N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 47 (1972) 145–154

DIRECTION DE JULIA DE SYSTÈMES ET SOMME DE FONCTIONS NORMALES

NOBUSHIGE TODA

1. Introduction. Dans ce mémoire, on étend quelques résultats obtenus dans [10] au système et comme application, on considère sur la somme de fonctions normales.

Soient D un domaine dans le plan $|z| < \infty$, $g_0(z)$, $g_1(z), \cdots, g_n(z)$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ fonctions holomorphes dans D n'ayant pas de zéros communs à toutes et $g = (g_0, \cdots, g_n)$ un système de ces $n+1$ fonctions dans D. On dit qu'une combinaison linéaire à coefficients constants

$$a_0g_0(z) + a_1g_1(z) + \cdots + a_ng_n(z) \qquad (\not\equiv 0)$$

est

1) lacunaire dans D si elle n'admet pas de zéro dans D;

2) exceptionnelle au sens de Picard dans D si elle n'admet qu'un nombre fini de zéros dans D au plus.

Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$; c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique du système f définie par Cartan [1].

DÉFINITION 1 (Direction de Julia). On dit que $J: \arg z = \theta_J$ $(0 \leqq \theta_J < 2\pi)$ est une *direction de Julia* du système f s'il n'y a qu'au plus $2n$ combinaisons linéaires des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Picard dans $\Delta_\varepsilon(\theta_J) = \{z; |\arg z - \theta_J| < \varepsilon\}$, ε étant positif quelconque.

Received December 21, 1970.
Revised December 15, 1971.

https://doi.org/10.1017/S0027763000014963 Published online by Cambridge University Press

Sur les fonctions exceptionnelles au sens de Julia que l'on utilise souvant, Ostrowski [7] et Lehto-Virtanen [5] étudient beaucoup de choses en détail.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg ([6], [8]) librement.

2. Systèmes à au moins une direction de Julia. Correspondant aux fonctions algébroïdes dans $|z| < \infty$ ([10]), on a le

THÉORÈME 1. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$. S'il y a au moins un rapport entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ n'étant pas exceptionnel au sens de Julia, le système f admet au moins une direction de Julia.*

On peut démontrer facilement ce théorème en modifiant un peu la démonstration du théorème 1 dans [10].

LEMME. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système dans le plan $|z| < \infty$ où $f_0, \cdots, f_n$ sont entières. Alors, pour tout $i \neq j$, on a*

$$T(r, f_i/f_j) - O(1) < T(r, f) < \sum_{k \neq j} T(r, f_k/f_j) + O(1)$$

où $f_j \not\equiv 0$ ([1], [9]).

COROLLAIRE 1. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ tel que*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = \infty .$$

Alors, le système f admet au moins une direction de Julia.

En effet, d'après le lemme, il existe au moins un rapport f_i/f_j tel que

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{T(r, f_i/f_j)}{(\log r)^2} = \infty .$$

Alors, grâce à un résultat dans [5], la fonction f_i/f_j n'est pas exceptionnelle au sens de Julia. Donc, en vertu du théorème 1, le système f admet au moins une direction de Julia.

COROLLAIRE 2. *Soit $f = (1, f_1, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans*

https://doi.org/10.1017/S0027763000014963 Published online by Cambridge University Press

le plan $|z| < \infty$. *Alors, le système* f *admet au moins une direction de Julia.*

En effet, d'après le lemme, il existe au moins une fonction f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ qui est transcendante. Par conséquent, la fonction $f_i = f_i/1$ n'est pas exceptionnelle au sens de Julia [7]. Donc, grâce au théorème 1, le système f admet au moins une direction de Julia.

THÉORÈME 2. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant dans le plan* $|z| < \infty$ *à au moins une direction de Julia et* A *une* $(n+1, n+1)$-*matrice régulière à éléments constants. Mettons*

$$(F_0, \cdots, F_n)^t = A(f_0, \cdots, f_n)^t ,$$

alors, un nouveau système $F = (F_0, \cdots, F_n)$, *qui est transcendant dans le plan* $|z| < \infty$, *admet au moins une direction de Julia.*

En effet, soit $\arg z = \theta_f$ une direction de Julia de f. Alors, on peut prouver facilement qu'elle est aussi une direction de Julia de F.

N.B. 1. L'inverse du théorème 1 n'est pas valide en général. En effet, on peut donner facilement un exemple-contre en utilisant une fonction méromorphe dans $|z| < \infty$ qui est exceptionnelle au sens de Julia, mais admet au moins une direction de Julia, qui est donnée par Zinno [12].

3. Systèmes sans direction de Julia. Dans ce paragraphe, on recherche sur le système qui n'admet pas de direction de Julia.

THÉORÈME 3. *Soient* $f = (f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant dans le plan* $|z| < \infty$ *sans direction de Julia et*

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \quad (\not\equiv 0) , \qquad G = \sum_{i=0}^{n} b_i f_i \quad (\not\equiv 0)$$

deux combinaisons linéaires à coefficients constants. Alors, le rapport F/G *est exceptionnel au sens de Julia.*

Démonstration. Supposons que F/G ne soit pas constante. Alors au moins une valeur des $a_i b_j - a_j b_i$ $(i \neq j)$ n'est pas égale à zéro. On peut supposer que $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$ et $f_0 \not\equiv 0$, $f_1 \not\equiv 0$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \cdots b_n \\ & & 1 \ddots \quad 0 \\ & 0 & \quad\quad 1 \end{pmatrix},$$

alors $|A| = a_0b_1 - a_1b_0 \neq 0$ et

$$(F, G, f_2, \cdots, f_n)^t = A(f_0, f_1, \cdots, f_n)^t .$$

Par conséquent, d'après le théorème 2 le système $(F, G, f_2, \cdots, f_n)$ n'admet pas de direction de Julia. Cela veut dire que F/G est exceptionnelle au sens de Julia en vertu du théorème 1.

COROLLAIRE 3. *Soit f un système comme dans le théorème* 3. *Alors, le système f n'admet pas de combinaisons linéaires, homogènes à coefficients constants et exceptionnelles au sens de Picard, c'est-à-dire, chaque combinaison à coefficients constants*

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \qquad (\not\equiv 0)$$

admet le zéro une infinité dénombrable de fois.

Démonstration. Par l'hypothèse, tous les rapports entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont exceptionnels au sens de Julia et d'après le lemme au moins un rapport est transcendant, de sorte que chaque fonction f_i est transcendante ou égale à zéro identiquement. Il y a au moins deux fonctions transcendantes et elles admettent le zéro une infinité dénombrable de fois. Soit F la combinaison donnée dans ce corollaire. Alors, d'après le théorème 3, les fonctions

$$F/f_i \qquad (i\,;\, a_i \neq 0, f_i \not\equiv 0)$$

sont exceptionnelles au sens de Julia, de sorte que F admet le zéro une infinité dénombrable de fois dans le plan $|z| < \infty$.

THÉORÈME 4. *Soit $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ sans direction de Julia tel qu'une des fonctions $f_0, \cdots, f_n$ (soit f_0) est un produit canonique. Alors, chaque combinaison $(\not\equiv 0)$ linéaire des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, homogène à coefficients constants n'admet pas de valeurs asymptotiques finies en point à l'infini.*

Démonstration. D'après l'hypothèse, l'inégalité (voir [1])

$$N(r, 0, f_0) \leqq T(r, f) + O(1)$$

entraîne que l'ordre de f_0 est zéro. De plus, grâce au lemme, pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a

$$T(r, f_i) \leqq T(r, f) + T(r, f_0) + O(1) ,$$

de sorte que toutes les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont d'ordre nul. Soit

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire à coefficients constants. Alors, F est transcendante d'après le corollaire 3. Si F admet une valeur asymptotique finie, il faut que l'ordre de F soit plus grand que $1/2$ d'après un resultat connu bien de Wiman. Mais, l'ordre de F est nul parce que $f_0, \cdots, f_n$ sont d'ordre nul. Cela veut dire que F n'admet pas de valeurs asymptotiques finies en point à l'infini.

DÉFINITION 2. Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ et

$$F = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire à coefficients constants. On dit que F est *exceptionnelle au sens de Valiron* si

$$\Delta(F) = 1 - \liminf_{r \to \infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} > 0 .$$

THÉORÈME 5. *Soient $f = (f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z| < \infty$ sans direction de Julia et*

$$F = a_0 f_0 + \cdots + a_n f_n \qquad (\not\equiv 0)$$

une combinaison linéaire quelconque à coefficients constants. Alors, on a

$$\Delta(F) = 0 .$$

Démonstration. On peut supposer que $a_0 f_0 \not\equiv 0$. D'après le théorème 3, F/f_0 es exceptionnelle au sens de Julia et F est transcendante. En appliquant un résultat d'Ostrowski [7] à F/f_0, il y a un nombre K_F indépendant de r tel que pour tout $r > 0$

$$|n(r, 0, F) - n(r, 0, f_0)| < K_F ,$$

par conséquent, on a

$$|N(r, 0, F) - N(r, 0, f_0)| < O(\log r) ,$$

de sorte que f étant transcendant

$$\Delta(F) = \Delta(f_0) . \tag{1}$$

Maintenant, considérons la fonction $w(z)$ définie par l'équation

$$f_0(z)w^n + f_1(z)w^{n-1} + \cdots + f_n(z) = 0 .$$

Alors, d'après un résultat de Valiron [11], on a

$$|T(r, w) - T(r, f)/n| < O(1)$$

et

$$N(r, w) = N(r, 0, f_0)/n .$$

Par conséquent, on a

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, w)}{T(r, w)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, f_0)}{T(r, f)} \tag{2}$$

De plus, comme on a démontré dans [10], on peut donner dans notre cas

$$\Delta(\infty, w) = 0 .$$

En conséquence, de (1) et (2), on a

$$\Delta(F) = 0 .$$

COROLLAIRE 4.

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)} = 0 .$$

N.B. 2. Ce théorème est une précision du corollaire 3.

4. Somme de fonctions normales. Soient h_1, h_2 deux fonctions exceptionnelles au sens de Julia. On ne sait pas si la somme de deux fonctions

$$h_1 + h_2$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000014963 Published online by Cambridge University Press

est exceptionnelle au sens de Julia en général. On donne ici une condition suffisante pour qu'une somme de fonctions exceptionnelle au sens de Julia le soit aussi.

Soient $g_1, \cdots, g_n$ $(n \geqq 2)$ n fonctions transcendantes, exceptionnelles au sens de Julia et g un produit canonique des pôles des fonctions $g_1, \cdots, g_n$. On met

$$f_0 = g, f_1 = gg_1, \cdots, f_n = gg_n .$$

Alors, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros commnus à toutes. Dans ce cas, on a le

THÉORÈME 6. *Si le système $f = (f_0, \cdots, f_n)$ n'admet pas de directions de Julia, alors*

i) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$, $(\alpha_i) \neq (0)$, *est exceptionnelle au sens de Julia,*
ii) *pour tout $i \neq j$, g_i/g_j est exceptionnelle au sens de Julia.*

Démonstration. Considérons la combinaison

$$F = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i .$$

Alors, d'après le théorème 3, F/f_0 est exceptionnelle au sens de Julia. Maintenant,

$$\frac{F}{f_0} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{f_i}{f_0} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$$

et la fonction

$$\frac{F}{f_0} - 1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$$

est exceptionnelle au sens de Julia.

Puis, en vertu du théorème 1, l'hypothèse entraîne que pour tout $i \neq j$

$$f_i/f_j = g_i/g_j$$

est exceptionnelle au sens de Julia.

5. Dans le cercle-unité. Dans ce paragraphe, on considère des analogues aux résultats donnés dans les paragraphes 2, 3 et 4 pour le système défini dans le cercle-unité.

Soit $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans $|z|<1$, c'est-à-dire, les fonctions $f_0,\cdots,f_n$ sont holomorphes sans zéros communs à toutes dans $|z|<1$.

DÉFINITION 3. On dit que $J:\arg z=\theta_f$ est un *rayon de Julia* de f s'il n'y a qu'au plus $2n$ combinaisons des fonctions $f_0,\cdots,f_n$ linéaires, homogènes à coefficients constants, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et exceptionnelles au sens de Picard dans $\Delta_\varepsilon(\theta_f)\cap(|z|<1)$, ε étant positif quelconque.

THÉORÈME 7. *Soit $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans le cercle-unité tel qu'au moins un rapport entre les fonctions $f_0,\cdots,f_n$ n'est pas normal. Alors, le système f admet au moins un rayon de Julia.*

Démonstration. D'après l'hypothèse, on peut supposer que f_1/f_0 $(\not\equiv 0)$ n'est past normale. Alors, il y a une suite $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ contenue dans $|z|<1$ telle que

$$\lim_{k\to\infty}(1-|z_k|)\rho(g(z_k))=\infty$$

où $\rho(g(z))$ est la dérivée sphérique de $g(z)$ ([4]). Soient

$$z_k=r_k\exp(i\theta_k)\qquad(k=1,2,\cdots)$$

et θ_0 un des points d'accumulation de l'ensemble $\{\theta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Alors, on peut démontrer que $\arg z=\theta_0$ est un rayon de Julia de f comme dans le cas du plan.

THÉORÈME 8. *Soient $f=(f_0,\cdots,f_n)$ un système dans le cercle-unité sans rayon de Julia et*

$$F=\sum_{i=0}^{n}a_if_i\quad(\not\equiv 0)\ ,\qquad G=\sum_{i=0}^{n}b_if_i\quad(\not\equiv 0)$$

deux combinaisons linéaires à coefficients constants. Alors, la fonction F/G est normale dans $|z|<1$.

En effet, on peut démontrer ce théorème comme dans la démonstration du théorème 3.

Soient g_1,g_2 deux fonctions normales dans le cercle-unité. On sait que la somme

$$g_1+g_2$$

n'est pas normale nécessairement. Correspondant an cas du plan $|z| < \infty$, on donne ici une condition suffisante pour qu'une somme de fonctions normales le soit aussi.

Soient $g_1, \cdots, g_n$ $(n \geqq 2)$ n fonctions normales, non-constantes dans le cercle-unité et g un produit canonique des pôles des $g_1, \cdots, g_n$. (S'il n'y a pas de pôle, soit $g = 1$.) On met

$$f_0 = g, f_1 = gg_1, \cdots, f_n = gg_n ,$$

alors, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont holomorphes sans zéros communs à toutes dans $|z| < 1$. Dans cette situation, on a le

THÉORÈME 9. *Si le système $f = (f_0, \cdots, f_n)$ n'admet pas de rayon de Julia, alors*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i , \qquad (\alpha_i) \neq (0)$$

et

$$g_i / g_j \qquad (i \neq j)$$

sont normales dans $|z| < 1$.

On peut démontrer ce théorème comme dans le théorème 6 en utilisant le théorème 8 au lieu du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons de p fonctions holomorphes données, Mathematica, **7** (1933), 5–31.

[2] J. Dufresnoy, Théorie nouvelle des familles complexes normales; application à l'étude des fonctions algébroïdes, Ann. E.N.S., (3) **61** (1944), 1–44.

[4] O. Lehto et K. I. Virtanen, Boundary behavior and normal meromorphic functions, Acta Math., **97** (1957), 47–65.

[5] O. Lehto et K. I. Virtanen, On the behavior of meromorphic functions in the neighborhood of an isolated singularity, Ann. Acad. Sci. Fenn., **240** (1957), 1–9.

[6] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

[7] A. Ostrowski, Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes, Math. Zeit., **24** (1925), 215–258.

[8] H. L. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avh. Norshe Vid. Akad. Oslo, **8** (1934), 1–72.

[9] N. Toda, Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs déficientes de fonctions algébroïdes ou de systèmes, Kodai Math. Sem. Rep., **22** (1970), 114–121.

[10] N. Toda, Sur les directions de Julia des fonctions algébroïdes dans $|z| < \infty$, Nagoya Math. J., **37** (1970), 53–60.
[11] G. Valiron, Sur la dérivée des fonctions algébroïdes, Bull. Soc. Math. France, **59** (1931), 17–39.
[12] T. Zinno, Some properties of Julia's exceptional functions and an example of Julia's exceptional functions with Julia's direction, Ann. Acad. Sci. Fenn., **464** (1970), 1–12.

Université de Nagoya