Can. J. Math., Vol. XXV, No. 5, 1973, pp. 922–928

SUR LES ANNEAUX DE GROUPES SEMI-PARFAITS

J. M. GOURSAUD

Introduction. Soient A un anneau unitaire, G un groupe. L'anneau de groupe AG est le A-module libre ayant pour base les éléments de G, la multiplication étant définie par :

$$\left(\sum_g a_g g\right)\left(\sum_h b_h h\right) = \left(\sum_k t_k k\right)$$

avec $t_k = \sum_{gh=k} a_g b_h$.

Le premier résultat de cet article concerne les annulateurs des idéaux à gauche engendrés par les sous-groupes finis de G, il permet d'obtenir une démonstration facile de la caractérisation des anneaux de groupes parfaits à gauche. Dans la deuxième partie, nous étudions les anneaux de groupes semi-parfaits et nous démontrons que, K étant un corps de caractéristique $p \neq 0$, si G est un groupe localement fini ou localement résoluble, KG est semi-parfait si et seulement si G est extension finie d'un p-groupe. Ce résultat généralise le cas commutatif étudié par S. Woods dans [**10**], de même que les résultats obtenus par J. Valette dans [**8**].

1. Pour un sous-groupe H de G, on note ωH l'idéal à gauche de AG engendré par les éléments $1 - h$ pour $h \in H$. On voit facilement que si $\{g_i\}$, $i \in I$ est un système de représentants des classes à gauche de G modula H, les éléments $g_i(h - 1)$, $i \in I$ et $h \neq 1$ forment une A-base de ωH, de même si H est fini et si $\{\bar{g}_i\}$, $i \in I$ est un système de représentants des classes à droite de G modulo H alors les éléments $(\sum_{h\in H} h)\bar{g}_i$, $i \in I$ forment une A-base de l'annulateur à droite $r(\omega H) = (\sum_{h\in H} h)AG$ de ωH [**5**].

PROPOSITION 1. *Soit H un sous-groupe fini de G. On a alors:*

$$l(r(\omega H)) = \omega H.$$

Démonstration. On a évidemment $\omega H \subset lr(\omega H)$. Soient $(g_i)_{i\in I}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H et $x = \sum_{i\in I} g_i a_i$, avec $a_i \in AH$ un élément de $lr(\omega H)$. On a

$$0 = x\sum_{h\in H} h = \sum_{i\in I} g_i\left(a_i \sum_{h\in H} h\right),$$

d'où

$$a_i \sum_{h\in H} h = 0$$

Reçu le 3 avril, 1972 et en revu forme, le 29 novembre, 1972.

pour tout i. Or a_i s'écrit :

$$a_i = \alpha_0{}^i + \alpha_1{}^i h_1 + \ldots + \alpha_n{}^i h_n$$

avec $h_j \in H$, $\alpha_j{}^i \in A$ pour $1 \leqq j \leqq n$ et

$$a_i \sum_{h \in H} h = \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j{}^i \right) \left(\sum_{h \in H} h \right) = 0.$$

On en déduit immédiatement que $\sum_{j=0} \alpha_j{}^i = 0$, c'est-à-dire $a_i \in \omega H$ pour tout i et x appartient à ωH.

Comme corollaire, nous obtenons une démonstration simple du résultat suivant :

THÉORÈME 2 (G. Renault [**7**], S. Woods [**9**]). *AG est parfait à gauche si et seulement si A est parfait à gauche et G est fini.*

Démonstration. Si A est parfait à gauche et G est fini, alors AG est parfait à gauche. Réciproquement, soit R le radical de Jacobson de A ; $(A/R)G$ est parfait à gauche, on est donc ramené au cas où A est un corps. Si car $A = 0$ alors AG est *semi*-premier et parfait à gauche, AG est donc semi-simple et G est fini. Si $p =$ car $A \neq 0$, supposons que G ne soit pas fini ; alors AG n'est pas premier et d'après [**6**, Théorème 2.5], G contient un sous-groupe normal fini H_1. $A[G/H_1]$ est parfait à gauche et n'est pas premier, G contient donc un sous-groupe normal fini H_2 contenant strictement H_1, on construit ainsi de proche en proche une suite croissante (H_n) de sous-groupes finis de G ce qui donne, en utilisant la Proposition 1, une suite décroissante d'idéaux monogènes de AG, contredisant le fait que AG est parfait à gauche.

2. Un A-module M est dit *local* s'il possède un plus grand sous-module propre. Les anneaux semi-parfaits introduits par H. Bass dans [**1**] sont les anneaux vérifiant l'une des conditions équivalentes du théorème suivant :

THÉORÈME. *Pour un anneau A de radical de Jacobson R, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Tout A-module à gauche de type fini admet une couverture projective;*

(b) *A/R est semi-simple, et les idempotents de A/R se relèvent en des indempotents de A ;*

(c) *$A = \bigoplus_{i=1}^{n} Ae_i$ où les Ae_i sont des A-modules à gauche projectifs locaux.*

L'assertion (c) est due à J. Y. Chamard et se trouve dans [**3**].

Remarques. D'après la condition (b), tout anneau quotient d'un anneau semi-parfait est semi-parfait. D'autre part, toute suite croissante (resp. décroissante) d'idéaux à gauche facteurs directs de A est stationnaire de longueur inférieure ou égale à celle de A/R.

Dans ce qui suit, K désigne un corps.

PROPOSITION 3. *Soit KG un anneau semi-parfait. Si $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$ est une décomposition de l'unité en idempotents primitifs orthogonaux alors pour tout sous-groupe H de G tel que H contienne le support des e_i, KH est semi-parfait et de plus*

$$\operatorname{Rad} KH = \operatorname{Rad}(KG) \cap KH.$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, il suffit de démontrer que pour tout i, KHe_i est un KH-module local. Soit x un élément de KHe_i, $x \notin (\operatorname{Rad} KG \cap KH)e_i$; en particulier x n'appartient pas à $(\operatorname{Rad} KG)e_i$, on a donc :

$$KGx = KGe_i$$

$$KHx = KHe_i,$$

d'où KHe_i est un module local admettant pour sous-module maximal $(\operatorname{Rad} KG \cap KH)e_i$. Il s'ensuit que

$$(\operatorname{Rad} KH)e_i = (\operatorname{Rad} KG \cap KH)e_i,$$

d'où

$$\operatorname{Rad} KH = \operatorname{Rad} KG \cap KH.$$

Un groupe localement résoluble (resp. localement fini) est un groupe dont tout sous-groupe de type fini est résoluble (resp. fini).

THÉORÈME 4. *Soient G un groupe localement résoluble, K un corps. Si KG est semi-parfait, alors G est localement fini.*

Démonstration. A l'aide de la Proposition 3, on se ramène au cas où G est un groupe de type fini résoluble. On démontre alors la propriété par récurrence sur la longueur de la suite dérivée de G. Soit D^nG le n-ième groupe dérivé de G. $K[G/DG]$ est un anneau semi-parfait, donc G/DG est un groupe fini [**2**] et par conséquent DG est un groupe de type fini. Supposons que G/D^nG soit fini d'ordre m et que $D^{n+1}G = \{1\}$. D^nG est un groupe abélien de type fini, son sous-groupe de torsion T est un sous-groupe caractéristique, il est donc normal dans G. Montrons que $D^nG = T$. Sinon G/T contient un sous-groupe abélien libre de type fini D^nG/T. On a alors d'après [**5**, Exercice 13, p. 162] $\operatorname{Rad} K[D^nG/T] = (0)$. D'autre part, d'après [**6**, Théorème 16.6] on a

$$(\operatorname{Rad} K[G/T]^m) \subseteq (\operatorname{Rad} K[D^nG/T]K[G/T]) = (0),$$

$K[G/T]$ est donc un anneau semi-primaire et d'après le Théorème 2, G/T est fini ce qui contredit l'hypothèse faite sur D^nG.

Le lemme suivant est une généralisation du Lemme 13.2 de [**6**]. La première étape de la démonstration est identique à celle de [**6**]. p désigne un nombre premier.

LEMME 5. *Soient G un groupe, m un entier. G admet un p-sous-groupe d'indice au plus égal à m si et seulement si tout sous-groupe de type fini de G admet un p-sous-groupe d'indice au plus égal à m.*

Démonstration. Si P est un p-sous-groupe de G tel que $[G : P] \leqq m$, alors pour tout sous-groupe H de G on a

$$m \geqq [G : P] \geqq [G \cap H : P \cap H] = [H : P \cap H].$$

$P \subset H$ est donc un p-sous-groupe de H d'indice au plus égal à m. Réciproquement, supposons que tout sous-groupe de type fini de G possède un p-sous-groupe d'indice au plus égal à m. Alors tout sous-groupe de type fini admet un p-sous-groupe normal d'indice au plus égal à $m! = n$ et, par conséquent contient un seul p-sous-groupe normal maximal d'après [**11**, Théorème 6-1-10]. Pour tout sous-ensemble fini α de G, soient $G_\alpha = \langle \alpha \rangle$ le groupe engendré par les éléments de α et n_α l'indice du p-sous-groupe normal maximal P_α de G_α. Par hypothèse on a

$$1 \leqq n_\alpha \leqq n,$$

Choisissons α_0 tel que $n_0 = n_{\alpha_0}$ soit le maximum des n_α et posons $G_0 = G_{\alpha_0}$. Si α est un sous-ensemble fini de G contenant α_0 on a alors

$$[G_\alpha : P_\alpha] = n_\alpha,$$

d'où $n_0 \geqq n_\alpha = [G_\alpha : P_\alpha] \geqq [G_\alpha \cap G_0 : P_\alpha \cap G_0] = [G_0 : P_\alpha \cap G_0]$. D'autre part, $P_\alpha \cap G_0$ est un p-sous-groupe normal de G_0 et

$$n_0 \geqq n_\alpha \geqq [G_0 : P_\alpha \cap G_0] \geqq n_0$$

par définition de n_0. Il en résulte les relations $n_\alpha = n_0$ et $P_\alpha \cap G_0 = P_0$. Le même raisonnement montre que si α et β sont deux sous-ensembles finis de G tels que $\alpha_0 \subset \alpha \subset \beta$ on a alors

$$n_\beta = n_\alpha = n_0 \quad \text{et} \quad P_\beta \cap G_\alpha = P_\alpha.$$

Le sous-groupe $P = \bigcup_{\alpha \supset \alpha_0} P_\alpha$ est un p-sous-groupe normal de G. En effet, soient $p_{\alpha_1} \in P_{\alpha_1}$, $p_{\alpha_2} \in P_{\alpha_2}$ deux éléments de P, g un élément de G et $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \{g\}$. On a alors :

$$p_{\alpha_1} \in P_{\alpha_1} \cap G_{\alpha_1} = P_{\alpha_1} \quad \text{de même} \quad p_{\alpha_2} \in P_\alpha$$

d'où $p_{\alpha_1} p_{\alpha_2}{}^{-1} \in P_\alpha$ et $g p_{\alpha_1} g^{-1} \in P_\alpha$. De plus $[G : P] = n_0$, sinon $[G : P] > n_0$ et G admettrait $n_0 + 1$ classes disjointes modulo P. Soient $P1, Pg_1, \ldots, Pg_{n_0}$ ces classes et $\alpha = \alpha_0 \cup \{1, g_1, \ldots, g_{n_0}\}$. Alors G_α admettrait $n_0 + 1$ classes disjointes modulo P_α ce qui contredit la relation $[G_\alpha : P_\alpha] = n_0$.

Soient $G = \bigcup_{i=1}^{n} Pg_i$ avec $n \leqq n_0$ et $\alpha = \{g_1, \ldots g_n\}$, on a alors $G_\alpha P = G$ et

$$\frac{G}{P} = \frac{G_\alpha P}{P} \simeq G_\alpha / G_\alpha \cap P.$$

G_α par hypothèse contient un p-sous-groupe d'indice inférieur ou égal à m, il en est de même pour $G_\alpha/G_\alpha \cap P$ car $G_\alpha \cap P \subset P_\alpha$. D'où G/P contient un p-sous-groupe sous-groupe d'indice au plus égal à m, par conséquent G admet un p-sous-groupe d'indice au plus égal à m, ce qui achève la démonstration.

Les deux lemmes qui suivent interviendront dans la démonstration du résultat principal.

LEMME 6 [**4**, Théorème 1]. *Pour un sous-groupe H de G les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *ωH est facteur direct dans AG ;*

(b) *H est fini et son ordre est inversible dans A.*

LEMME 7. *Soient KG un anneau de groupe, G un groupe fini, H et H' deux sous-groupes de G. Si $r(\omega H)$ et $r(\omega H')$ sont isomorphes, alors H et H' ont même ordre.*

Démonstration. En effet, $r(\omega H)$ est un K-espace vectoriel dont une base est formée par les éléments $(\sum_{h \in H} h) g_i$, où g_i décrit un système de représentants des classes à droite de G modulo H. C'est donc un K-espace vectoriel de dimension $[G : H]$. D'où

$$[G : H] = [G : H'] \quad \text{et} \quad |H| = |H'|.$$

Si K est un corps de caractéristique 0, G un groupe localement fini, alors KG est semi-parfait si et seulement si G est fini. Dans toute la suite, nous considérons un corps K de caractéristique non nulle.

THÉORÈME 8. *Soient K un corps de caractéristique p, G un groupe localement fini. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *KG est semi-parfait ;*

(b) *G est extension finie d'un p-groupe.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). Soit

$$\text{Ass } G = \{q/q \text{ premier, il existe } g \in G - \{1\} g^q = 1\}.$$

Ass G est fini. En effet, KG étant semi-parfait, il existe au plus N classes d'isomorphisme de KG-modules projectifs monogènes (N désignant la longueur de $KG/\text{Rad } KG$). Supposons que Ass G contienne $N + 1$ éléments distincts et différents de p, soient p_1, p_{N+1} ces éléments et $g_1, \ldots, g_{N+1}$, $N + 1$ éléments de G d'ordre respectivement $p_1, \ldots, p_{N+1}$. Si H est le sous-groupe fini de G engendré par les éléments $g_1, \ldots, g_{N+1}$, KH est artinien et possède au plus N classes d'isomorphismes de KG-modules à droite projectifs monogènes. Il existe donc deux entiers distincts m_0 et m_1, avec $1 \leqq m_0 < m \leqq N + 1$ tels que

$$r(\omega\langle g_{m_0}\rangle) \quad \text{et} \quad r(\omega\, \langle g_{m_1}\rangle)$$

soient isomorphes. On a donc d'après le Lemme 7, $p_{m_0} = p_{m_1}$ ce qui est impossible, d'où card(Ass G) $\leqq N + 1$. Soit n la longueur de $KG/\text{Rad } KG$, d'après la remarque faite au début du paragraphe 2, et d'après le lemme 6, pour tout nombre premier q distincts de p, un q-sous-groupe de Sylow de G est d'ordre au plus égal à q^n. Donc tout sous-groupe fini de G admet un p-sous-groupe d'indice au plus égal à $(p_1 p_2 \ldots p_N)^n$. Le Lemme 5 montre que G est extension finie d'un p-groupe.

(b) $\Rightarrow$ (a). Soit P le p-sous-groupe normal maximal de G. Comme ωP est un nilidéal, on a $\omega P \subset \text{Rad } KG$. $K[G/P]$ étant artinien et les idempotents d'un anneau se relevant modulo un nilidéal [**5**, Proposition 13.6], KG est semi-parfait.

COROLLAIRE 9 (avec les hypothèses du Théorème 8). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *KG est semi-parfait ;*

(b) *Pour tout sous-groupe H de G, KH est semi-parfait.*

Nous ne savons pas si ce résultat est vrai si l'on ne suppose pas G localement fini. Une réponse affirmative résoudrait une conjecture de Burgess [**2**] (si KG est semi-parfait alors G est un groupe de torsion).

Si AG est semi-parfait, A est semi-parfait, et A/R est semi-simple. Soit

$$A/R = \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i)$$

la décomposition de A/R en anneaux simples où D_i est un corps. Avec les notations ci-dessus nous avons :

COROLLAIRE 10. *Soit AG un anneau de groupe semi-parfait où G est un groupe infini localement fini. Alors les corps D_i intervenant dans la décomposition de A/R ont même caractéristique $p \neq 0$.*

COROLLAIRE 11. *Soit K un corps de caractéristique p. Si KG est semi-parfait et si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(a) *KG vérifie une identité polynomiale ;*

(b) *G est localement un F. C. groupe ;*

(c) *G est extension d'un groupe abélien par un groupe localement fini. Alors G est extension finie d'un p-groupe.*

Démonstration. Dans tous les cas considérés, tout sous-groupe de type fini de G est extension finie d'un groupe abélien, il suffit de reprendre la démonstration du Théorème 4 pour montrer que G est localement fini.

Soit $\mathscr{P}$ la classe des groupes localement finis, extension finie d'un p-groupe.

LEMME 12. *Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$G \in \mathscr{P}$;*

(b) *$H \in \mathscr{P}$ et $G/H \in \mathscr{P}$.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). C'est immédiat.

(b) $\Rightarrow$ (a). Soit P le p-sous-groupe normal maximal de H. P est un p-sous-groupe caractéristique de H, il est donc normal dans G. Il suffit donc de montrer que $G/P \in \mathscr{P}$. Soit P'/H le p-sous-groupe normal maximal de G/H. P$'/H$ est un p-groupe et H/P est un groupe fini, il est bien connu que $P'/P \in \mathscr{P}$, d'où $G \in \mathscr{P}$.

Du lemme précédent découlent les résultats suivants :

PROPOSITION 13. *Soient G un groupe localement fini, H un sous-groupe normal de G, K un corps de caractéristique p. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) *KG est semi-parfait ;*
(b) *KH et $K[G/H]$ sont semi-parfaits.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). C'est découle du Théorème 8.
(b) $\Rightarrow$ (a). Il suffit d'appliquer successivement le Lemme 10 et le Théorème 8.

PROPOSITION 14. *Soient G un groupe résoluble, K un corps de caractéristique p. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) *KG est semi-parfait ;*
(b) *Pour tout entier n, $D^nG/D^{n+1}G = P_n \oplus Q_n$ où P_n est un p-groupe et Q_n un groupe fini.*

Remarque. Soit KG un anneau de groupe semi-parfait où K est un corps de caractéristique p. Alors si tout sous-groupe de type fini de G est extension finie d'un p-groupe, G est extension finie d'un p-groupe. Cette assertion résulte de la Proposition 3 et du Lemme 5.

On peut conjecturer raisonnablement le résultat suivant :

Conjecture. Soit K un corps de caractéristique $p \neq 0$. Pour que KG soit semi-parfait, il faut et il suffit que G soit extension finie d'un p-groupe.

RÉFÉRENCES

1. H. Bass, *Finistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. *95* (1960), 466–468.
2. W. D. Burgess, *On semi-perfect group rings*, Can. Math. Bull. *12* (1969), 645–652.
3. J. Y. Chamard, *Anneaux semi-parfaits et presque-frobenuisiens*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B *269* (1969), 556–559.
4. D. B. Coleman, *On group rings*, Can. J. Math. *22* (1970), 249–254.
5. J. Lambek, *Lectures on rings and modules* (Blaisdell, Waltham, Mass., 1966).
6. D. S. Passman, *Infinite group rings* (Marcel Dekker Inc., New York, 1971).
7. G. Renault, *Sur les anneaux de groupes*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B *273* (1971), 84–87.
8. J. Valette, *Anneaux de groupes semi-parfaits*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B *273* (1971), 339–341.
9. S. Woods, *On perfect group rings*, Proc. Amer. Math. Soc. *27* (1971), 49–52.
10. ——— *On perfect and semi-perfect group rings*, Ph.D. thesis, McGill University, Montréal, 1969.
11. W. R. Scott, *Group theory*, (Prentice-Hall, 1964).

Université de Poitiers,
Poitiers, France