N. Toda
Nagoya Math. J.
Vol. 37 (1970), 53–60

SUR LES DIRECTIONS DE JULIA DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES DANS $|z| < \infty$*)

NOBUSHIGE TODA

dédié à Monsieur le Professeur K. Ono, à l'occasion de son soixantième anniversaire

1. Introduction.

L'étude sur les directions de Julia des fonctions méromorphes dans le plan fini est fait présque complètement par Ostrowski [5] et après Rauch [6] etc. l'ont développé.

D'autre part, on ne trouve pas beaucoup d'études sur ce sujet pour les fonctions algébroïdes, (par exemple voir Valiron [13], Rauch [7], Cambes [2], Toda [10]) et dans ce domaine, il y a encore beaucoup de choses à améliorer.

Dans ce mémoire, on donne une condition suffisante pour qu'une fonction algébroïde dans $|z| < \infty$ admette au moins une direction de Julia, qui serait définitive en comparaison du cas de fonctions méromorphes fait par Ostrowski [5].

On le démontre en utilisant des résultats donnés par Dufresnoy [3].

2. Préliminaires.

Dans ce paragraphe, on va donner quelques définitions et un lemme que l'on utilise après.

Soit $w = (w_0, w_1, \cdots, w_n)$ un système de $n+1$ nombres complexes non tous nuls. On ne considère pas comme distincts deux systèmes dont les éléments correspondants sont proportionnels. Etant donnés deux systèmes

$$w^{(1)} = (w_0^{(1)}, w_1^{(1)}, \cdots, w_n^{(1)})$$

et

$$w^{(2)} = (w_0^{(2)}, w_1^{(2)}, \cdots, w_n^{(2)}),$$

Received January 8, 1969

*) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

on représente par $[w^{(1)}, w^{(2)}]$ l'expression

$$[w^{(1)}, w^{(2)}] = \sqrt{\frac{\sum_{i<j} |w_i^{(1)} w_j^{(2)} - w_i^{(2)} w_j^{(1)}|^2}{\sum_{i=0}^{n} |w_i^{(1)}|^2 \sum_{i=0}^{n} |w_i^{(2)}|^2}}$$

C'est une métrique dans les systèmes $w = (w_0, w_1, \cdots, w_n)$ de $n+1$ nombres complexes non tous nuls. Dufresnoy [3] l'a introduit et a donné beaucoup de résultats intéressants.

Soient D un domaine dans $|z| < \infty$, $f_0(z), f_1(z), \cdots, f_n(z)$ des fonctions dans D n'ayant pas de zéros communs et $f = (f_0(z), f_1(z), \cdots, f_n(z))$ un système de ces $n+1$ fonctions dans D. Dufresnoy [3], en utilisant la métrique précédente, introduit la continuité, la continuité uniforme etc. pour des systèmes de fonctions et la convergence, la convergence uniforme etc. pour des suites de systèmes de fonctions. Ici, on cite d'abord

Définition 1. On dit qu'une famille de systèmes de fonctions définies dans un domaine D y est *normale* si, de toute suite infinie de systèmes de la famille, on peut extraire une suite partielle uniformément convergeante dans l'intérieur de D (Dufresnoy [3]).

Soient $f_0(z), f_1(z), \cdots, f_n(z)$ $n+1$ fonctions dans D n'ayant pas de zéros communs. On dit qu'une combinaison linéaire

$$a_0 f_0(z) + a_1 f_1(z) + \cdots + a_n f_n(z)$$

est *exceptionnelle* si elle n'admet pas de zéros dans D, où les $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont des constants.

Lemme 1. *Si entre les $n+1$ fonctions holomorphes dans un domaine D de chaque système d'une famille, il existe $2n+1$ mêmes combinaisons linéaires exceptionnelles linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$, la famille est normale (Dufresnoy* [3]).

Ensuite, soit $u(z)$ une fonction algébroïde dans $|z| < \infty$ définie par l'équation algébrique irréductible

$$u^n + a_1(z) u^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0 \tag{1}$$

où $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_n(z)$ sont méromorphes dans $|z| < \infty$ au moins une desquelles est transcendante.

Définition 2. On dit que J: arg $z = \theta$ est *une direction de Julia de* $u(z)$ si $u(z)$ admet au plus $2n$ valeurs exceptionnelles au sens de Picard dans

$$\Delta_{\varepsilon}(\theta) = \{z;\ |\arg\ z - \theta| < \varepsilon\}$$

où ε est un nombre positif quelconque (voir Valiron [13] et Toda [10]).

On a donné dans un mémoire [10] un exemple d'une fonction algébroïde dans $|z| < \infty$ qui n'a pas de direction de Julia.

3. Théorème principal.

Dans ce paragraphe on donne une condition suffisante pour qu'une fonction algébroïde dans $|z| < \infty$ admette au moins une direction de Julia.

THÉORÈME 1. *Soient $a_1(z)$, $a_2(z)$, $\cdots$, $a_n(z)$ des fonctions méromorphes dans le plan fini au moins une desquelles n'est pas une fonction exceptionnelle au sens de Julia et telles que l'équation algébrique*

$$u^n + a_1(z)u^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0 \tag{2}$$

est irréductible.

Alors, la fonction algébroïde $u(z)$ définie par (2) *admet au moins une direction de Julia.*

Démonstration. Par l'hypothèse, il existe au moins une fonction n'étant pas exceptionnelle au sens de Julia dans $a_1(z)$, $\cdots$, $a_n(z)$, donc, soit $a_{i_0}(z)$ cette fonction $(1 \leqq i_0 \leqq n)$. Alors, pour $a_{i_0}(z)$, il existe un point a tel que $0 < |a| < \infty$ et la famille $\{a_{i_0}(tz)\}_{t \geqq t_0 > 0}$ n'est pas normale dans un voisinage quelconque $V(a)$ de a. Soit $A_0(z)$ le produit canonique de toutes les pôles des $a_1(z)$, $\cdots$, $a_n(z)$ en considérant leurs ordres de multiplicité, alors, les fonctions $A_1(z) = a_1(z)A_0(z)$, $\cdots$, $A_n(z) = a_n(z)A_0(z)$ sont entières avec $A_0(z)$ et n'ont pas de zéros communs. Ici, on considère le système $A = (A_0(z), \cdots, A_n(z))$ dans $|z| < \infty$. Pour ce système, la famille

$$\{A^t = (A_0(tz),\ \cdots,\ A_n(tz))\}_{t \geqq t_0 > 0}$$

n'est pas normale dans $V(a)$.

En effet, si elle est normale, d'après la définition 1, de toute suite infinie de systèmes de cette famille, il existe une suite partielle qui converge uniformément au sens large dans $V(a)$.

Soit

$$\{A^k = (A_0(t_k z),\ \cdots,\ A_n(t_k z))\}_{k \geqq 1}$$

la suite partielle qui converge uniformément vers, par exemple,

https://doi.org/10.1017/S0027763000013283 Published online by Cambridge University Press

$$A^{(0)} = (A_0^{(0)}(z), \cdots, A_n^{(0)}(z))$$

au sens large dans $V(a)$. Grâce à un résultat de Dufresnoy [3], il existe un voisinage $V_1(a) \subset V(a)$ dans lequel on trouve une suite $\{\varphi^k(z)\}_{k\geq 1}$ de fonctions holomorphes telle que, pour tout i $(=0, 1, 2, \cdots, n)$,

$$\varphi^k(z) A_i(t_k z)$$

converge uniformément vers $A_i^{(0)}(z)$ au sens large dans $V_1(a)$; donc, $A_i^{(0)}(z)$ est holomorphes dans $V_1(a)$ pour tout i.

Par conséquent,

$$a_{i_0}(t_k z) = \frac{A_{i_0}(t_k z)}{A_0(t_k z)} = \frac{\varphi^k(z) A_{i_0}(t_k z)}{\varphi^k(z) A_0(t_k z)}$$

converge vers $A_{i_0}^{(0)}(z)/A_0^{(0)}(z)$, qui est une fonction méromorphe ou ∞, uniformément au sens large dans $V_1(a)$. C'est une contradiction à l'hypothèse que la famille $\{a_{i_0}(tz)\}_{t\geqq t_0>0}$ n'est pas normale dans un voisinage quelconque de a. Cela veut dire que la famille de systèmes $\{A^t\}_{t\geqq t_0>0}$ n'est pas normale dans $V(a)$. En vertu du lemme 1, il existe au plus $2n$ mêmes combinaisons linéaires exceptionnelles linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ entre les $n+1$ fonctions de chaque système de $\{A^t\}_{t\geqq t_0>0}$ pour tout $t > t_0$.

En conséquence, considérons l'ensemble de vecteurs $\{(\alpha^n, \alpha^{n-1}, \cdots, \alpha, 1), \alpha \neq \infty$ et $(1, 0, \cdots, 0)\}$, alors, ils sont linéairement indépendants $n+1$ à $n+1$. Donc, entre eux, il existe au plus $2n$ vecteurs qui constituent les combinaisons linéaires exceptionnelles linéairement indépendantes pour la famille $\{A^t\}_{t\geqq t_0}$.

Soient

$$(\alpha_i^n, \alpha_i^{n-1}, \cdots, \alpha_i, 1) \quad i = 1, 2, \cdots, m; \ m \leqq 2n$$

les vecteurs qui constituent les combinaisons linéaires exceptionnelles linéairement indépendantes, où on considère comme $(1, 0, \cdots, 0) = (\alpha^n, \alpha^{n-1}, \cdots, 1)$ quand $\alpha = \infty$.

Or, considérons la famille de fonctions algébroïdes

$$F_t(z, u) = A_0(tz)u^n + A_1(tz)u^{n-1} + \cdots + A_n(tz) = 0, \quad t \geqq t_0,$$

alors, pour tout $t \geqq t_0 > 0$,

$$F_t(z, \alpha_i) \neq 0 \text{ dans } V(a), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Si on prend $V(a) = \{z;\ |z-a| < \varepsilon'\}$ $(\varepsilon' > 0)$, cela veut dire que la fonction algébroïde $u(z)$ définie par l'équation

$$A_0(z)u^n + A_1(z)u^{n-1} + \cdots + A_n(z) = 0$$

ou

$$u^n + a_1(z)u^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0$$

n'admet pas $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ et admet toutes les autres valeures au moins une fois dans

$$\{z;\ |z| > t_0|a|\} \cap \varDelta_\varepsilon(\theta)$$

où

$$\varDelta_\varepsilon(\theta) = \{z;\ |\arg z - \theta| < \varepsilon\}$$

$$\varepsilon = \sin^{-1}\frac{\varepsilon'}{|a|},\quad 0 < \varepsilon < \pi/2,\quad \theta = \arg a.$$

La direction J; $\arg z = \theta$ est une direction que l'on cherche. En effet, s'il existe au moins $2n+1$ valeurs que l'algébroïde $u(z)$ prend un nombre fini de fois dans $\varDelta_\varepsilon(\theta)$, on a un nombre $r_0 > 0$ tel que, dans

$$\{z;\ |z| > r_0\} \cap \varDelta_\varepsilon(\theta)$$

$u(z)$ ne les prend pas. D'autre part, le nombre t_0 dans la discussion précédente est quelconque s'il est positif. En conséquence, si on prend $t_0 > r_0/|a|$, il existe au plus $2n$ valeurs que $u(z)$ ne prend pas dans

$$\{z;\ |z| > r_0\} \cap \varDelta_\varepsilon(\theta).$$

C'est une contradiction, c'est-à-dire, on a le résultat.

4. Fonctions exceptionnelles au sens de Julia.

Concernant les fonctions méromorphes exceptionnelles au sens de Julia dans $|z| < \infty$, on sait beaucoup de choses (voir Ostrowski [5], Ullrich [11], Lehto-Virtanen [4], Anderson-Clunie [1] et Zinno-Toda [14]).

Dans ce paragraphe, on considère les algébroïdes $u(z)$ définie par l'équation algébrique irréductible

$$u^n + a_1(z)u^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0 \tag{3}$$

où $a_1(z), \cdots, a_n(z)$ sont exceptionnelles au sens de Julia dans $|z| < \infty$ et au moins une desquelles n'est pas rationnelle.

On utilise les symboles usueles de la théorie de Nevanlinna-Selberg [9].

THÉORÈME 2. *L'algébroïde $u(z)$ définie par* (3) *n'admet pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard, ou elle a une direction de Julia.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000013283 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. D'abord, l'infini n'est pas exceptionnel de $u(z)$, parce qu'une au moins des $a_1(z), \cdots, a_n(z)$ n'est pas rationnelle et est exceptionnelle au sens de Julia, par conséquent, l'infini n'est pas exceptionnel de cette fonction.

Puis, soit $u_0 \neq \infty$, $F(u, z) = u^n + a_1(z)u^{n-1} + \cdots + a_n(z)$.

1) le cas où $F(u_0, z)$ est rationnelle.

Soient $u_1, \cdots, u_n$ les n branches de $u(z)$, alors

$$\prod_{i=1}^{n} (u_0 - u_i) = F(u_0, z).$$

Le coté droit admet un nombre fini de pôles seulement parce qu'elle est rationnelle. Entre les branches $u_1, \cdots, u_n$, au moins une admet l'infini un nombre infini de fois, donc $u(z)$ admet u_0 infini de fois. C'est-à-dire, u_0 n'est pas exceptionnelle.

2) le cas où $F(u_0, z)$ n'est pas rationnelle.

La fonction $F(u_0, z)$ est exceptionnelle au sens de Julia, donc elle admet 0 infini de fois. Cela veut dire que u_0 n'est pas exceptionnelle.

On a le résultat.

N.B. Grâce aux théorèmes 1 et 2, on obtient une amélioration d'une extension aux fonctions algébroïdes du théorème de Picard par Rémoundos [8].

Puis, on considère une amélioration du théorème 2.

Soit

$$\Delta(a) = 1 - \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, a)}{T(r, u)}$$

pour un nombre a quelconque fini ou non. On dit qu'une valeur a est déficiente ou exceptionnelle au sens de Valiron si $\Delta(a) > 0$. On sait que la mesure linéaire de l'ensemble $\{a; \Delta(a) > 0\}$ est nulle en général [12].

THÉORÈME 3. *L'algébroïde $u(z)$ définie par* (3) *n'admet pas de valeurs exceptionnelles au sens de Valiron, ou elle a une direction de Julia.*

Démonstration. Comme dans la démonstration du théorème 2, on met pour $u_0 \neq \infty$

$$F(u_0, z) = u_0^n + a_1(z)u_0^{n-1} + \cdots + a_n(z).$$

Soient $n(r, 0, F)$ le nombre des zéros de $F(u_0, z)$ dans $|z| \leqq r$ et $n(r, \infty, F)$ le nombre des pôles de $F(u_0, z)$ dans $|z| \leqq r$ comptés avec leurs ordres de multiplicité. Quand $F(u_0, z)$ n'est pas rationnelle, d'après un résultat d'Ostrowski [5], il existe un nombre C_{u_0} ne dépendant pas de r tel que

$$|n(r, 0, F) - n(r, \infty, F)| < C_{u_0}.$$

Comme dans le cas premier du théorème précédent, on a

$$n(r, \infty, u) - n(r, \infty, F) + n(r, 0, F) = n(r, u_0, u)$$

par conséquent

$$|n(r, \infty, u) - n(r, u_0, u)| = |n(r, \infty, F) - n(r, 0, F)| < C_{u_0}.$$

Quand $F(u_0, z)$ est rationnelle, on a aussi

$$n(r, \infty, u) - n(r, \infty, F) + n(r, 0, F) = n(r, u_0, u),$$

donc,

$$n(r, \infty, u) - n(r, u_0, u) = n(r, \infty, F) - n(r, 0, F).$$

Le coté droit est la différence entre le nombre des zéros et celui des pôles dans $|z| \leqq r$ d'une fonction rationnelle, par conséquent, pour tout $r > 0$, il existe un nombre C_{u_0} tel que

$$|n(r, 0, F) - n(r, \infty, F)| < C_{u_0},$$

par conséquent, on a

$$|n(r, \infty, u) - n(r, u_0, u)| < C_{u_0}.$$

En utilisant le fait que la mesure linéaire de l'ensemble des valeurs exceptionnelles au sens de Valiron est nulle, on obtient le résultat de la même manière dans [14].

Comme corollairres, on a

COROLLAIRE 1. *À l'équation* (1), *si tous les coéfficients sont entiers,* $u(z)$ *admet au moins une direction de Julia.*

COROLLAIRE 2. *Si l'algébroïde définie par* (1) *admet des valeurs déficientes au sens de Nevanlinna ou Valiron, elle a au moins une direction de Julia.*

En considérant que, si $g(z)$ est une fonction méromorphe exceptionnelle au sens de Julia dans $|z| < \infty$,

https://doi.org/10.1017/S0027763000013283 Published online by Cambridge University Press

$$T(r, g) = O\{(\log r)^2\},$$

on a

COROLLAIRE 3. *Si l'algébroïde définie par* (1) *a la propriété:*

$$\lim_{r\to\infty} T(r, u)/(\log r)^2 = \infty,$$

elle admet au moins une direction de Julia.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. Anderson-J. Clunie, Slowly growing meromorphic functions. Comm. Math. Her. **40-4** (1966), 268–280.
[2] J. Cambes, Sur quelques propriétés des fonctions algébroïdes. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (4) **12** (1950), 5–76.
[3] J. Dufresnoy, Théorie nouvelle des familles complexes normales; applications à l'étude des fonctions algébroïdes. Ann. École Norm. Sup. **61** (1944), 1–44.
[4] O. Lehto-K.I. Virtanen, On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity. Ann. Acad. Sci. Fennicae. **240** (1957).
[5] A. Ostrowski, Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. Math. Zeit. **24** (1925), 215–258.
[6] A. Rauch, Extensions de théorèmes relatifs aux directions de Borel de fonctions méromorphes. Journ. de Math. (1933), 109–171.
[7] A. Rauch, Sur les algébroïdes entières. C.R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 2041–2043.
[8] G. Rémoundos, Extensions aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations. Mem. Sci. Math. Paris 1927.
[9] H.L. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **8** (1934), 1–72.
[10] N. Toda, Sur les directions de Julia et de Borel des fonctions algébroïdes. Nagoya Math. J. **34** (1969), 1-23.
[11] E. Ullrich, Über eine Anwendungen des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen. J. reine u. angew. Math. **166** (1931), 220–234.
[12] E. Ullrich, Über den Einfluss der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung. J. reine u. angew. Math. **167** (1932), 198–220.
[13] G. Valiron, Sur les directions de Borel des fonctions algébroïdes méromorphes d'ordre infini. C.R. Acad. Sci. Paris **206** (1938), 735–737.
[14] T. Zinno-N. Toda, On Julia's exceptional functions. Proc. Japan Acad. **42-10** (1966), 1120–1121.

Institut de Mathématiques,
Université de Tôhoku.