Compositio Mathematica **122:** 1–22, 2000.

Indépendance algébrique sur les T-modules

DAVID SINNOU[1] and DENIS LAURENT[2]
[1]*U. M. R. 7586 du C. N. R. S.–U. F. R. 921, Problèmes Diophantiens, Département de mathématiques, Tour 46–56, 5-ième étage, case 247, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, 75005 Paris, France ; e-mail : david@math.jussieu.fr*
[2]*Université des Sciences et technologies de Lille, U.F.R. de Mathématiques, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq, France; e-mail: ladenis@ccr.jussieu.fr*

(Received: 16 June 1997; accepted in final form: 29 May 1998)

Abstract. We study the transcendence degree (of the values at algebraic points) of the coordinate functions of a given one parameter subgroup on a simple g dimensional T-module. In such a situation, we obtain a lower bound for this transcendence degree depending on g and on the growth order of the parameter subgroup. As a particular case, one gets the finite characteristic analogue of a result of Siegel on the algebraic independence for the values of the classical Bessel function.

Résumé. Nous obtenons une minoration du degré de transcendance d'un ensemble de valeurs en des points algébriques des fonctions coordonnées d'un sous-groupe à un paramètre d'un T-module simple, en fonction de l'ordre de croissance de ces dernières et de la dimension du T-module. Un cas particulier de ce résultat permet d'obtenir en caractéristique finie un analogue d'un résultat de Siegel sur l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction de Bessel usuelle.

Mathematics Subject Classification (2000): 11G09.

Key words: Drinfeld modules, algebraic independence.

1. Introduction

1.1. CONTEXTE

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p ; nous noterons $A = \mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, $k = \mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions, et $k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $(1/T)$-adique v, que l'on prolonge à une clôture algébrique $\overline{k}$ (resp. $\overline{k_\infty}$) de k (resp. k_∞). On notera encore C le complété de $\overline{k_\infty}$ et $|\alpha| = q^{\deg(\alpha)} = q^{-v(\alpha)}$, la valeur absolue d'un élément α de C et l'on conviendra que $\deg(0) = -\infty$.

Notre but est de prouver des énoncés convenables d'indépendance algébrique sur k pour les valeurs des fonctions de Bessel–Carlitz qui sont des séries entières à coefficients dans k, et sont un analogue dans ce contexte des fonctions de Bessel classiques en caractéristique 0.

Pour rappeler la définition de ces fonctions, commençons par définir les polynômes factoriels de Carlitz D_n. On posera $D_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $D_n = (T^{q^n} - T)D_{n-1}^q$. La suite D_n fournit un analogue convenable des coefficients $n!$ du cadre classique (ou mieux encore $q^n!$) qui apparaissent dans la fonction

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

exponentielle usuelle. Dans le même ordre d'idée, Carlitz a défini des fonctions de Bessel. Pour tout entier naturel m, la fonction de Bessel d'ordre m telle qu'elle est définie par Carlitz (voir [6]), associe à tout élément z de C la somme de la série :

$$J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{q^{m+k}}}{D_{m+k} D_k^{q^m}}. \tag{1}$$

On notera que l'analogie entre $J_0(z)$ et la fonction de Bessel en caractéristique nulle $\Sigma_{k=0}^{\infty}(z^{2k}/k!^2)$ respecte l'analogie des D_k avec les factorielles.

Les dérivations et équations différentielles satisfaites par les fonctions de Bessel classiques seront ici traduites grâce à un opérateur différence Δ défini pour toute fonction f par $\Delta f(z) = f(Tz) - Tf(z)$ et par son premier itéré Δ^2.

Rappelons les relations fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta J_m(z) &= J_m(Tz) - TJ_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (T^{q^{m+k}} - T) z^{q^{m+k}}}{D_{m+k}^q D_k^{q^m}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{q^{m+k}}}{D_{m+k-1}^q D_k^{q^m}} \end{aligned} \tag{2}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta^2 J_m(z) &= J_m(T^2 z) - 2TJ_m(Tz) + T^2 J_m(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (T^{q^{m+k}} - T^{q^m} + T^{q^m} - T) z^{q^{m+k}}}{D_{m+k-1}^q D_k^{q^m}}, \end{aligned} \tag{3}$$

en combinant ces relations, on en déduit l'équation aux différences

$$\Delta^2 J_m(z) = (T^{q^m} - T)\Delta J_m(z) - [J_m(z)]^q\ ,$$

ou encore :

$$\Delta J_m(Tz) = T^{q^m} \Delta J_m(z) - [J_m(z)]^q.$$

En continuant de s'inspirer de l'analogie entre k et le corps des nombres rationnels et entre J_m et les fonctions de Bessel usuelles, il est raisonnable d'attendre un énoncé d'indépendance algébrique correspondant au théorème de C. L. Siegel (voir par exemple [2]). Des équations fonctionnelles vérifiées par les fonctions J_m, on déduit aisément que les hypothèses d'indépendance linéaire dans le théorème suivant sont nécessaires :

THÉORÈME 1.1. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de C, algébriques sur k et linéairement indépendants sur k ; alors, pour tout entier naturel m, les $2n$ éléments $J_m(\alpha_1), \Delta J_m(\alpha_1), \ldots, J_m(\alpha_n), \Delta J_m(\alpha_n)$ sont algébriquement indépendants sur k.*

Remarque. On pourrait *à priori* s'attendre à disposer d'un tel énoncé avec en sus les valeurs aux points étudiés de l'exponentielle de Carlitz : $z \mapsto e(z)$. Cependant, il est facile de vérifier qu'en caractéristique 2, on a $J_0(z^2) = e(z)^2$.

Les résultats connus dans cette direction étaient assez partiels. Un premier énoncé affirmant la transcendance d'un nombre parmi plusieurs valeurs des fonctions J_m et ΔJ_m se trouve dans la thèse de Geijsel (voir [14] Corollaire 12.7), un autre se trouve dans [11] où le deuxième auteur a montré comment un avatar de la méthode de Wade pouvait servir à prouver que $J_m(r)$ (et aussi $\Delta J_m(r)$) est transcendant quand r est un élément non nul de k. Enfin, le deuxième auteur a établi le cas $n = 1$ du Théorème 1.1 dans [13].

La difficulté d'une éventuelle adaptation de la méthode de Siegel–Shidlovsky est la non k-linéarité de l'équation aux différences satisfaite par $J_m(z)$ (voir par exemple [15] ou [17] pour cette méthode). Nous verrons comment l'équation fonctionnelle que vérifie $J_m(z)$, conduit à l'introduction d'un T-module auquel on appliquera la procédure classique pour prouver de la transcendance ou de l'indépendance algébrique sur un groupe algébrique (comparer avec les travaux de P. Philippon, [16]). La difficulté qui apparaît alors dans cette approche est que les T-modules associés ne possèdent pas d'exponentielle au sens usuel. Nous montrons cependant qu'une « exponentielle faible » existe, et qu'elle est suffisamment « forte » pour faire passer la méthode.

Cette approche nous permettra en fait d'établir directement un énoncé plus général, dont le Théorème 1.1 ne sera qu'un cas particulier. Le théorème d'indépendance algébrique des valeurs de l'exponentielle de Carlitz (analogue de Lindemann–Weierstraß) obtenu par A. Thiery dans [18] en découlera également. Il s'agit d'un énoncé concernant les T-modules et leur exponentielle.

1.2. NOTATIONS ET THÉORÈME PRINCIPAL

Commençons par rappeler quelques notations et introduire les quelques définitions nécessaires pour ce travail.

DÉFINITION 1.2. Par T-module de dimension g, on entend la donnée d'un couple $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$ où $\mathbb{G}_a^g$ désigne le groupe additif de dimension g et Φ un homomorphisme injectif d'anneaux, $\mathbb{F}_q$-linéaire de $\mathbb{F}_q[T]$ dans l'anneau $M_{g\times g}(C)\{F\}$ des endomorphismes de $\mathbb{G}_a^g$ vérifiant

$$\Phi(T) = a_0 F^0 + \cdots + a_d F^d,$$

où les $a_i (0 \leqslant i \leqslant d)$ sont des matrices* $g \times g$ à coefficients dans C avec $a_d \neq 0$, et F est l'endomorphisme de Frobenius sur $\mathbb{G}_a^g$ relatif à q. Pour $d = 0$ et $\Phi(T) = F^0$, on parlera du module trivial noté simplement $\mathbb{G}_a^g$ et, quand le contexte sera clair, E

* Par convention, une matrice $a \times b$ possède a lignes et b colonnes ; les vecteurs considérés sont des vecteurs colonnes, même si pour des raisons de commodité typographique nous les écrivons parfois en ligne.

sera simplement désigné par Φ. Si tous les a_i sont à coefficients dans un corps K on dira que Φ et E sont définis sur K.

DÉFINITION 1.3. Un sous T-module B de dimension l d'un T-module $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$ est un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbb{G}_a^g$ (de dimension l) tel que $\Phi(A)B$ est inclus dans B. Si E n'a pas de sous T-module propre, on dira qu'il est simple. Plus généralement, lorsqu'il n'y a pas d'hypothèse de connexité, on parlera de sous T-module non nécessairement connexe.

DÉFINITION 1.4. On dira que Ψ est un homomorphisme analytique à un paramètre associé au T-module E si $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_g)$ est une application $\mathbb{F}_q$-linéaire, analytique de C dans C^g satisfaisant à $\Psi(Tz) = \Phi(T)\Psi(z)$. Si tous les coefficients de Ψ (*i. e.* toutes les dérivées divisées des Ψ_i) sont dans un corps K sur lequel E est défini, on dira que Ψ est défini sur K. L'homomorphisme Ψ est dit d'ordre analytique inférieur à ρ s'il existe un réel $w > 0$ tel que pour tout z dans C et tout i compris entre 1 et g, $\deg(\Psi_i(z)) \leqslant wq^{\rho \deg(z)}$. On dira que Ψ est d'ordre au plus ρ (ou parfois pour simplifier d'ordre ρ) s'il est d'ordre analytique au plus ρ et si de plus pour tout sous-corps K de C, tout élément $\xi \in C$, transcendant sur K, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $a \in \mathbb{F}_q[T]$ et tout $\Psi(z) \in K[\xi]$, $\deg_\xi(\Psi(az)) \leqslant \alpha q^\rho (\deg_\xi(\Psi(z)) + 1)$.

DÉFINITION 1.5. On dira que e_Φ est une exponentielle faible du T-module $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$, si e_Φ est une application $\mathbb{F}_q$-linéaire de C^g dans C^g, analytique sur C^g, telle qu'il existe $M \in M_g(\mathbb{F}_q[T])$, telle que $e_\Phi(M\mathbf{z}) = \Phi(T)e_\Phi(\mathbf{z})$ pour tout $\mathbf{z} \in C^g$, et telle que e_Φ soit localement surjective (plus précisément, telle qu'il existe $r > 0$, tel que pour tout $\mathbf{z} \in C^g$, et tout $\mathbf{y} \in C^g$, tels que $|\mathbf{y} - e_\Phi(\mathbf{z})| < r$, il existe $\mathbf{z}' \in C^g$ tel que $\mathbf{y} = e_\Phi(\mathbf{z}')$*). Comme pour les homomorphismes analytiques à un paramètre, on dira que e_Φ est définie sur K si toutes ses dérivées divisées sont dans K. On dira que e_Φ est admissible si K est une extension finie de k, et si la hauteur du point défini par les dérivées divisées d'ordre au plus M (*i. e.* $(\Delta^i e_\Phi(0))_{|i| \leqslant M}$) est $\leqslant c_1 M(\log(M) + 1)$. On dira enfin qu'un homomorphisme analytique à un paramètre est une spécialisation de e_Φ s'il existe $\boldsymbol{\xi} \in C^g$, tel que $\Psi(\mathbf{z}) = e_\Phi(\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal.

THÉORÈME 1.6. *Soit $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$ un T-module simple non trivial*† *de dimension g, Ψ un homomorphisme analytique à un paramètre associé à E d'ordre inférieur à ρ et tous deux définis sur $\overline{k}$. On suppose de plus que Ψ est une spécialisation d'une exponentielle faible admissible définie sur une extension finie K de k, et que l'anneau des endomorphismes de E est commutatif. Pour tout n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'éléments de $\overline{k}$, linéairement indépendants sur k, le degré de*

* Cette propriété d'invariance des rayons sera en fait automatique pour les fonctions étudiées, car elles sont additives.

† On dira que E est non trivial s'il n'est pas isomorphe à $\mathbb{G}_a^g$ avec action trivale.

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

transcendance sur k du corps engendré par les ng nombres $\Psi_i(\alpha_j)$, ($1 \leqslant i \leqslant g$, $1 \leqslant j \leqslant n$) est supérieur ou égal à n/ρ.

Au paragraphe suivant, nous établissons quelques lemmes sur les sous T-modules de T-modules. La construction de transcendance est faite au paragraphe 3, on trouvera enfin la preuve du Théorème 1.6 au sous-paragraphe 3.1 et celle du Théorème 1.1 au paragraphe 4.

2. Préliminaires sur les sous T-modules

Nous aurons besoin d'une description des sous T-modules d'une puissance d'un T-module simple généralisant la description faite pour les puissances de modules de Drinfel'd (voir par exemple [5], [9] et [18]). Ces lemmes établissent des propriétés similaires à celles rencontrées pour les sous-modules de puissances de modules simples au sens de Bourbaki (voir [4] paragraphe 4), mais nos T-modules simples ne sont pas des A-modules simples (au sens de [3] paragraphe 10) à cause des sous T-modules de torsion. Les arguments sont toutefois très proches.

DÉFINITION 2.1. Un endomorphisme f d'un T-module $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$ de dimension g est un endomorphisme du groupe algébrique $\mathbb{G}_a^g$ tel que pour tout a dans A, on ait : $\Phi(a) \circ f = f \circ \Phi(a)$. Il est donc équivalent de demander que f soit un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire satisfaisant à $\Phi(T) \circ f = f \circ \Phi(T)$.

Nous allons commencer par vérifier que la dimension d'un sous-module d'une puissance d'un T-module simple est bien celle que l'on imagine.

LEMME 2.2. *Soit $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$ un T-module simple de dimension g et n un entier naturel. Les seuls sous T-modules de E^n sont de dimension multiple de g.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un sous T-module B de E^n de dimension minimale $lg + r$ avec $0 < r < g$. Le groupe algébrique $B + E \times 0^{n-1}$ est de dimension supérieure à celle de B. Si elle est égale à celle de B, c'est que $E \times 0^{n-1}$ est inclu dans B.

Le même raisonnement appliqué à un produit quelconque de la forme

$$D_i = 0^i \times E \times 0^{n-i-1}$$

prouve que, comme B n'est pas E^n (sinon $l = n$ et $r = 0$), l'une de ces sommes $B + D_i$ est de dimension strictement plus grande que celle de B. Or, $\dim(B + D_i) = \dim(B) + \dim(D_i) - \dim(B \cap D_i)$.

Par minimalité de B, $\dim(B + D_i)$ est un multiple de g et par simplicité de E il en est bien de même pour $B \cap D_i$ donc pour le T-module B, ce qui est absurde.

Le Lemme 2.2 est donc établi. Le lemme suivant permet de « présenter par un système générateur » un sous-module d'un T-module :

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

LEMME 2.3. *Soient E un T-module simple de dimension $g \geqslant 1$, n un entier $\geqslant 1$, et B un sous T-module de E^n de dimension ug. Il existe un morphisme de T-modules surjectif Θ de E^u sur B. De plus, Θ est représenté par une matrice $n \times u$ à coefficients dans* $\mathrm{End}(E)$.

DÉMONSTRATION. On fait une récurrence sur $m = n + \dim(B)$. Il n'y a rien à prouver pour $m = 1$. On suppose la propriété satisfaite jusqu'au rang m. Soient B un sous T-module de E^n et $n + \dim(B) = m + 1$. Considérons la projection π_1 de B sur $E^{n-1} \times 0$. Si la projection $\pi_1(B)$ a même dimension que B, par hypothèse de récurrence, il existe un morphisme f de E^u sur $\pi_1(B)$. Le noyau de π_1 est donc un sous T-module de $\{0\}^{n-1} \times E$ fini, non nécessairement connexe. C'est donc un A-module de torsion fini. Il existe donc un élément a de A tel que* $\Phi^n(a)$ annule $\ker(\pi_1)$. On pose alors pour tout $\boldsymbol{y}$ de E^u, $\Theta(\boldsymbol{y}) = \Phi^n(a)(\boldsymbol{z})$ pour un $\boldsymbol{z}$ dans l'image réciproque de $f(\boldsymbol{y})$ par π_1 ; Θ est bien définie, et son image est incluse dans B. Inversement, soit $\boldsymbol{z}$ un élément de B. Il existe alors un élément $\boldsymbol{z}'$ de B tel que $\Phi^n(a)(\boldsymbol{z}') = \boldsymbol{z}$; en effet, $\Phi^n(a)(B)$ est un sous T-module de B de même dimension que B. Si tel n'était pas le cas, le noyau de $\Phi^n(a)$ serait de dimension au moins 1 ; il en serait donc de même pour celui de $\Phi(a)$. Mais, $\ker(\Phi(a))$ est un sous T-module de E non nécessairement connexe, et comme E est simple, sa composante neutre est nécessairement nulle puisque $\Phi(a)$ ne peut être identiquement nul ; une contradiction. Comme B est connexe, on a bien $\Phi^n(a)(B) = B$.

Soit alors $\boldsymbol{y}$ un élément de E^u tel que $f(\boldsymbol{y}) = \pi_1(\boldsymbol{z}')$. On vérifie aisément que $\Theta(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}$, ce qui assure la surjectivité de Θ.

Si la projection $\pi_1(B)$ n'a pas même dimension que B, son noyau N est de dimension $\geqslant 1$, et c'est un sous T-module de $\{0\}^{n-1} \times E$; N est donc égal à $\{0\}^{n-1} \times E$. Mais alors, B est somme directe de B_1 et de N (avec $B_1 = \pi_1(B)$).

Par hypothèse de récurrence, B_1 est l'image par un morphisme surjectif f de E^{u-1}, et le morphisme (f, Id) fournit l'application Θ. L'application Θ est déterminée par ses n vecteurs coordonnées $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$, qui sont des polynômes additifs en u variables. L'action de $\Phi^n(T)$ étant diagonale, on tire de l'identité $\Theta \circ \Phi(T) = \Phi(T) \circ \Theta$ que chaque Θ_i est une somme de u endomorphismes de E, ce qui montre le Lemme 2.3.

On vérifie maintenant que les sous-modules d'un module de la forme $\mathbb{G}_a^k \times E^n$, où E est simple sont « scindés » :

LEMME 2.4. *Soit B un sous T-module de $(\mathbb{G}_a)^k \times E^n$, où E est un T-module simple de dimension g non trivial et où $\mathbb{G}_a$ est le T-module trivial. Alors, il existe un sous T-module B_1 de E^n et un sous-groupe algébrique connexe G de $\mathbb{G}_a^k$ tel que $B = G \times B_1$.*

DÉMONSTRATION. Si $g = 1$, cet énoncé découle du Lemme 1, page 205 de [10]. On supposera donc pour la suite de la preuve que $g \geqslant 2$. Considérons d'abord

* On note Φ^n la matrice formée des blocs diagonaux $(\Phi, \ldots, \Phi)$.

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

le cas d'un sous T-module B de $\mathbb{G}_a \times E^n$. L'intersection de B avec $0 \times E^n$ est de la forme $0 \times B_1$ où B_1 est un T-module de dimension ug (par le Lemme 2.2). Si $\dim(B) = \dim(B_1)$ alors, comme B est connexe et contient B_1, ils sont égaux. Sinon la dimension de B n'ayant pu chuter que de 1 par intersection, $\dim(B) = ug + 1$.

Le T-module B est inclu dans $\pi_1(B) \times \pi_2(B)$ où π_1 est la projection sur $\mathbb{G}_a \times 0$ et π_2 est la projection sur $0 \times E^n$. Le seul cas non trivial à considérer est celui où $\pi_1(B) \neq 0$. Comme g est supérieur à 2, $\pi_1(B)$ est de dimension 1, $\pi_2(B)$ est de dimension lg où $l \geqslant u$. La dimension de $\pi_2(B)$ étant comprise entre $\dim(B)$ et $\dim(B) - 1$, on a finalement $l = u$ et $B = \mathbb{G}_a \times B_1$.

Traitons ensuite, par récurrence sur $k + \dim(B)$, le cas d'un sous T-module B de $\mathbb{G}_a^k \times E^n$. L'intersection de B avec $0 \times \mathbb{G}_a^{k-1} \times E^n$ est de dimension égale à celle de B ou un de moins.

Si c'est celle de B, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Sinon c'est $\dim(B) - 1$ et par hypothèse de récurrence,

$$B \cap (0 \times \mathbb{G}_a^{k-1} \times E^n) = G \times B_1.$$

Par hypothèse de récurrence encore, la projection $\pi_3(B)$ de B sur le facteur $0 \times \mathbb{G}_a^{k-1} \times E^n$ est de la forme $G' \times B_2$, et, comme la projection contient l'intersection, on sait que B_2 contient B_1.

Mais, la projection $\pi_3(B)$ est aussi de dimension comprise entre $\dim(B)$ et $\dim(B) - 1$. Comme $g \geqslant 2$, on a $B_1 = B_2$ (toujours, en tenant compte du Lemme 2.2). En conclusion, B contient $0 \times B_1$ et comme B_1 est la projection sur $0 \times E^n$, B est bien de la forme $H \times B_1$, ce qui prouve le Lemme 2.4.

On considère maintenant un T-module déterminé par un morphisme $\Phi(T)$ et on rappelle que le C-espace vectoriel des applications $\mathbb{F}_q$-linéaires de $\mathbb{G}_a^n$ dans $\mathbb{G}_a$, $\hom(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{G}_a)$ est muni d'une structure de $C[T]$ module par l'application qui, à un couple $(P, \sum_{i=0}^l a_i T^i)$ de $\hom(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{G}_a) \times C[T]$, associe $\sum_{i=0}^l a_i P \circ \Phi(T^i)$ noté $(\sum_{i=0}^l a_i T^i).P$.

Le lemme qui suit donne un critère pour assurer qu'un T-module possède un anneau d'endomorphismes trivial (et donc *à fortiori* qu'il est simple) :

LEMME 2.5. *Soit E un T-module de dimension n tel que le $C[T]$-module* $\hom(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{G}_a)$ *soit libre de rang* 1. *Alors* $\mathrm{End}(E) = \Phi(A)$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de suivre les arguments de J. Yu (voir [21]). Soit donc f un endomorphisme de E. L'application de $\hom(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{G}_a)$ dans lui même qui, à g, associe $g \circ f$ est un homomorphisme de $C[T]$-module. L'hypothèse sur le rang entraîne l'existence d'un élément $\mathcal{B}$ de $C[T]$ tel que, pour tout g, on ait $\mathcal{B}.g = g \circ f$.

L'élévation de cette formule à la puissance q montre que si $\mathcal{B}^{(q)}$ est le polynôme obtenu en élevant formellement les coefficients de $\mathcal{B}$ à la puissance q on obtient

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{B}^{(q)}.g^q = g^q \circ f$. Comme on a aussi $\mathcal{B}.g^q = g^q \circ f$ pour tout g ; il s'ensuit que $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(q)}$ et donc $\mathcal{B} \in \mathbb{F}_q[T]$, ce qu'il fallait établir.

Le lemme suivant permet de « présenter par équations » un sous-module d'un T-module :

LEMME 2.6. *Soient E un T-module simple de dimension g, et B un sous T-module de E^n. Supposons que* $\mathrm{End}(E)$ *est abélien. Il existe alors un élément V de $M_{(n-u)\times n}(\mathrm{End}(E))$ tel que B soit la composante neutre du sous T-module non nécessairement connexe* $\ker V$.

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 2.3, B est l'image d'une matrice R de taille $u \times n$ à coefficients dans $\mathrm{End}(E)$. En d'autres termes, B est l'ensemble des

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_u \end{pmatrix},$$

où les x_i parcourent C^g.

Pour des raisons de dimension, il existe donc une sous-matrice S de R de taille $u \times u$ de cette matrice qui est surjective. On supposera, sans perte de généralité qu'il s'agit du bloc $u \times u$ en haut à gauche de R. Comme $\mathrm{End}(E)$ est abélien, on a ${}^t\mathrm{Com}(S)S = \det(S)$, et $\det(S)$ est un élément de $\mathrm{End}(E)$. On peut alors exprimer

$$\det(S) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_u \end{pmatrix}$$

en fonction de $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_u \end{pmatrix}$. La matrice obtenue en écrivant les y_i (pour $i \geqslant u+1$) en fonction des y_j (pour $1 \leqslant j \leqslant u$) est la matrice cherchée. Plus précisément, si $R = \begin{pmatrix} S \\ S' \end{pmatrix}$, posons

$$V = (S'{}^t\mathrm{Com}(S), -\det(S)\mathrm{Id}_{(n-u)\times(n-u)}).$$

La matrice V est bien dans $M_{(n-u)\times n}(\mathrm{End}(E))$, et si $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est un élément de B, soit $\boldsymbol{x} \in C^{gu}$ tel que $\boldsymbol{y} = R.\boldsymbol{x}$, on a clairement (toujours car $\mathrm{End}(S)$ est abélien)

$$\begin{aligned} V.\boldsymbol{y} &= S'{}^t\mathrm{Com}(S). \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_u \end{pmatrix} - \det(S) I_{(n-u)\times(n-u)} \begin{pmatrix} y_{u+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= S' \det(S)\mathrm{Id}_{u\times u}\boldsymbol{x} - \det(S).S'.\boldsymbol{x} = 0. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

Par définition, $\ker(V)$ est un sous T-module de E^n non nécessairement connexe, et, puisque $B \subset \ker(V)$ est un sous T-module de E^n de même dimension que $\ker(V)$ (pour des raisons de rang), le sous T-module B est nécessairement la composante neutre de $\ker(V)$. Le Lemme 2.6 est donc entièrement établi.

3. La construction de transcendance

On supposera donnés dans tout ce paragraphe, une extension finie K de k, un T-module simple de dimension g, $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$, ainsi qu'un homomorphisme analytique à un paramètre Ψ défini sur K, d'ordre inférieur à ρ induit par une exponentielle faible admissible e_Φ définie sur K.

On se donne enfin des éléments $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de $\overline{k}$, linéairement indépendants sur k. On supposera de plus que l'anneau des endomorphismes de E est abélien (les hypothèses du Théorème 1.6 sont ainsi satisfaites).

Soient ε un nombre réel > 0 et M un entier, $M \geqslant q^{q^q}$. On pose alors :

$$x = M(\log_q(\log_q(M)))^{-\varepsilon},$$

et

$$y = (\log_q(\log_q(M)))^{2\varepsilon}.$$

Fixons également un entier h tel que

$$(2g-1)h\varepsilon > n - 4\varepsilon g.$$

Pour la suite, tous les logarithmes considérés seront pris en base q.

On définit la hauteur d'un polynôme P (notée $h(P)$) à coefficients dans $\overline{k}$ comme étant la hauteur du point projectif défini par 1 et par les coefficients de P. Sa taille (notée $t(P)$) est définie par : $t(P) = h(P) + \deg(P)$.

LEMME 3.1. *Il existe deux constantes c_2 et M_0 telles que pour tout $M \geqslant M_0$, il existe un polynôme*

$$P_M \in \mathbb{F}_q[T][X_1, \dots, X_h, Y_{1,1}, \dots, Y_{g,1}, \dots, Y_{1,h}, \dots, Y_{g,h}],$$

tel que

$$\deg_{\mathbf{X}}(P_M) \leqslant x, \qquad \deg_{\mathbf{y_i}}(P_M) \leqslant y,$$

$$t(P_M) \leqslant c_2 M \log_q(M)(\log_q \log_q(M))^{-h\varepsilon(2g-1)}$$

et tel que la fonction φ_M

$$\varphi_M(\mathbf{z}) := P_M(\mathbf{z}, \Psi_1(z_1), \dots, \Psi_g(z_1), \dots, \Psi_1(z_h), \dots \Psi_g(z_h)),$$

s'annule à un ordre $\geqslant M$ en 0 (on note $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_h)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_h)$ et $\boldsymbol{Y}_i = (Y_{1,i}, \dots, Y_{g,i})$).

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION. La condition imposée à φ_M de s'annuler à l'ordre M à l'origine se traduit par un système linéaire de $c_3 M^h$ équations, les inconnues étant les coefficients de P_M. Ces dernières sont en nombre $\leqslant c_4 x^h y^{gh}$.

Comme e_Φ est admissible, les coefficients de ce système sont algébriques sur k et engendrent une extension de k de degré relatif borné ; des calculs classiques assurent qu'ils sont de plus de hauteur au plus $c_5 M \log_q(M)$. Enfin, l'exposant de Dirichlet du système vaut $c_6(\log_q \log_q(M))^{(2g-1)h\varepsilon}$.

Le lemme de Siegel (voir par exemple [19]) permet de conclure.

On se fixe pour toute la suite de ce paragraphe, une telle suite de polynômes $(P_M)_{M \geqslant M_0}$. Soit l un entier positif, on définit alors

$$\Gamma_1(l) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i,\, a_i \in \mathbb{F}_q[T], \deg(a_i) \leqslant l \right\}.$$

On notera que $\operatorname{card}(\Gamma_1(l)) = q^{n(l+1)}$.
De même, on pose

$$\Gamma_2(l) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha'_i,\, a_i \in \mathbb{F}_q[T], \deg(a_i) \leqslant l \right\},$$

où les α'_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont des éléments quelconques de C^g.
Notons $\boldsymbol{\xi}$ le point de C^g induisant Ψ. On pose enfin

$$\Gamma(l) = \left\{ (x_1, \ldots, x_h), e_\Phi(\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{y}_1), \ldots, e_\Phi(\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{y}_h) \right\},$$

où $x_j = \Sigma_{i=1}^n a_{i,j} \alpha_i$, $\boldsymbol{y}_j = \Sigma_{i=1}^n a_{i,j} \alpha'_i$, $a_{i,j} \in \mathbb{F}_q[T]$, $\deg(a_{i,j}) \leqslant l$ (ainsi, les x_j décrivent $\Gamma_1(l)$ et les $\boldsymbol{y}_j$ décrivent $\Gamma_2(l)$). On notera également que $\operatorname{card}(\Gamma(l)) \geqslant q^{hnl}$.

On introduira également les deux nouveaux paramètres suivants

$$S = [\log_q \log_q \log_q(M)], \qquad M' = M(\log_q(\log_q(M)))^{-n+4\varepsilon g}.$$

On dispose alors du :

LEMME 3.2. *Pour $M \geqslant M_0$, il existe un point $X_0 \in \Gamma(S)$ tel que P_M ne soit pas nul en X_0 le long de Ψ à un ordre $\geqslant 2hM' + 1$.*

DÉMONSTRATION. Si ce n'était pas le cas, le lemme de zéros (voir [22], [23], ou [12]) nous assurerait de l'existence d'un sous T-module B de $\mathbb{G}_a^h \times E^h$ (avec $B \subsetneq \mathbb{G}_a^h \times E^h$) tel que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\binom{M' + r(B)}{r(B)} \operatorname{card}(\Gamma(S)/(\Gamma(S) \cap B)) H(B\,; d_x, d_y) \leqslant c_7 d_x^h d_y^{hg},$$

où d_x, d_y désignent les degrés en $X_1, \ldots, X_h$ (resp. en $Y_{i,j}$) de P_M, et $r(B)$ désigne la codimension analytique de B *via* la flèche

$$(z_1, \ldots, z_h) \mapsto (z_1, \ldots, z_h, \Psi_1(z_1), \ldots, \Psi_g(z_1), \ldots, \Psi_1(z_h), \ldots, \Psi_g(z_h)).$$

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

Pour obtenir le lemme, il suffit de montrer qu'une telle inégalité ne peut avoir lieu pour aucun sous T-module B.

Supposons tout d'abord que $d_y = 0$. Dans ce cas, on peut appliquer le lemme de zéros au groupe $\mathbb{G}_a^h$, et l'on obtient l'existence d'un sous T-module B de $\mathbb{G}_a^h$ (disons de dimension b) tel que

$$M'^{h-b}\operatorname{card}(\widetilde{\Gamma(S)}/(\widetilde{\Gamma(S)} \cap B)) \leqslant c_8 d_x^{h-b},$$

où $\widetilde{\Gamma(S)}$ désigne la projection de $\Gamma(S)$ sur le premier facteur. Mais, on a

$$\operatorname{card}(\widetilde{\Gamma(S)}/(\widetilde{\Gamma(S)} \cap B)) \geqslant q^{Sn(h-b)},$$

et $d_x \leqslant x$. On obtient une contradiction en tenant compte de ces inégalités et de la valeur des paramètres.

De même, si $d_x = 0$, le lemme de zéros appliqué à E^h nous assure de l'inégalité

$$M'^{h-c'} \leqslant c_9 y^{(h-c)g},$$

où $gc = \dim(B)$ et $h - c'$ est la codimension analytique de B *via* la flèche

$$(z_1, \ldots, z_h) \mapsto (\Psi_1(z_1), \ldots, \Psi_1(z_h), \ldots, \Psi_g(z_1), \ldots, \Psi_g(z_h)).$$

Comme E est un T-module simple, d'anneau d'endomorphismes abélien, le Lemme 2.6 nous assure l'existence d'une matrice V de taille $(h - c) \times h$, à coefficients dans $\operatorname{End}(E)$, telle que B soit la composante neutre de $\ker(V)$. On en déduit que $c' \leqslant c$, ce qui entraîne $M' \leqslant y^g$ (rappelons que $c < h$). Or, le choix des paramètres interdit une telle inégalité.

Traitons maintenant le cas « générique » (*i. e.* d_x et $d_y \neq 0$). Le Lemme 2.4 nous assure que B est de la forme $B_1 \times B_2$, où B_1 est un sous-module de $\mathbb{G}_a^h$ et B_2 est un sous-module de E^h. Nous noterons b_1 la dimension de B_1 et gb_2 la dimension de B_2 (voir le Lemme 2.2).

Commençons par évaluer $r(B)$. Comme la codimension analytique de $B_1 \times B_2$ est $\geqslant$ la codimension analytique de $B_1 \times E^h$ (resp. de $\mathbb{G}_a^h \times B_2$), on obtient $r(B) \geqslant h - b_1$ (resp. $r(B) \geqslant h - b_2$), c'est-à-dire :

$$r(B) \geqslant h - \min(b_1, b_2).$$

L'inégalité du lemme de zéros entraîne donc (pour M assez grand devant h) :

$$M'^{h-\min\{b_1,b_2\}}\operatorname{card}(\Gamma(S)/\,\Gamma(S) \cap B)) \leqslant c_{10} d_x^{h-b_1} d_y^{g(h-b_2)}.$$

Cette inégalité et le choix des paramètres (rappelons que $d_x \leqslant x$ et que $d_y \leqslant y$) entraîne $b_1 \leqslant b_2$. Enfin :

$$\operatorname{card}(\Gamma(S)/\,\Gamma(S) \cap B)) \geqslant \operatorname{card}(\Gamma(S)/\,\Gamma(S) \cap (B_1 \times E^h))) \geqslant q^{Sn(h-b_1)}.$$

En reportant cette inégalité dans la précédente, on en tire :

$$M'^{h-b_1} q^{Sn(h-b_1)} \leqslant c_{10} x^{h-b_1} y^{g(h-b_1)},$$

c'est-à-dire

$$M'q^{Sn} \leqslant c_{11}xy^g$$

et cette inégalité est impossible pour M assez grand. Le Lemme 3.2 est donc entièrement établi.

L'énoncé qui suit va par la suite nous permettre d'appliquer les critères classiques d'indépendance algébrique :

LEMME 3.3. *Il existe une constante c_{12} telle que pour tout*

$$\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_h) \in \mathbb{N}^h,$$

vérifiant $|\boldsymbol{m}| \leqslant 2hM' + 1$, il existe un polynôme $P_{M,\boldsymbol{m}}$ dans $k[\boldsymbol{X}, \mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_h]$ tel que $\deg_{\boldsymbol{X}}(P_{M,\boldsymbol{m}}) \leqslant x$, et $\deg_{\mathbf{Y}_i}(P_{M,\boldsymbol{m}}) \leqslant y$ (pour $1 \leqslant i \leqslant h$),

$$t(P_{M,\boldsymbol{m}}) \leqslant M\log(M)(\log\log(M))^{-n+4\varepsilon g}$$

et tel que $P_{M,\boldsymbol{m}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_h)$ soit le coefficient d'ordre $\boldsymbol{m}$ de la fonction

$$P_M(x_1 + z_1, \ldots, x_h + z_h, \boldsymbol{y}_1 + \Psi(z_1), \ldots, \boldsymbol{y}_h + \Psi(z_h)).$$

DÉMONSTRATION. L'existence de $P_{M,\boldsymbol{m}}$ est évidente, l'assertion sur les degrés découle du fait que $\deg_{\boldsymbol{X}}(P_M) \leqslant d_x \leqslant x$, $\deg_{\mathbf{Y}_i}(P_M) \leqslant d_y \leqslant y$. L'assertion sur la taille provient du fait que e_Φ est admissible, ce qui nous assure que :

$$t(P_{M,\boldsymbol{m}}) \leqslant t(P_M) + c_{13}M'\log(M').$$

Mais, par le Lemme 3.1, on a

$$t(P_M) \leqslant M\log(M)(\log\log(M))^{-h\varepsilon(2g-1)}.$$

Le choix effectué pour M' ainsi que l'inégalité $(2g-1)h\varepsilon > n - 4\varepsilon g$ permettent de conclure.

3.1. PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL

On peut maintenant établir le Théorème 1.6. Pour ce faire, posons

$$R(M) = M\log(M) \qquad S(M) = M\log(M),$$
$$T(M) = M\log(M)\,(\log(\log(M)))^{-n+4\varepsilon g} \qquad D(M) = (\log(\log(M)))^{2\varepsilon+\rho}.$$

Notons k_S la clôture séparable de k, et t le degré de transcendance (sur k_S) de $L = k_S(\Psi_i(\alpha_j))_{1\leqslant i\leqslant g, 1\leqslant j\leqslant n}$, et fixons une base de transcendance $\theta_1, \ldots, \theta_t$ de L sur k_S. Notons enfin L_S la sous-extension séparable maximale de L (qui est une extension finie de $k_S(\theta_1, \ldots, \theta_t)$). Il existe alors un élément θ_{t+1} de L_S tel que

$$L_S = k_S(\theta_1, \ldots, \theta_t)[\theta_{t+1}].$$

Pour régler les problèmes d'inséparabilité, il suffit d'élever les fonctions étudiées à la puissance p^e (où e est le degré d'inséparabilité), le reste de l'argument étant inchangé. Nous avons donc choisi, afin d'alléger la présentation de ne traiter ici que le cas $e = 0$ (on pourra par exemple se reporter à [18] pour une discussion analogue, où la rédaction inclut le cas général).

Rappelons le lemme d'interpolation suivant :

LEMME 3.4. *Soient $\theta_1, \dots, \theta_{t+1}$ des éléments de C, et Ξ un élément de $C[X_1, \dots, X_t, X_{t+1}]$, unitaire en X_{t+1} tel que $\Xi(\theta_1, \dots, \theta_{t+1}) = 0$. Il existe alors deux constantes c_{14} et c_{15}, ne dépendant que des θ_i et de Ξ telles que pour tout $R \geqslant c_{15}$, et tout $(\theta'_1, \dots, \theta'_t) \in C^t$, tels que $\deg(\theta_i - \theta'_i) \leqslant -R$ (pour $1 \leqslant i \leqslant t$), il existe un élément $\theta'_{t+1} \in C$ tel que*

$$\deg(\theta_{t+1} - \theta'_{t+1}) \leqslant c_{14}R$$

et

$$\Xi(\theta'_1, \dots, \theta'_{t+1}) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Voir [18], Lemme 7.

Fixons maintenant, et pour toute la suite, un polynôme unitaire (en X), $\Xi \in A[X_1, \dots, X_t][X]$ s'annulant en $(\theta_1, \dots, \theta_{t+1})$. Le Lemme 3.4 nous assure alors que pour tout $R \geqslant c_{15}$ et tout $(\theta'_1, \dots, \theta'_t)$ vérifiant :

$$\deg(\theta_i - \theta'_i) \leqslant -R,$$

il existe un élément $\theta'_{t+1} \in C$ tel que $\deg(\theta_{t+1} - \theta'_{t+1}) \leqslant c_{14}R$ et

$$\Xi(\theta'_1, \dots, \theta'_{t+1}) = 0.$$

Pour M assez grand, on peut supposer que $R(M) \geqslant R$. Les nombres $\Psi_i(\alpha_j)$ sont des fractions rationnelles de la forme :

$$\frac{P_{i,j}(\theta_1, \dots, \theta_{t+1})}{\Delta(\theta_1, \dots, \theta_t)}$$

(les polynômes $P_{i,j}$ étant dans $A[X_1, \dots, X_{t+1}]$ et Δ étant un « dénominateur commun » des $\Psi_i(\alpha_j)$ peut être choisi dans $A[X_1, \dots, X_t]$).

Rappelons que $\boldsymbol{\xi}$ est le point de C^g induisant Ψ ; pour $(\theta'_1, \dots, \theta'_t)$ vérifiant $\deg(\theta_i - \theta'_i) \leqslant -R(M)$, $1 \leqslant i \leqslant t$, on choisit des éléments α'_j de C^g $(1 \leqslant j \leqslant n)$ tels que

$$e_{\Phi,i}(\boldsymbol{\xi} \cdot \alpha'_j) = \frac{P_{i,j}(\theta'_1, \dots, \theta'_{t+1})}{\Delta(\theta'_1, \dots, \theta'_t)}$$

(on conviendra de choisir $\alpha'_j = (\alpha_j, \dots, \alpha_j)$ si $\theta'_i = \theta_i$).

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

On notera que par continuité, la non nullité de $\Delta(\theta_1, \ldots, \theta_t)$ assure celle de $\Delta(\theta'_1, \ldots, \theta'_t)$. Enfin, l'existence de nombres α'_j découle facilement des hypothèses faites sur e_Φ.

Le lemme de zéros (Lemme 3.2) nous assure l'existence d'un point

$$X_0 = (x_1, \ldots, x_h, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_h) \in \Gamma(S),$$

tel que la fonction :

$$P_M(x_1 + z_1, \ldots, x_h + z_h, \boldsymbol{y}_1 + e_\Phi(z_1\boldsymbol{\xi}), \ldots, \boldsymbol{y}_h + e_\Phi(z_h\boldsymbol{\xi})),$$

ne s'annule pas à l'ordre $2hM' + 1$ en 0. Nous noterons $\boldsymbol{m}'$ un indice minimal pour lequel la dérivée divisée $P_{M,\boldsymbol{m}'}$ de P_M d'ordre $\boldsymbol{m}'$ ne soit pas nulle en X_0.

Pour i compris entre 1 et h, notons $(a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ des éléments de A, de degré $\leqslant S$ tels que

$$\boldsymbol{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\alpha'_j.$$

Avec ces notations, posons

$$Q_M(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n) = P_{M,\boldsymbol{m}'}\left(x_1, \ldots, x_h, \sum_{i=1}^{n} \Phi(a_{i,1})\boldsymbol{X}_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \Phi(a_{i,h})\boldsymbol{X}_i\right).$$

Le polynôme Q_M vérifie dans ces conditions (d'après la Définition 3.3, le choix des paramètres et le Lemme 1.4) :

$$\deg_{\boldsymbol{X}}(Q_M) \leqslant yq^{[S\rho]+1} \leqslant c_{16} \log\log(M)^{2\varepsilon+\rho},$$

$$t(Q_M) \leqslant c_{17} M \log(M)(\log\log(M))^{-n+4\varepsilon g}.$$

Par définition de Q_M, on a $Q_M(e_\Phi(\boldsymbol{\xi}\cdot\alpha'_1), \ldots, e_\Phi(\boldsymbol{\xi}\cdot\alpha'_n)) \neq 0$; on pose alors

$$\begin{aligned}
&Q_{M,\theta'_1,\ldots,\theta'_{t+1}}(X_1, \ldots, X_{t+1})\\
&\quad = \Delta(X_1, \ldots, X_t)^{c_{16}(\log\log(M))^{2\varepsilon+\rho}}\\
&\qquad \times Q_M\left(\begin{pmatrix} \dfrac{P_{1,1}(X_1, \ldots, X_{t+1})}{\Delta(X_1, \ldots, X_t)} \\ \vdots \\ \dfrac{P_{g,1}(X_1, \ldots, X_{t+1})}{\Delta(X_1, \ldots, X_t)} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \dfrac{P_{1,n}(X_1, \ldots, X_{t+1})}{\Delta(X_1, \ldots, X_t)} \\ \vdots \\ \dfrac{P_{g,n}(X_1, \ldots, X_{t+1})}{\Delta(X_1, \ldots, X_t)} \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Par construction, $Q_{M,\theta'_1,\ldots,\theta'_{t+1}}(\theta'_1, \ldots, \theta'_{t+1}) \neq 0$, et

$$Q_{M,\theta'_1,\ldots,\theta'_{t+1}}(X_1, \ldots, X_{t+1}) \in A[X_1, \ldots, X_{t+1}].$$

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

Ce polynôme vérifie en outre :

$$\deg_{X_1,\dots,X_{t+1}}(Q_{M,\theta'_1,\dots,\theta'_{t+1}}) \leqslant c_{18}(\log\log(M))^{2\varepsilon+\rho},$$

et

$$t(Q_{M,\theta'_1,\dots,\theta'_{t+1}}) \leqslant c_{19}M\log(M)(\log(\log(M)))^{-n+4\varepsilon g}.$$

La construction de $Q_{M,\theta'_1,\dots,\theta'_{t+1}}$ nous assure que :

$$Q_{M,\theta'_1,\dots,\theta'_{t+1}}(\theta_1,\dots,\theta_{t+1}) = \Delta(\theta_1,\dots,\theta_t)^{c_{16}(\log\log(M))^{2\varepsilon+\rho}}C_{M,\boldsymbol{m}'},$$

où $C_{M,\boldsymbol{m}'}$ est le coefficient d'ordre $\boldsymbol{m}'$ de la fonction :

$$\begin{aligned} g_M(z_1,\dots,z_h) &= P_M(x_1+z_1,\dots,x_h+z_h,\Psi(x_1) \\ &\qquad +\Psi(z_1),\dots,\Psi(x_h)+\Psi(z_h)). \end{aligned}$$

L'inégalité ultramétrique nous assure que :

$$\sup\{|g_M|,|z|=r\} = |g_M|_r = |\varphi_M|_r,$$

où φ_M a été définie au Lemme 3.1 sitôt que $r \geqslant S+\max\{\deg(\alpha_i)\}$. Pour M assez grand, on peut supposer que cette quantité est positive, et on posera $r = S+\max\{\deg(\alpha_i)\}$.

Le Lemme de Schwarz (voir [20]) nous assure donc que pour tout $R \geqslant r$,

$$\deg(C_{M,\boldsymbol{m}'}) \leqslant M(r-R)+\log(|\varphi_M|_R).$$

Comme les fonctions Ψ ont par hypothèse un ordre de croissance $\leqslant \rho$, on a :

$$\log(|\Psi_i|_R) \leqslant c_{20}q^{(\rho+\varepsilon)R}.$$

Donc

$$\log(|\varphi_M|_R) \leqslant (xR + c_{21}yq^{(\rho+\varepsilon)R} + t(P_M)).$$

Prenons $R = \log(M)/\rho+\varepsilon$; pour M assez grand, on a bien $R > r$. L'inégalité fournie par le Lemme de Schwarz nous donne donc en tenant compte de la valeur des différents paramètres (et pour ε assez petit) :

$$\deg(C_{M,\boldsymbol{m}'}) \leqslant -c_{22}M\log(M).$$

Cette inégalité donne, en tenant compte de la taille de Δ (et toujours pour M assez grand)

$$\deg(Q_{M,\theta'_1,\dots,\theta'_{t+1}}(\theta_1,\dots,\theta_{t+1})) \leqslant -c_{23}M\log(M).$$

L'inégalité ultramétrique ainsi que la relation :

$$\deg(\theta_i-\theta'_i) \leqslant -c_{24}M\log(M)$$

(où c_{24} est choisi $\gg$ c_{23}), nous donne (rappelons que par construction les coefficients de Q_M sont de degré $\leqslant c_{25}M\log(M)$)

$$\deg(Q_{M,\theta'_1,\dots,\theta'_{t+1}}(\theta'_1,\dots,\theta'_{t+1})) \leqslant -c_{26}M\log(M).$$

Comme $t(\rho+2\varepsilon) < n-4\varepsilon g$, on a la relation :

$$\lim_{M\to\infty}\frac{S(M)}{T(M)D(M)^t} = +\infty.$$

Le critère d'indépendance algébrique appliqué avec les suites définies ci-dessus (voir, [18]) jointe à la suite de polynômes construite au paragraphe précédent montre alors que le degré de transcendance de l'ensemble étudié ne peut être strictement inférieur à n/ρ. C'est ce que l'on voulait.

Le théorème 1.6 est donc entièrement établi.

4. Les applications

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du Théorème 1.1. Le T-module que nous considérerons (pour les fonctions de Bessel–Carlitz) est déterminé par :

$$\Phi_m(T)(X_1,X_2) = (TX_1+X_2, -X_1^q+T^{q^m}X_2).$$

Pour $m=0$, ce n'est rien d'autre que la seconde puissance tensorielle du module de Carlitz à un signe près (voir [1]). Afin de pouvoir appliquer le Théorème 1.6, il faut commencer par prouver le résultat suivant :

LEMME 4.1. *Pour tout entier $m\geqslant 0$, le T-module de dimension 2 défini par :*

$$\Phi_m(T) = \begin{pmatrix} T & 1 \\ 0 & T^{q^m}\end{pmatrix}F^0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0\end{pmatrix}F$$

admet une exponentielle faible admissible $e_m = e_{\Phi_m}$ définie sur k, telle que $(J_m(z), \Delta J_m(z))$ soit une spécialisation de e_{Φ_m}.

DÉMONSTRATION. Recherchons les fonctions additives, développables en série $e_m(z_1,z_2) = (f_1(z_1)+g_1(z_2)\,;\, f_2(z_1)+g_2(z_2))$ (une telle forme est imposée par le fait que e_m est additive) telles que :

$$e_m\left[\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} T & 1 \\ -F & T^{q^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(z_1)+g_1(z_2) \\ f_2(z_1)+g_2(z_2)\end{pmatrix}.$$

Cette équation se traduit par :

$$\begin{cases} f_1(Tz_1) = Tf_1(z_1)+f_2(z_1), \\ g_1(Tz_2) = Tg_1(z_2)+g_2(z_2), \\ f_2(Tz_1) = T^{q^m}f_2(z_1)-f_1(z_1)^q, \\ g_2(Tz_2) = T^{q^m}g_2(z_2)-g_1(z_2)^q. \end{cases}$$

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

On voit aisément que ces conditions imposent que les q^m premiers termes du développement en série entière des f_i, g_i sont nuls (rappelons que ces dernières sont $\mathbb{F}_q$-linéaires).

Notons $(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$, resp. $(c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ les termes d'ordre q^m et q^{m+1} du développement de e_m. Imposons de surcroit à e_m de se spécialiser en $(J_m, \Delta J_m)$ pour $z = z_1 = z_2$ (d'autres choix sont évidemment possibles).

Les conditions ci-dessus conduisent alors aux équations :

$$\begin{cases} (T^{q^m} - T)b_{1,1} = b_{2,1}, \\ (T^{q^m} - T)b_{1,2} = b_{2,2}, \\ b_{1,1} + b_{1,2} = c_m, \\ b_{2,1} + b_{2,2} = c_m(T^{q^m} - T), \end{cases}$$

où c_m est le coefficient de z^{q^m} dans le développement en série de la fonction $J_m(z)$.

On obtient de plus, pour les termes en q^{m+1} :

$$\begin{cases} (T^{q^{m+1}} - T)c_{1,1} = c_{2,1}, \\ (T^{q^{m+1}} - T)c_{1,2} = c_{2,2}, \\ (T^{q^{m+1}} - T)c_{2,1} = -b_{1,1}^q, \\ (T^{q^{m+1}} - T^{q^m})c_{1,2} = -b_{1,2}^q. \end{cases}$$

Une récurrence permet alors d'assurer l'existence d'une fonction e_m développable en série entière, qui se spécialise en les fonctions de Bessel–Carlitz. En fait, tout choix de $b_{1,1}$ conduit à une telle fonction. Nous poserons $b_{1,1} = 1$, ce qui impose (toujours par induction) que e_m est définie sur k.

Les propriétés de convergence de la série e_m ainsi que les estimations sur la hauteur des dénominateurs des coefficients de e_m (pour l'admissiblité) s'obtiennent par des calculs classiques, comparables à ceux menés par exemple dans ([7]) ; nous ne les détaillerons pas ici. Il reste donc à vérifier la surjectivité locale.

Commençons par la surjectivité au voisinage de l'origine. Comme on le vérifie aisément, ni la matrice $(b_{i,j})$, ni la matrice $(c_{i,j})$ ne sont inversibles (ce qui aurait donné immédiatement la surjectivité locale). On vérifie toutefois, que les équations précédentes imposent que les matrices $(b_{i,j})$ et $(c_{i,j})$ sont linéairement indépendantes.

Posons $f(\mathbf{z}) = (b_{i,j})(\mathbf{z}^{q^m})$, et $g(\mathbf{z}) = (c_{i,j})(\mathbf{z}^{q^{m+1}})$. Nous allons vérifier par calcul que $f(\mathbf{z}) + g(\mathbf{z})$ est localement surjective au voisinage de 0. En d'autres termes, étant donné $\boldsymbol{y}$ assez petit, il s'agit de trouver $\mathbf{z}$ tel que :

$$f(\mathbf{z}) + g(\mathbf{z}) + e'_m(\mathbf{z}) = \boldsymbol{y},$$

où l'on a posé $e'_m(\mathbf{z}) = e_m(\mathbf{z}) - f(\mathbf{z}) - g(\mathbf{z})$.

Pour ce faire, on commence par trouver $\mathbf{z}_0$ tel que $f(\mathbf{z}_0) + g(\mathbf{z}_0) = \boldsymbol{y}$, et l'on pose $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{h} = \mathbf{z}_1 + \boldsymbol{h}_1$, où $(f + g)(\mathbf{z}_1) = -e'_m(\mathbf{z}_0)$.

Par itération de ce procédé, on trouve :

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U^i(\mathbf{z}_0),$$

où U^i est le i-ième itéré de l'application $U = -(f+g)^{-1} \circ e'_m$. Par conséquent, on aura bien montré la surjectivité locale de « l'exponentielle » , pourvu que la série précédente converge, c'est-à-dire si l'application U est suffisamment contractante.

Le fait que U est suffisamment contractante vient de l'estimation :

$$\deg(U(\mathbf{z})) \leqslant q \deg(\mathbf{z}) + c,$$

où c est un nombre réel ; on obtient cette majoration à l'aide d'un calcul élémentaire.

Pour conclure sur la surjectivité locale, il suffit d'observer que e_m est additive, et de se ramener à l'origine par translation ; le rayon dans lequel on obtient un antécédent est donc indépendant du point. Le Lemme 4.1 est donc établi.

Passons maintenant aux autres conditions nécessaires pour obtenir l'admissibilité. Dans l'énoncé qui suit, les C espaces vectoriels considérés sont munis de la norme du sup, on posera ainsi pour tout $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$, $\deg(\mathbf{z}) = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\deg(z_i)\}$ (on pourra comparer les résultats des deux lemmes qui suivent aux énoncés de [8]).

LEMME 4.2. *Soit $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$ un T-module de dimension g ; on écrira :*

$$\Phi(T) = a_0 F^0 + a_1 F + \cdots + a_d F^d,$$

avec $a_d \neq 0$. Soit également f une fonction entière de C^r dans C^g. On suppose l'existence d'un entier naturel e tel que f satisfasse pour tout $\mathbf{z}$ dans C^r la relation $f(T^e\mathbf{z}) = \Phi(T) f(\mathbf{z})$. Dans ces conditions, il existe deux réels > 0, notés c_{27} et c_{28} tels que pour tout $\mathbf{z} \in C^r$, on ait

$$\deg(f(\mathbf{z})) \leqslant c_{27} q^{d \deg(\mathbf{z})/e} + 2c_{28}.$$

DÉMONSTRATION. L'ultramétricité du degré montre que :

$$\deg(f(T^e\mathbf{z})) \leqslant q^d \deg(f(\mathbf{z})) + A,$$

où A est un majorant des degrés des coefficients des matrices a_i $(0 \leqslant i \leqslant d)$. Pour tout entier naturel m on a donc :

$$\deg(f(T^{e(m+1)}\mathbf{z})) \leqslant q^d \deg(f(T^{em}\mathbf{z})) + c_{28}.$$

En écrivant cette inégalité pour m compris entre 0 et $n-1$, en divisant par q^{dm} et en faisant la somme, il vient pour tout entier n :

$$\deg(f(T^{en}\mathbf{z})) \leqslant q^{dn} \deg(f(\mathbf{z})) + 2c_{28}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

Soit maintenant B un majorant de $\deg(f(\mathbf{z}))$ sur la boule $\deg(\mathbf{z}) \leqslant 1$.

Pour tout $\mathbf{z}$ dans C^r, on en déduit donc : $\deg(f(\mathbf{z}/T^{\deg(\mathbf{z})})) \leqslant B$. Posons $\mathbf{z} = T^{en}\mathbf{z}'$ où en est le plus petit multiple entier de e tel que $ne \geqslant \deg(\mathbf{z})$, l'inégalité précédente prouve alors :

$$\deg(f(\mathbf{z})) \leqslant q^{dn} c_{27} + 2c_{28}.$$

Il s'ensuit bien l'inégalité annoncée, c'est-à-dire le Lemme 4.2.

Dans le même ordre d'idée que le Lemme 4, le Lemme 4.3 ci-dessous permet quant à lui de contrôler la croissance arithmétique d'un point transformé par $\Phi(a)$. Supposons que $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ est tel que $z_i \in K[\xi]$ où K est un sous-corps de C et ξ est un élément de C transcendant sur K. Désignons par $\deg_\xi(\mathbf{z})$ le maximum des degrés des z_i en tant que polynômes en ξ.

LEMME 4.3. *Soit $E' = (\mathbb{G}_a^g, \Psi)$ un T-module de dimension g ; on écrira :*

$$\Psi(T) = a_0 F^0 + a_1 F + \cdots + a_d F^d,$$

avec $a_d \neq 0$. On suppose l'existence d'un entier naturel e et d'un T-module $E = (\mathbb{G}_a^g, \Phi)$ tels que l'on ait $\Phi(T^e) = \Psi(T)$. Dans ces conditions, il existe deux réels c_{29} et c_{30} strictement positifs, tels que pour tout a dans A, on ait :

$$\deg_\xi(\Phi(a)(\mathbf{z})) \leqslant q^{d \deg(a)/e}(c_{29} \deg_\xi(\mathbf{z}) + 2c_{30}).$$

DÉMONSTRATION. L'ultramétricité du degré en ξ montre que :

$$\deg_\xi(\Phi(T^e)(\mathbf{z})) \leqslant q^d \deg_\xi(\mathbf{z}) + c_{30},$$

où c_{30} est un majorant des degrés en ξ des coefficients des matrices a_i, $(0 \leqslant i \leqslant d)$. Le procédé de sommation utilisé au cours de la preuve du lemme précédent (Lemme 4) implique alors pour tout entier naturel n, l'inégalité

$$\deg_\xi(\Phi(T^{en})(\mathbf{z})) \leqslant q^{dn} \deg_\xi(\mathbf{z}) + 2c_{30}, \tag{4}$$

supposons maintenant que en est le plus grand multiple de e inférieur au degré en T de a. On peut écrire :

$$a = u_n T^{en} + \cdots + u_s T^{es} + \cdots + u_0,$$

où les u_i sont des éléments de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré $\leqslant e-1$. Ecrivons $\Phi(a)(\mathbf{z})$ sous la forme :

$$\Phi(T^{en})(\Phi(u_n)(z)) + \cdots + (\Phi(u_0)(z)),$$

l'application de la relation (4) et le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes de $\mathbb{F}_q[T]$ de degré $\leqslant e-1$ conduit au résultat du Lemme 4.3.

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

La fonction $f(z) = (J_m(z), \Delta J_m(z))$ vérifie les hypothèses du Lemme 4.2, avec $\Phi(T) = \Phi_m(T^2)$, soit $e = 2$, et $d = 1$. Elle est donc d'ordre analytique $\frac{1}{2}$. De même, le Lemme 4.2 appliqué au T-module $(\mathbb{G}_a^2, \Phi_m)$, implique que f est d'ordre $\frac{1}{2}$ au sens de la Définition 1.4.

Il reste à montrer que $E_m = (\mathbb{G}_a^2, \Phi_m)$ est simple et que son anneau des endomorphismes est trivial :

LEMME 4.4. *Le T-module $E_m = (\mathbb{G}_a^2, \Phi_m)$ est simple pour tout $m \geqslant 0$ et l'on a* $\mathrm{End}(E_m) = \Phi_m(A)$. À fortiori, *son anneau des endomorphismes est abélien.*

DÉMONSTRATION. On pourrait prouver la simplicité de la même manière que J. Yu dans [21]. De même que dans [21], il est facile de voir que $\hom(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{G}_a)$ est un $C[T]$-module libre de rang 1 engendré par la première coordonnée, et l'on peut appliquer le Lemme 2.5.

Mais, le deuxième auteur a déjà signalé une méthode élémentaire (voir [13], Lemme 6). Nous choisirons ici de donner une autre preuve plus directe et élémentaire encore de ce résultat sur l'anneau des endomorphismes.

Commençons par établir, par récurrence sur n les assertions suivantes :

(i) Le terme dominant de $\Phi_m(T^{2n})$ est $A_n F^n$ où la diagonale de A_n est $((-1)^n, (-1)^n)$ et F est le Frobenius ;
(ii) Le terme dominant de $\Phi_m(T^{2n-1})$ est $B_n F^n$ où B_n est triangulaire inférieure de seul coefficient non nul $(-1)^{n+1}$.

Ces propriétés sont claires si $n = 0$. Un calcul prouve que le terme dominant de $\Phi_m(T^2)$ est $A_1 F$ où la diagonale de A_1 est $((-1), (-1))$, et comme cette matrice est de plus triangulaire inférieure, le coefficient dominant de $\Phi_m(T^{2n})$ est $A_1.A_1^{(q)} \ldots A_1^{(q^{n-1})} F^n$ où $A_1^{(q)}$ est la matrice obtenue à partir de A_1 en élevant tout ses coefficients à la puissance q. La propriété (i) en découle aisément.

Le produit de $A_n F^n$ par le terme dominant de $\Phi_m(T)$ donne alors le point (ii).

Soit maintenant f un endomorphisme du T-module E_m, prouvons par récurrence sur n que si f est un polynôme de Ore degré n en F, alors f appartient à $\Phi_m(A)$.

Supposons donc d'abord $f = A_0 F^0$; de la relation $f \circ \Phi_m(T) = \Phi_m(T) \circ f$, on tire que $f = a_0 F^0$ où a_0 est dans $\mathbb{F}_q$. Supposons donc le résultat connu pour tout f dont le terme dominant est de degré j en F, avec $j \leqslant n - 1$ et considérons un endomorphisme f dont le terme de plus haut degré en F est $\mathfrak{A} F^n$ où $\mathfrak{A}$ est la matrice carrée $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. En regardant le terme en F^{n+1} dans :

$$f \circ \Phi_m(T) = \Phi_m(T) \circ f,$$

il vient que $b = 0$ et $d = a^q$. Le coefficient supérieur gauche de F^{n+1} dans :

$$f \circ \Phi_m(T^2) = \Phi_m(T^2) \circ f$$

https://doi.org/10.1023/A:1001528318868 Published online by Cambridge University Press

nous indique pour sa part que $a = a^q$ et donc a est dans $\mathbb{F}_q$.

L'application $g = f - (-1)^n \Phi_m(aT^{2n})$ est encore un endomorphisme et le coefficient B de son terme en F^n est avec les conventions précédentes $\begin{pmatrix} 0 & c' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le terme inférieur gauche de la relation $g \circ \Phi_m(T^2) = \Phi_m(T^2) \circ g$ nous apporte le fait que c' est dans $\mathbb{F}_q$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $g - (-1)^{n+1}\Phi_m(c'T^{2n-1})$ permet alors de conclure. Le Lemme 4.4 est donc entièrement établi.

On a donc montré que les fonctions de Bessel–Carlitz généralisées forment un sous-groupe à un paramètre qui est une spécialisation d'une exponentielle faible du T-module E_m, vérifiant les hypothèses du Théorème 1.6. Le Théorème 1.1 n'est donc qu'un cas particulier de ce dernier.

On pourra noter que dans le Lemme 4.1, le choix de la matrice identité n'est pas canonique. On est en effet plus habitué à étudier des « exponentielles » vérifiant $\exp(d(\Phi)\boldsymbol{z}) = \Phi(T)\exp(\boldsymbol{z})$. Il était toutefois imposé par la nécessité d'obtenir les fonctions de Bessel–Carlitz par spécialisation.

Il est intéressant de noter que la méthode passe avec des notions d'exponentielles aussi faibles. De plus, en remplaçant T.Id par $d\Phi_m$, on vérifie sans difficulté que l'on obtient également une exponentielle faible $\tilde{e}_m$ qui est également admissible, définie sur k et d'ordre $\frac{1}{2}$.

Toute spécialisation de cette dernière conduit donc par application du Théorème 1.6 à des résultats d'indépendance algébrique comparable. Toutefois, il ne semble pas que ces spécialisations conduisent à des fonctions « classiques » .

Enfin, remarquons que le résultat d' A. Thiery (voir [18]) découle également du Théorème 1.6. En effet, si $E = (\mathbb{G}_a, \Phi)$ est un module de Drinfel'd de rang d, il possède une exponentielle (et donc une exponentielle faible admissible), et son ordre (analytique comme arithmétique) est au plus d ; de plus, son anneau des endomorphismes est toujours abélien (on peut par exemple se reporter à [18], ou à [7], pour des énoncés plus précis).

Notons d_1 le rang (sur A) de l'anneau des endomorphismes $\mathcal{O}$ de E (rappelons que d_1 divise d), et soient alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\bar{k}$, qui sont $\mathcal{O}$-linéairement indépendants. On en déduit alors (par multiplication par les éléments d'un système générateur $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant d_1}$ de $\mathcal{O}$ sur A) nd_1 éléments de $\bar{k}$ qui sont A-linéairement indépendants.

Le degré de transcendance sur k des nd_1 nombres $e_\Phi(f_j\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant d_1}$ est donc au moins nd_1/d d'après le Théorème 1.6. Mais, les d_1 nombres $e_\Phi(f_j\alpha_i)_{1 \leqslant j \leqslant d_1}$ sont tous dans $\bar{k}(e_\Phi(\alpha_i))$. On en tire donc que le degré de transcendance sur k des n-nombres $e_\Phi(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est au moins nd_1/d, ce qui est bien le résultat d'A. Thiery.

Références

1. Anderson, G. et Thakur, D.: Tensor powers of the Carlitz module and zeta values, *Ann. of Math.* **132** (1990), 159–191.
2. Beukers, F.: Some new results on algebraic independence of E-functions, In: A. Baker (ed.) *New Advances in Transcendence Theory*, (1988), 56–67.
3. Bourbaki, N.: *Algèbre, Chapitre 2*, Masson, Paris.
4. Bourbaki, N.: *Algèbre, Chapitre 8*, Masson, Paris.
5. Bronawell, D.: Algebraic independence on Drinfel'd exponential and quasi-periodic functions, In: *Proc. Third Conf. Canadian Number Theory Assoc., Advances in Number Theory*, 1993, pp. 341–365.
6. Carlitz, L.: Some special functions over $\mathbb{F}_q[x]$, *Duke Math. J.* **27** (1960), 139–158.
7. David, S. et Denis, L.: Isogénie minimale entre modules de Drinfel'd, *Math. Annal*. **315** (1999), 97–140.
8. Denis, L.: Problèmes diophantiens sur les t-modules. Publications de Paris 6, (1992) ; voir aussi, *J. Théo. Nombres Bordeaux* **7** (1995), 97–110.
9. Denis, L.: Géométrie diophantienne sur les modules de Drinfel'd, In: D. Goss, D. Hayes, et M. Rosen (eds), *Workshop on Function Fields, Ohio*, De Gruyter, Berlin, 1992, pp. 285–303.
10. Denis, L.: Théorème de Baker et modules de Drinfel'd, *J. Number Theory* **43**(2), (1993), 203–215.
11. Denis, L.: Un critère de transcendance en caractéristique finie, *J. Algebra* **182** (1996), 522–533.
12. Denis, L.: Lemmes de zéros pour les T-modules, *Michigan J. Math.* **43**(1) (1996), 67–79.
13. Denis, L.: Valeurs transcendantes des fonctions de Bessel–Carlitz. *Ark. Math*. **36**(1) (1998), 73–85.
14. Geijsel, J. M.: Transcendence properties of the Carlitz–Bessel functions, *Math. Centre Report Z.W.*, (1973), 17–73.
15. Lang, S.: *Introduction to Transcendental Numbers*, Addison-Wesley, New York, 1966, p. 4178.
16. Philippon, P.: Variétés abéliennes et indépendance algébrique I et II, *Invent. Math.* **70** (1983), 289–318 et **72** (1983), 389–405.
17. Shidlowski, A.: *Transcendental Numbers*, Studies in Math. 12, De Gruyter, Berlin, 1989.
18. Thiery, A.: Théorème de Lindemann-Weierstraß pour les modules de Drinfel'd, *Compositio Math*. **95** (1995), 1–42.
19. Yu, J.: A six exponentials theorem in finite characteristic, *Math. Annal*. **272** (1985), 91–98.
20. Yu, J.: Transcendence and Drinfeld modules: several variables, *Duke Math. J*. **58** (1989), 559–575.
21. Yu, J.: Transcendence and special zeta values in characteristic p, *Ann. of Math.* **134** (1991), 1–23.
22. Yu, J.: Transcendence in finite characteristic, In: D. Goss, D. Hayes, et M. Rosen, (eds), *Workshop on Function Fields, Ohio*, De Gruyter, Berlin, 1992, pp. 254–264.
23. Yu, J.: Analytic homomorphisms into Drinfel'd modules, *Ann. of Math.* **145** (1997), 215–233.