1\sigma} b_j^{g_2\sigma'} \right).$$

Donc:

$$\mathscr{G}(\rho \otimes \tau_k((l_i \otimes m_i)z_{i,k}))(g_1, g_2) = \sum_{\sigma} \sum_{\sigma'} (l_i f_1^{sk})^{g_1\sigma} (m_i e_1^{k})^{g_2\sigma'} \mathscr{G}(z_{i,k})(g_1\sigma, g_2\sigma').$$

Puisque les éléments de Gal $(\bar{K}/R)$ sont des isométries, on a:

$$\|\mathscr{G}((l_i \otimes m_i)z_{i,k})\| \leqq c_2^{-1}c^{-k}\|\mathscr{G}(z_{i,k})\|.$$

Donc:

$$\|\mathscr{G}(z_k)\| \leqq c_2^{-1}c^{-k} \max_i \|\mathscr{G}(z_{i,k})\|.$$

Comme

$$\lim_{k\to\infty} c^{-k}\|\mathscr{G}(z_{i,k})\| \, |p^{-sk/d}| = 0,$$

on a:

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathscr{G}(z_k)\| \cdot |\mathfrak{D}_{M_{k}'/R}|^{-1/d} = 0.$$

Soit

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathscr{G}(z_k^{d})\| \cdot |\mathfrak{D}_{M_{k}'/R}|^{-1} = 0.$$

Puisque $z_k^d \in L \otimes_R M_k'$, le Théorème 5, § 4.2, montre que

$$\lim_{k\to\infty} z_k^{d} = 0, \quad \text{donc } z^d = 0.$$

6.4.2. *Le théorème fondamental.*

THÉORÈME 14. *Soient K un corps local de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle $p > 0$, R, L, M des extensions algébriques de K telles que $R \subset L$, $R \subset M$ et $\mathfrak{D}_{L/R} = \mathfrak{D}_{M/R} = (0)$. Alors la transformation de Gelfand $\mathscr{G}$ de $L \hat{\otimes}_R M$ induit un isomorphisme isométrique de $L \hat{\otimes}_R M/\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ sur $\mathscr{G}(L \hat{\otimes}_R M)$. Le nilradical $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans le radical $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$ et*

$$\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M) \neq \mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M).$$

Preuve. Soit $C' = R \cap C_\infty$ puisque $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$, alors le début de la preuve du Lemme 10, § 6.3, montre que C' est de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$, ainsi $\mathfrak{D}_{C_\infty/C'} = (0)$. Soit K_0' un sous-corps complet du corps local KC' non ramifié sur C' dont le corps résiduel est celui de KC' (Théorème 4, p. 46 [**17**]). Puisque C_∞ est complètement ramifié sur C' il en résulte que

$$O_{K_0'C_\infty} = O_{K_0'}O_{C_\infty}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

et donc que

$$\mathfrak{D}_{C\infty/C'} = \mathfrak{D}_{K_0'C\infty/K_0'}.$$

Comme

$$\mathfrak{D}_{R/K_0'} \cdot \mathfrak{D}_{RC\infty/R} = \mathfrak{D}_{RC\infty/K_0'C\infty} \cdot \mathfrak{D}_{K_0'C\infty/K_0'}$$

et que $\mathfrak{D}_{R/K_0'} \neq (0)$ (puisque $\mathfrak{D}_{R/K} \neq (0)$), il résulte que $\mathfrak{D}_{RC\infty/R} = (0)$. Alors le Théorème 3, § 3.2.2, montre que:

$$|\mathfrak{D}_{LC\infty/RC\infty}| = |\mathfrak{D}_{MC\infty/RC\infty}| = 1.$$

Comme la transformation de Gelfand $\mathscr{G}$ de $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty$ induit un isomorphisme isométrique de $RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty/\mathfrak{R}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$ sur $\mathscr{G}(RC_\infty \hat{\otimes}_R RC_\infty)$ (Théorème 11), alors le Théorème 6, § 4.3, montre que la transformation de Gelfand $\mathscr{G}$ de $LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty$ induit un isomorphisme isométrique de $LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty/\mathfrak{R}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)$ sur $\mathscr{G}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)$.

Nous allons montrer que ce fait a pour conséquence que la transformation de Gelfand $\mathscr{G}$ de $L \hat{\otimes}_R M$ induit un isomorphisme isométrique de $L \hat{\otimes}_R M/\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$ sur $\mathscr{G}(L \hat{\otimes}_R M)$.

Soient $0 < c < 1$, $(e_i)_i$ une c-base orthogonale de LC_∞ sur L, (f_j) une c-base orthogonale de MC_∞ sur M, alors $(\mathscr{G}(e_i \otimes f_j))_{i,j}$ est une c^2-base orthogonale de $\mathscr{G}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)$ sur $\mathscr{G}(L \hat{\otimes}_R M)$, d'après la Proposition 24, § 4.3, puisque

$$1 = |\mathfrak{D}_{LC\infty/L}| = |\mathfrak{D}_{MC\infty/M}|$$

(Théorème 3, § 3.2.2). Soit

$$\varphi \in \mathscr{G}(L \hat{\otimes}_R M) \subset \mathscr{G}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty),$$

alors il existe $z \in LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty$ tel que

$$c\|z\| \leqq \|\varphi\| \quad \text{et} \quad \mathscr{G}(z) = \varphi.$$

Alors z se décompose sous la forme:

$$z = \sum_{i,j} z_{i,j} e_j \otimes f_j,$$

avec

$$(58) \quad \begin{aligned} &c^2 \max_{i,j} \|z_{i,j}\| \cdot \|e_i\| \cdot \|f_j\| \leqq \|z\|, \\ &\lim_{i,j\to\infty} \|z_{i,j}\| \cdot \|e_i\| \, \|f_j\| = 0 \quad \text{et} \quad z_{i,j} \in L \hat{\otimes}_R M. \end{aligned}$$

De plus:

$$\mathscr{G}(z) = \sum_{i,j} \mathscr{G}(z_{i,j}) \mathscr{G}(e_i \otimes f_j).$$

Comme $(\mathscr{G}(e_i \otimes f_j))_{i,j}$ est une c^2-base de $\mathscr{G}(LC_\infty \hat{\otimes}_R MC_\infty)$ sur $\mathscr{G}(L \hat{\otimes}_R M)$ et que $e_1 = f_1 = 1$, on a:

$$\mathscr{G}(z_{i,j}) = 0 \quad \text{pour } (i, j) \neq (1, 1)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

donc

$$\mathscr{G}(z_{1,1}) = \mathscr{G}(z) = \varphi$$

et la relation (51) montre que

$$c^2\|z_{1,1}\| \leqq \|z\|.$$

Par suite

$$c^3\|z_{1,1}\| \leqq \|\varphi\|.$$

Ce qui prouve que la transformation de Gelfand de $L \hat{\otimes}_R M$ induit un isomorphisme isométrique de $L \hat{\otimes}_R M/\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$ sur $\mathscr{G}(L \hat{\otimes}_R M)$.

Il reste donc à montrer que $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$. La théorie de Galois montre qu'il existe un corps T intermédiaire entre $C' = R \cap C_\infty$ et C_∞ tel que

$$RT = RC_\infty \cap M.$$

Si T est de dimension infinie sur C' alors la théorie de Galois montre que C_∞ est de dimension finie sur T, ainsi $\mathfrak{D}_{T/C'} = (0)$ et $\mathfrak{D}_{RT/R} = (0)$. Dans ce cas posons $M' = RT \subset M$.

Si T est de dimension finie sur C', alors $[T : C'] = [RT : R]$, dans ce cas, soit M' un sous-corps de M extension de R de dimension sur R dénombrable et telle que $\mathfrak{D}_{M'/R} = (0)$.

Les Théorèmes 11 et 12 montrent que $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M')$ est dense dans $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M')$. Puisque $\mathfrak{D}_{M'/R} = (0)$ alors $|\mathfrak{D}_{M/M'}| = 1$ (Théorème 3, § 3.2.2). Ainsi le Théorème 6, § 4.3, montre que le $L \otimes_R M$-module engendré par $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M')$ est un ensemble d'éléments nilpotents. Ce qui prouve que $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes} M)$.

COROLLAIRE. *Les hypothèses sont celles du Théorème* 14. *Soit* $x = (g_1, g_2)$ *un élément du spectre de* $L \hat{\otimes}_R M$, *alors* $x(L \hat{\otimes}_R M) = (L^{g_1}M^{g_2})\hat{}$, *le complété de* $L^{g_1}M^{g_2}$.

7. Produit tensoriel d'algèbres à spectre compact. Résumons les résultats des paragraphes 5 et 6 dans le théorème suivant.

THÉORÈME 15. *Soit K un corps local, R, L, M trois extensions algébriques de K qui sont traces sur $\bar{K}$, de sous-corps fermés de $\hat{\bar{K}}$ et telles que $R \subset L$ et $R \subset M$. Alors la transformation de Gelfand de $L \hat{\otimes}_R M$ est un morphisme strict. Le nilradical $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans le radical $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$. Si K est de caractéristique $p > 0$, $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$ est l'adhérence du radical de $L \otimes_R M$. Si K est de caractéristique nulle le radical de $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$ est nul si et seulement si la norme tensorielle est équivalente à la norme spectrale.*

Preuve. Les Théorèmes 7 (§ 5) et 14 (§ 6.4.2) et le corollaire du Théorème 5 (§ 4.2) montrent que $\mathscr{G}$ est un morphisme strict et que $\mathfrak{N}(L \hat{\otimes}_R M)$ est dense dans $\mathfrak{R}(L \hat{\otimes}_R M)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

7.1. *Produit tensoriel d'algèbres à spectre compact.* Le but du § 7 est de montrer que le Théorème 15 s'étend aux algèbres à spectre compact. Plus précisément nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 16. *Soit R une extension algébrique d'un corps local trace sur $\bar{R}$ d'un sous-corps fermé de $\hat{\bar{R}}$. Soient A_1 et A_2 deux $\hat{R}$-algèbres qui possèdent les propriétés suivantes:*

i) *Le spectre X_i de A_i est compact pour $i = 1, 2$.*

ii) *La transformation de Gelfand $\mathcal{G}_i$ de A_i est un morphisme strict pour $i = 1, 2$.*

iii) $\inf \{|\mathfrak{D}_{x_i(A_i)^s|R}| \,|x_i \in X_i$ et $\mathfrak{D}_{x_i(A_i)^s|R} \neq 0\} > 0$,

pour $i = 1, 2$ où $L^s = \bar{R}^s \cap L$ si $\bar{R}^s$ désigne la clôture algébrique séparable de R. Alors la $\hat{R}$-algèbre de Banach $A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$ satisfait les propriétés i), ii), iii).

Démonstration. Le spectre de $A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$ est homéomorphe à $X_1 \times X_2$, il est donc compact. Il est clair que iii) est satisfait puisque

$$(x_1, x_2)(A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2) = x_1(A_1)x_2(A_2),$$

le compositum dans $\hat{\bar{R}}$ des deux corps $x_i(A_i)$. Le seul problème est de montrer ii). Puisque $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ est un morphisme strict de $A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$ sur $\mathcal{G}_1(A_1) \hat{\otimes}_{\hat{R}} \mathcal{G}_2(A_2)$, on peut donc remplacer A_i par $\mathcal{G}_i(A_i)$, c'est-à-dire supposer que A_i est une sous-$\hat{R}$-algèbre fermée de $\mathcal{C}(X_i, \hat{\bar{R}})$ où X_i est le spectre de A_i. Ceci veut dire dans la terminologie de van Rooij et Schikhof que A_i est une C^*-algèbre.

7.2. *Les algèbres de fonctions continues sur un compact.* Traduisons ici un théorème de van Rooij et Schikhof.

THÉORÈME 17 ([**15**]). *Soient R une extension algébrique d'un corps local, $\bar{R}$ sa clôture algébrique, $\hat{R}$ et $\hat{\bar{R}}$ leur complétés. Soit A une sous-$\hat{R}$-algèbre fermée de $\mathcal{C}(X, \hat{\bar{R}})$ où X est le spectre de A.*

i) *Soient $f \in A, f \neq 0, x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \neq 0$,*

$$\mathcal{U} = \{x \in X |\, |f(x)| = |f(x_0)|\}.$$

Alors $\mathcal{U}$ est un ouvert fermé et la fonction caractéristique de $\mathcal{U}$ appartient à A.

ii) *Soient $x \in X$ et $x(A) = \{f(x) | f \in A\}$. Alors $x(A)$ est un sous-corps fermé de $\hat{\bar{R}}$ contenant $\hat{R}$.*

Provisoirement nous appellerons *ouf spécial* un ouvert et fermé $\mathcal{U}$ dont la fonction caractéristique appartient à A. Il suit que la famille des ouf spéciaux est stable par complémentaire, réunion finie, intersection finie.

Soit $x \in X$ et $\mathfrak{M}_x = \{f \in A | f(x) = 0\}$. Il suit du Théorème 17 que $\mathfrak{M}_x$ est un idéal maximal et que $A/\mathfrak{M}_x$ est isomorphe et isométrique à $x(A)$.

COROLLAIRE 1. *Soient $x \in X, \bar{x} = \{y \in X | \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y\}$, O un ouf tel que $\bar{x} \subset O$. Alors il existe un ouf spécial $\mathcal{U}$ tel que $\bar{x} \subset \mathcal{U} \subset O$.*

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Soit $z \notin O$, il existe $f \in \mathfrak{M}_x$ tel que $f(z) \neq 0$. Soit

$$\mathscr{U}_z = \{z' \in X \mid |f(z')| = |f(z)| \neq 0\}.$$

La famille $\{\mathscr{U}_z\}$ est un recouvrement spécial de $X - O$ qui est compact; il existe donc un recouvrement spécial $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \ldots, \mathscr{U}_n$ qui est fini. Clairement $x \notin \mathscr{U}_i$ et donc

$$x \in X - \left\{\bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{U}_i\right\} = \mathscr{U}$$

et $\mathscr{U}$ est un ouvert spécial. Ainsi donc on a $\bar{x} \subset \mathscr{U} \subset O$.

COROLLAIRE 2. *Soient $x, y \in X$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) $\mathfrak{M}_x = \{f \in A | f(x) = 0\} = \mathfrak{M}_y = \{f \in A | f(y) = 0\}$.

ii) *Il existe un $\hat{R}$-automorphisme continu g de $\hat{R}$ tel que $y = g \circ x$.*

Preuve. Clairement ii) implique i). On a le diagramme suivant avec $\varphi(f) = f(x)$ et $\psi(f) = f(y)$. Il existe donc un $\hat{R}$-isomorphisme isométrique

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ x(A) & & y(A) \end{tikzcd}$$

g de $x(A)$ sur $y(A)$ tel que $g \circ \varphi = \psi$. Alors g se prolonge en un $\hat{R}$-isomorphisme isométrique de $x(A). \bar{R}$ sur $y(A). \bar{R}$, donc par continuité en un automorphisme continu de $\hat{R}$.

7.3. *Quelques résultats sur le groupe G opérant sur X.*

LEMME 16. *Soient $x \in X$ et O un ouf tel que $G. x \subset O$. Alors il existe un ouf spécial $\mathscr{U}$ tel que $Gx \subset \mathscr{U} \subset O$.*

Preuve. Il existe un sous-groupe ouvert H de G tel que $HO = O$. Soient $g_1, g_2, \ldots, g_n$ les représentants de G modulo H et

$$\mathscr{U}' = \bigcap_{i=1}^{n} g_i O.$$

On a alors

$$Gx \subset \mathscr{U}' = G\mathscr{U}' \subset O.$$

Or les Corollaires 1 et 2 montrent qu'il existe un ouf spécial $\mathscr{U}$ tel que $Gx \subset \mathscr{U} \subset \mathscr{U}'$.

LEMME 17. *Soient $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, $\mathscr{W}$ un ouf stable par G tel que*

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

$(x_1, x_2) \in \mathscr{W}$. *Alors il existe des oufs spéciaux* $\mathscr{W}_i$, $i = 1, 2$, *tels que*

$$(x_1, x_2) \in \mathscr{W}_1 \times \mathscr{W}_2 \subset \mathscr{W}.$$

Preuve. Pour tout $g \in G$ il existe des oufs $\mathscr{U}_g$ et $\mathscr{V}_g$ tels que

$$(x_1, gx_2) \in \mathscr{U}_g \times \mathscr{V}_g \subset \mathscr{W}.$$

A cause de la compacité il existe un recouvrement fini tel que:

$$x_1 \times Gx_2 \subset (\mathscr{U}_1 \times \mathscr{V}_1) \cup \ldots \cup (\mathscr{U}_n \times \mathscr{V}_n) \subset \mathscr{W}.$$

Soit $\mathscr{U} = \mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2 \cap \ldots \cap \mathscr{U}_n$. Alors on a

$$x_1 \times Gx_2 \subset \mathscr{U} \times \{\mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2 \cup \ldots \cup \mathscr{V}_n\} \subset \mathscr{W}.$$

Ainsi $Gx_2 \subset \mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2 \ldots \cup \mathscr{V}_n$. D'après le Lemme 16 il existe un ouf spécial $\mathscr{W}_2$ tel que

$$Gx_2 \subset \mathscr{W}_2 \subset \mathscr{V}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{V}_n.$$

Il suit que

$$G(x_1 \times Gx_2) = Gx_1 \times Gx_2 \subset G\mathscr{U} \times \mathscr{W}_2 \subset G\mathscr{W} = \mathscr{W}.$$

D'après le Lemme 16 il existe un ouf spécial $\mathscr{W}_1$ tel que $Gx_1 \subset \mathscr{W}_1 \subset G\mathscr{U}$. Ce qui prouve le lemme.

7.4. *Démonstration du théorème*. Soit $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Considérons le diagramme commutatif suivant, où on suppose $A_i \subset \mathscr{C}(X_i, \hat{R})$:

$$\begin{array}{ccc}
A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2 & \xrightarrow{\mathscr{G}} & \mathscr{C}(X_1 \times X_2, \hat{\hat{R}}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle x_1 \otimes x_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle r} \\
x_1(A_1) \hat{\otimes}_{\hat{R}} x_2(A_2) & \xrightarrow{\mathscr{G}'} & \mathscr{C}(Gx_1 \times Gx_2, \hat{\hat{R}})
\end{array}$$

où $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ sont les transformations de Gelfand, r est la restriction à $Gx_1 \times Gx_2$. Soit $c > 0$ une constante telle que:

$$0 < c < \inf \{|\mathfrak{D}_{xi(A_i)^s|R}|\ |x_i \in X_i \text{ et } \mathfrak{D}_{xi(A_i)^s|R} \neq (0)\}$$

pour $i = 1, 2$.

Le Théorème 15 montre que $\mathscr{G}'$ est un morphisme strict et plus précisément la propriété suivante: pour tout $f_1 \in \mathscr{G}'(x_1(A_1) \hat{\otimes}_{\hat{R}} x_2(A_2))$ il existe $y \in x_1(A_1) \hat{\otimes}_{\hat{R}} x_2(A_2)$ tel que

$$\mathscr{G}'(y) = f_1 \quad \text{et} \quad c^2\|y\| \leqq \|f_1\|$$

(il faut pour cela utiliser le Théorème 5, la Proposition 12 et le Théorème 6 des § 4.2 et 4.3).

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

D'autre part $x_1 \otimes x_2$ est un morphisme strict et plus précisément pour tout $y \in x_1(A_1) \hat{\otimes}_R x_2(A_2)$ il existe $z \in A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$ tel que

$$x_1 \otimes x_2(z) = y \quad \text{et} \quad \|z\| = \|y\|.$$

Soit donc $f \in \mathcal{G}(A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2)$, il existe donc $z \in A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$ tel que

$$r(\mathcal{G}(z)) = r(f) \quad \text{et} \quad c^2\|z\| \leqq \|f\|.$$

Soit

$$\mathcal{W} = \{x \in X_1 \times X_2 \mid |\mathcal{G}(z)(x) - f(x)| < c^2\}.$$

Il est clair que $\mathcal{W}$ est un ouf stable par G. D'après le Lemme 17 il existe $\mathcal{W}_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, deux oufs spéciaux tels que

$$Gx \subset \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}.$$

Soit χ_i la fonction caractéristique de $\mathcal{W}_i$ on a donc

$$|\mathcal{G}((\chi_1 \otimes \chi_2)(z)(x) - f(x)| < c \quad \text{si } x \in \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$$

et

$$\mathcal{G}((\chi_1 \otimes \chi_2)(z)(x) = 0 \quad \text{si } x \notin \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2.$$

Ceci veut dire que pour tout $x \in X$, il existe un ouf $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2$, contenant x, avec $\mathcal{W}_i$ oufs spéciaux, de plus il existe $t_x \in A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$ tels que

$$|\mathcal{G}(t_x)(x') - f(x')| < c \quad \text{si } x' \in \mathcal{W}(x)$$
$$\mathcal{G}(t_x)(x') = 0 \quad \text{si } x' \notin \mathcal{W}(x)$$

et

$$c\|t_x\| < \|f\|.$$

Puisque X est compact on peut se ramener à une partition finie, $\mathcal{W}^1, \mathcal{W}^2, \ldots, \mathcal{W}^n$ avec des éléments $t^1, t^2, \ldots, t^n \in A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$. Posons alors $z = t^1 + t^2 + \ldots + t^n$, on a

$$\|\mathcal{G}(z) - f\| < c \quad \text{et} \quad c\|z\| < \|f\|.$$

Il est alors facile de construire par récurrence une suite de Cauchy (z_n) de $A_1 \hat{\otimes}_{\hat{R}} A_2$ telle que

$$\|\mathcal{G}(z_n) - f\| < c^n \quad \text{et} \quad c\|z_n\| < \|f\|.$$

Alors la limite z satisfait

$$\mathcal{G}(z) = f \quad \text{et} \quad c\|z\| < \|f\|,$$

ce qui montre que $\mathcal{G}$ est un morphisme strict.

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields. The Galois action*, Journal of Algebra *15* (1970), 417–428.
2. N. Bourbaki, *Topologie générale*, ch. 3 (Hermann, Paris, 1971).
3. ——— *Algèbre*, ch. 3 (Hermann, Paris, 1970).
4. ——— *Algèbre*, ch. 5, 2e édition (Hermann, Paris, 1959).
5. ——— *Algèbre*, ch. 8 (Hermann, Paris, 1958).
6. ——— *Théories spectrales*, ch. 1 (Hermann, Paris, 1967).
7. J. Fresnel et B. de Mathan, *Algèbres L^1 p-adiques*, Bull. Soc. Math. France *106* (1978), 225–260.
8. ——— *Algèbre d'un monoïde, idéaux de $L \otimes_R M$ et idéaux fermés de $L \hat{\otimes}_R M$* (non publié).
9. L. Gruson, *Théorie de Fredholm p-adique*, Bull. Soc. Math. France *94* (1966), 67–95.
10. M. Matignon, *Sous-corps fermés du complété de la clôture algébrique d'un corps local*, C.R.A.S. Acad. Sc. Paris *288* (1979), 1051–1054.
11. ——— *Sous-corps fermés du complété de la clôture algébrique d'un corps local*, Thèse de 3e cycle, Bordeaux (1979).
12. A. F. Monna, *Analyse non archimédienne*, Erg. der. Math. (Springer Verlag, 1970).
13. M. M. Parmenter and S. K. Sehgal, *Non archimedean group algebras*, Journal of Number Theory *7* (1975), 376–384.
14. A. C. M. van Rooij, *Non archimedean functional analysis* (Pure and applied mathematics, New York, Dekker, 1977).
15. A. C. M. van Rooij and W. H. Schikhof, *Non archimedean commutative C*-algebras*, Proceedings of the koninklijke nederlandse akademie van wetenshappen *76* (1973), 381–389.
16. S. Sen, *On automorphisms of local fields*, Annals of Math. *90* (1969), 33–40.
17. J.-P. Serre, *Corps locaux* (Hermann, 2e édition, 1968).
18. ——— *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adique*, I.H.E.S., Publications Mathématiques, n° 12.
19. J. Tate, *p-divisible groups*, Proceedings on a conference on local fields.

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,
Laboratoire associé au CNRS n° 226,
Talence, France

https://doi.org/10.4153/CJM-1983-014-6 Published online by Cambridge University Press