Canad. Math. Bull. Vol. **32** (2), 1989

SUR UNE PROPRIETE DES FONCTIONS PROPRES DE L'OPERATEUR DE LAPLACE-BELTRAMI

PAR

M. CHIPOT ET V. OLIKER

ABSTRACT. Si M est une variété riemannienne de dimension n, $n \geqq 2$, et de métrique g on s'intéresse au problème: trouver toutes les fonctions régulières $F : M \longrightarrow IR$ qui sont valeurs propres ainsi que leur carré de l'opérateur de Laplace-Beltrami, Δ, associé à g.

0. **Introduction.** Au cours de notre séjour commun à Minneapolis, dans le cadre de l'institut, nous nous sommes intéressés au problème suivant: si M est une variété Riemannienne de dimension n, $n \geqq 2$, et de métrique g, trouver toutes les fonctions régulières $F : M \longrightarrow \mathbf{R}$ qui sont valeurs propres ainsi que leur carré de l'opérateur de Laplace-Beltrami, Δ, associé à g?

Plus précisément, si U est un ouvert connexe de M, on se propose de déterminer toutes les solutions du système:

$$\Delta F = \lambda F \quad \text{dans } U \tag{1}$$

$$\Delta F^2 = \mu F^2 \quad \text{dans } U. \tag{2}$$

Ce problème, qui présente un certain intérêt en analyse harmonique (voir par exemple [S.S.]), a fait l'objet d'une étude dans [C.E.T.] et [T.]. Commençons par rappeler quelques uns des résultats de [C.E.T.].

Tout d'abord si $M = \mathbf{R}^n$ et si F n'est pas identiquement nulle dans U alors on a nécessairement $\lambda \geqq 0$, $\mu = 4\lambda$ et il existe $C \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}^n$ tels que $|v|^2 = \lambda$ et

$$F(x) = C . e^{(x.v)} \ \forall x \in U.$$

($(.)$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$, $|\ \ |$ la norme associée).

Si maintenant M est l'espace hyperbolique de dimension n, réalisé par exemple par B_n la boule unité ouverte de $\mathbf{R}^n$, alors le rôle des exponentielles de la géométrie euclidienne est joué par le noyau de Poisson hyperbolique lequel est défini pour $v \in S^{n-1}$, la sphère unité de $\mathbf{R}^n$, par:

$$P_v(x) = \left(\frac{1-|x|^2}{|x-v|^2}\right)^{n-1} \quad \forall x \in B_n. \tag{3}$$

Reçu par la rédaction le 13 janvier 1987 et, sous une forme revisée, le 6 avril 1988.
AMS Subject Classifications: 58G25, 53AXX, 53A35, 53B21.

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-020-8 Published online by Cambridge University Press

Plus précisément, le résultat principal de [C.E.T.] montre que si

$$\lambda > -\frac{1}{4}(n-1)^2, \mu = 4\lambda + (n-1)^2\left(1+\epsilon\sqrt{1+\frac{4\lambda}{(n-1)^2}}\right), \epsilon = \pm 1 \tag{4}$$

et si F vérifie (1) et (2) alors il existe $C \in \mathbf{R}$, $v \in S^{n-1}$ tels que

$$F(x) = C.\left(P_v(x)\right)^{1/k}\ \forall x \in U. \tag{5}$$

oú k est donné par

$$k = 2\left(1+\epsilon\sqrt{1+\frac{4\lambda}{(n-1)^2}}\right)^{-1}$$

et $k = 0$ si $\lambda = \mu = 0$.

En fait ce résultat est complété dans [CH] (cf. encore [C.E.T.] pour le cas $n = 2$ et [T]). On peut en effet montrer que si F n'est pas identiquement nulle dans U alors nécessairement λ et μ vérifient (4) et naturellement l'on a encore (5).

Bien sûr, des deux cas envisagés ci-dessus-ie. $\mathbf{R}^n$ et le cas hyperbolique-c'est le second qui donne lieu à la plus grande difficulté et les techniques de [C.E.T.], [CH], [T] utilisent pour le résoudre un judicieux changement de coordonnées joint à des calculs très élaborés.

Dans cet article nous voudrions donner quelques généralisations des résultats précédents en utilisant en particulier des arguments de nature géométrique. Le cas de la dimension deux sera complètement élucidé. Il est clair qu'il y a des obstructions de nature géométrique à (1) et (2). En effet si par exemple $U = M$ et si M est une variété compacte sans bord alors d'après (2) ΔF^2 garde un signe constant et F^2, d'où encore F, ne peut être que constante (cf.[C]). On notera que l'on raisonne ici sur F^2 qui est la puissance de F la plus simple possible (après F!) mais si F vérifie (1) (2) alors pour tout μ, F^μ est valeur propre pour Δ.

1. **Préliminaires.** On désignera par M une variété analytique de dimension n. On verra par la suite que cette hypothèse peut être affaiblie, néanmoins, elle permet de pourvoir appliquer le principe du prolongement analytique ce qui sera parfois commode. $u^1, u^2, \ldots, u^n$ désignera un système de coordonnées locales sur M et $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$ la base de vecteurs tangents correspondante dans TM, le fibré tangent à M. On supposera M munie d'une métrique Riemannienne g et on posera $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j), i, j = 1, \ldots, n$. (Dans la suite tout indice latin sera supposé variant de 1 à n). On notera pas ∇_k la dérivation covariante dans la direction k (voir par exemple [B]). Si Γ_{ij}^k désignent les symboles de Christoffel de seconde espèce associés à la métrique g les dérivées covariantes secondes d'une fonction F sont données par

$$\nabla_{ij}F = F_{ij} - \Gamma_{ij}^k F_k \tag{6}$$

où $F_k = \frac{\partial F}{\partial u^k}$, $F_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$. On désignera par Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M i.e. en faisant la convention des indices répétés et en coordonnées locales:

$$\Delta F = g^{ij}\nabla_{ij} F \tag{7}$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (g_{ij}) et on posera

$$|\nabla F|^2 = g^{ij} F_i F_j. \tag{8}$$

On a alors le lemme suivant:

Lemme 1. *Soient U un ouvert de M et F une fonction de U dans* **R**, *de classe C^2, vérifiant* (1)(2). *Soit $a \in U$ un point où* $F(a) > 0$. *On peut alors définir dans un voisiange V de a inclu dans U*

$$\varphi = \operatorname{Log} F \tag{9}$$

et la fonction φ ainsi définie vérifie:

$$|\nabla\varphi|^2 = \frac{\mu - 2\lambda}{2} \quad \textit{dans } V \tag{10}$$

$$\Delta\varphi = \frac{4\lambda - \mu}{2} \quad \textit{dans } V. \tag{11}$$

Démonstration. Puisque F est continue il est clair que F est strictement positive dans un voisinage V de a sur lequel on peut définir $\varphi = \operatorname{Log} F$. On a alors dans V

$$\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial u^i} = \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u^i} = \frac{F_i}{F} \tag{12}$$

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{1}{F^2}\frac{\partial F}{\partial u^i}\frac{\partial F}{\partial u^j} = \frac{F_{ij}}{F} - \frac{F_i F_j}{F^2}. \tag{13}$$

D'autre part on vérifie aisément que

$$\nabla_{ij} F^2 = 2F\nabla_{ij} F + 2F_i F_j$$

et de (1)(2) on déduit

$$\mu F^2 = \Delta F^2 = 2F.\Delta F + 2|\nabla F|^2 = 2\lambda F^2 + 2|\nabla F|^2.$$

Ce qui donne

$$|\nabla F|^2 = \frac{\mu - 2\lambda}{2} F^2.$$

Reprenant (12) et (13) on obtient dans V

$$|\nabla\varphi|^2 = \frac{|\nabla F|^2}{F^2} = \frac{\mu - 2\lambda}{2}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{F}\Delta F - \frac{|\nabla F|^2}{F^2} = \lambda - \frac{\mu - 2\lambda}{2} = \frac{4\lambda - \mu}{2}$$

ce qui termine la démonstration de lemme.

REMARQUE 1. Le referee et E. Ferus nous ont indiqué que (10) et (11) impliquent que les surfaces de niveau de φ forment une famille isoparamétrique (voir, par exemple, [N]). Malgré tout, les relations (10), (11) son très particulières et les resutats généraux sur les familles isoparamétriques ne contiennent pas nos resultats du reste nous ne les utilisons pas ici.

Posons:

$$\operatorname{Hess}\varphi = (\nabla_{ij}\varphi)$$
$$|\operatorname{Hess}\varphi|^2 = g^{ks}g^{ij}\nabla_{ki}\varphi\nabla_{sj}\varphi.$$

REMARQUE 2. La quantité ci-dessus est positive. De plus elle ne s'annulle que si $\nabla_{ij}\varphi = 0\ \forall i,j$. En effet pour le voir, en faisant éventuellement un changement de coordonnées $u^1, u^2, \ldots, u^n$ par une transformation linéaire, on peut supposer que l'on a au point que l'on considère $(g^{ij}) = I$ où I est la matrice de l'identité. On a alors

$$|\operatorname{Hess}\varphi|^2 = \sum_{s,i}(\nabla_{si}\varphi)^2$$

et le résultat en découle.

On désigne par R_{ij} le tenseur de Ricci associé à g et défini par

$$R_{ij} = R^k_{ijk} \tag{15}$$

où R^l_{ijk} sont les symboles de Riemann de seconde espèce définis par (cf. [E]):

$$R^l_{ijk} = g^{lm}R_{mijk}. \tag{16}$$

On a alors:

LEMME 2. *Soit φ une fonction vérifiant* (10)(11). *On a*

$$|\operatorname{Hess}\varphi|^2 - R_{ij}c^ic^j = 0 \quad \textit{dans } V$$

avec $c^i = g^{ij}\varphi_j$.

DÉMONSTRATION. On utilise les règles usuelles de dérivation covariante (voir par exemple [E] section 11) et de (10) on déduit

$$\begin{aligned}0 = \Delta(2^{-1}|\nabla\varphi|^2) &= 2^{-1}g^{ks}\nabla_s(\nabla_k g^{ij}\varphi_i\varphi_j)\\ &= 2^{-1}g^{ks}\nabla_s(g^{ij}\nabla_{ki}\varphi.\,\varphi_j + g^{ij}\varphi_i\nabla_{kj}\varphi)\\ &= 2^{-1}g^{ks}g^{ij}(\nabla_s\nabla_{ki}\varphi.\,\varphi_j + \nabla_{ki}\varphi\nabla_{sj}\varphi + \nabla_{si}\varphi\nabla_{kj}\varphi\\ &\quad + \varphi_i\nabla_s\nabla_{kj}\varphi)\\ &= |\operatorname{Hess}\varphi|^2 + g^{ks}\nabla_s\nabla_{ki}\varphi g^{ij}\varphi_j.\end{aligned} \tag{18}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-020-8 Published online by Cambridge University Press

Utilisant l'identité de Ricci (cf. [E])

$$\nabla_s \nabla_{ki} \varphi = \nabla_i \nabla_{ks} \varphi - R^l_{ski} \varphi_l$$

on obtient

$$\begin{aligned} g^{ks} \nabla_s \nabla_{ki} \varphi &= \nabla_i (\Delta \varphi) - g^{ks} R^l_{ski} \varphi_l \\ &= -g^{ks} g^{lm} R_{mski} \varphi_l \quad \text{(d'après (11) et (16))} \\ &= -g^{sk} R_{kims} g^{ml} \varphi_l = -R_{im} g^{ml} \varphi_l. \end{aligned}$$

En utilisant cette égalité dans (18) le résultat en découle.

2. Cas où le tenseur de Ricci est négatif.

2.1 **Cas où le tenseur de Ricci est défini négatif en un point.** Dans ce cas les lemmes 1 et 2 permettent de démontrer le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit $F \not\equiv 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant* (1)(2). *Si en un point de U le tenseur de Ricci associé à g est défini négatif alors on a nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et $F = cste$ dans U.*

Démonstration. Si le tenseur de Ricci est défini négatif en un point de U on peut supposer par continuité que celui-ci est défini négatif dans un ouvert U' de U. Comme $F \not\equiv 0$ on a $F(a) \neq 0$ pour un certain $a \in U'$. (En effet on remarque que comme solution du problème elliptique (1), F est analytique dans U et si $F \equiv 0$ dans U' on aurait par prolongement analytique $F \equiv 0$ dans U ce qui est contraire à nos hypothèses). Remplaçant éventuellement F par $-F$, qui vérife également (1)(2), on peut supposer $F(a) > 0$. D'après les lemmes 1 et 2 dans un voisinage V de a inclu dans U' la fonction $\varphi = \operatorname{Log} F$ vérifie (17). Or comme le tenseur de Ricci R_{ij} est défini négatif dans V ceci n'est possible que si $c^i = 0$ dans V, i.e. $\varphi \equiv cste$. Le résultat en découle.

2.2 **Cas de la courbure constante.** Dans ce cas, si K désigne la courbure de Gauss, on a:

$$R_{hijk} = K(g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij}).$$

D'après (16) on déduit:

$$\begin{aligned} R^l_{ijk} &= K g^{lh} (g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij}) \\ &= K(\delta^l_j g_{ik} - \delta^l_k g_{ij}) \end{aligned}$$

où δ^l_j est le tenseur de Kronecker. D'où d'après (15)

$$\begin{aligned} R_{ij} &= K(\delta^k_j g_{ik} - \delta^k_k g_{ij}) \\ &= -K(n-1) g_{ij}. \end{aligned}$$

Comme corollaire immédiat du théorème 1 on a alors:

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-020-8 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 1. *Soit $F \not\equiv 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant* (1)(2). *Si dans un ouvert $V \subset U$ la courbure de Gauss K est constante strictement positive alors $\lambda = \mu = 0$ et $F = cste$ dans U.*

Dans le cas où K est nulle on peut montrer:

THÉORÈME 2. *Soit $F \not\equiv 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant* (1)(2). *Si dans un ouvert $V \subset U$ la courbure de Gauss K est constante égale à 0 alors $\lambda \geqq 0$, $\mu = 4\lambda$ et il existe $C \in \mathbf{R}$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que*

$$F(u^1, \ldots, u^n) = Ce^{(u^i v_i)}. \tag{20}$$

DÉMONSTRATION. Raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1 on se ramène au voisinage d'un point $a \in U$ où $F(a) > 0$. D'après (17) et (19) on en déduit que la fonction $\varphi = \operatorname{Log} F$ vérifie $|\operatorname{Hess} \varphi|^2 = 0$. D'où (cf. la remarque 2) $\nabla_{ij}\varphi = 0 \; \forall i, j$.

Comme $K \equiv 0$ ceci implique $\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \equiv 0$ au voisinage de a. (voir par exemple [SPi]). On en déduit que φ est une fonction affine et le résultat en découle.

Le cas où K est strictement négatif sera abordé au paragraphe 4.

3. **Le cas particulier de la dimension 2.** On suppose donc dans cette partie $n = 2$. On a alors

LEMME 3. *Soit φ une fonction vérifiant* (10)(11) *si $\mu \neq 2\lambda$ on a*

$$|\operatorname{Hess} \varphi|^2 = \left(\frac{\mu - 4\lambda}{2}\right)^2 \quad \text{dans } V. \tag{21}$$

DÉMONSTRATION. Utilisant les règles de dérivation covariante, de (10) on déduit

$$0 = \nabla_s(2^{-1} g^{ij} \varphi_i \varphi_j) = g^{ij} \varphi_i \nabla_{si} \varphi \quad s = 1, 2$$

D'où en posant $c^i = g^{ij}\varphi_i$ on a dans V

$$c^1 \nabla_{11}\varphi + c^2 \nabla_{12}\varphi = 0$$

$$c^1 \nabla_{21}\varphi + c^2 \nabla_{22}\varphi = 0.$$

Comme $\mu \neq 2\lambda$, $(c^1, c^2) \neq 0$ et le système ci-dessus ayant une solution non triviale (c^1, c^2) on a nécessairement dans V:

$$\nabla_{11}\varphi \nabla_{22}\varphi = \nabla_{12}\varphi \nabla_{21}\varphi.$$

Choisissant alors, par exemple, des coordonnées locales telles que au point considéré $g^{ij} = I$ (cf. la remarque 2) on a

$$|\operatorname{Hess} \varphi|^2 = \sum_{s,i} (\nabla_{si}\varphi)^2 = (\nabla_{11}\varphi + \nabla_{22}\varphi)^2 = \Delta\varphi^2 = \left(\frac{\mu - 4\lambda}{2}\right)^2$$

ce qui termine.

En dimension 2 on peut alors montrer le résultat définitif suivant:

THÉORÈME 3. *Soit $F \not\equiv 0$ une fonction de classe C^2 vérifiant* (1)(2). *On a alors ou bien $\lambda = \mu = 0$ et $F = cste$*
ou bien la courbure de Gauss K associée à g est constante, négative ou nulle et l'on a

$$(\mu - 4\lambda)^2 + 2K(\mu - 2\lambda) = 0. \tag{22}$$

DÉMONSTRATION. En raisonnant comme précédemment si $F \not\equiv 0$ on peut introduire au voisinage d'un point $a \in U$, $\varphi = \operatorname{Log} F$. Si F n'est pas localement constante on a d'après le lemme 1, $\mu \not\equiv 2\lambda$ d'où en appliquant les lemmes 2 et 3

$$\left(\frac{\mu - 4\lambda}{2}\right)^2 - R_{ij}c^i c^j = 0.$$

Or pour $n = 2$ et si K désigne la courbure de Gauss on a (cf. [E]) $R_{ij} = -Kg_{ij}$. D'où comme $c^i = g^{il}\varphi_l$ il vient

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mu - 4\lambda}{2}\right)^2 + Kg_{ij}g^{il}\varphi_l g^{ik}\varphi_k = 0 \\ &\left(\frac{\mu - 4\lambda}{2}\right)^2 + Kg^{jk}\varphi_j\varphi_k = 0 \\ &\left(\frac{\mu - 4\lambda}{2}\right)^2 + K\left(\frac{\mu - 2\lambda}{2}\right) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Comme $\mu \not\equiv 2\lambda$ on en déduit $K = cste$ au voisinage de a et donc dans U. Si $K > 0$ on est dans le cas de corollaire 1 et F est constante ce que l'on a exclu. On a donc $K \leqq 0$ et (23) n'est autre que (22).

REMARQUE 3. Le cas $K = 0$ a déjà été étudié au théorème 2. On a dans ce cas $\lambda \geqq 0$, $\mu = 4\lambda$ et F est donnée en coordonnées localles par (20).

Le cas où $K < 0$ sera étudié au paragraphe suivant. Notons que (22) s'écrit encore $\mu^2 - 2\mu(4\lambda - K) + 4\lambda(4\lambda - K) = 0$. Pour que cette équation admette des racines réelles (en μ) on doit avoir $\lambda \geqq K/4$ et l'on a alors $\mu = 4\lambda - K \pm \sqrt{-K(4\lambda - K)}$. Dans le cas $K = -1$, on retrouve alors (4) ($n = 2$).

4. **Cas de la courbure constante négative.** On suppose ici pour simplifier que $K = -1$ et U désigne un ouvert connexe de H^n l'espace hyperbolique de dimension n. Supposons par exemple que H^n soit réalisé comme le demi-espace $H^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_n > 0\}$ muni de la métrique définie par

$$g_{ij} = \delta_{ij}/(x_n)^2. \tag{24}$$

Si les Γ_{ijk} désignent les symboles de Christoffel de première espèce, Γ_{ij}^k ceux de seconde espèce on a par un calcul élémentaire:

$$\Gamma_{ii}^k = g^{kl}\Gamma_{iil} = x_n^2\Gamma_{iik} = x_n^2.2^{-1}\left(2\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k}\right).$$

D'où compte tenu de (24):

$$\Gamma_{ii}^k = 0 \text{ si } k \neq n,\ \forall i = 1,\ldots,n$$
$$\Gamma_{ii}^n = 1/x_n\ \forall i \neq n,\ \Gamma_{nn}^n = -1/x_n.$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit alors (voir (6)(7))

$$\Delta\varphi = g^{ii}\nabla_{ii}\varphi = x_n^2.\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} - \frac{n-2}{x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right].$$

On a également

$$|\nabla\varphi|^2 = x_n^2.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2$$

Il est facile de voir que les seules fonctions φ indépendantes de $x_1,\ldots,x_{n-1}$ et vérifiant localement (10)(11) sont données par

$$\varphi = \pm\left(\frac{\mu-2\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{Log} x_n + cste \tag{25}$$

et ceci impose la condition

$$(\mu-4\lambda)^2 = 2(n-1)^2(\mu-2\lambda) \tag{26}$$

(Ces fonctions sont constantes sur les hyperplans de même cote). Réciproquement, on va montrer que, à une isométrie près, toute solution de (10)(11) est de ce type et la contrainte (26) est absolument nécessaire à l'existence d'une telle fonction. Plus précisément si l'on suppose H^n réalisé par B^n la boule unité de $\mathbf{R}^n$ (cf SP_4) on a

THÉORÈME 4. *Soit φ une fonction réelle solution de* (10)(11) *sur V connexe, alors λ, μ sont liés par* (26) *et φ est constante sur des horosphères parallèles.*

DÉMONSTRATION. Posons pour simplifier

$$\left(\frac{\mu-2\lambda}{2}\right) = \xi \geqq 0 \qquad \left(\frac{4\lambda-\mu}{2}\right) = \eta. \tag{27}$$

Si φ est constante dans V le résutat est clair. Si φ n'est pas constante on se place au voisinage d'un point où

$$|\nabla\varphi|^2 = \xi > 0 \tag{28}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-020-8 Published online by Cambridge University Press

Comme $|\nabla\varphi| \neq 0$ en utilisant le théorème de fonctions implicites on montre sans peine qu'il existe un système de coordonnées locales $(u^1, \ldots, u^{n-1}, \rho)$ dans un ouvert que l'on note encore V-bien qu'il puisse être strictement inclu dans V-tel que

$$\pm\sqrt{\xi}\rho = \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u^1, \ldots, u^{n-1}, \rho) \tag{29}$$

et tel que dans ce système de coordonnées la métrique devient

$$ds^2 = f_{\rho\rho}dp^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} f_{ij}(u^1, \ldots, u^{n-1}, \rho)du^i du^j.$$

En désignant par (f^{ij}) l'inverse de la matrice (f_{ij}) on a immédiatement

$$f_{\rho\rho} = 1/f^{\rho\rho} = 1/g^{ij}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\frac{\partial\rho}{\partial x_j} = 1$$

ceci grace à (28)(29).

Montrons alors le lemme suivant:

LEMME 4. *Les constantes μ et λ sont liées par* (26) *et il existe $\epsilon = \pm 1$ tel que l'on ait*

$$f_{ij}(u^1, \ldots, u^{n-1}, \rho) = e^{\epsilon 2\rho}h_{ij}(u^1, \ldots, u^{n-1}) \quad i, j = 1, \ldots, n-1 \tag{30}$$

ϵ etant le même pour tout couple (i, j).

Démonstration du lemme.

Etape 1. On écrit (11) en coordonnées locales $(u^1, \ldots, u^{n-1}, \rho)$. Pour cela on remarque que les symboles de Christoffel sont donnés par

$$\Gamma^{\rho}_{i\rho} = \Gamma^{i}_{\rho\rho} = \Gamma^{\rho}_{\rho\rho} = 0, \Gamma^{\rho}_{ij} = -2^{-1}\dot{f}_{ij},$$
$$\Gamma^{j}_{i\rho} = 2^{-1}f^{jk}\dot{f}_{ki}, i, j, k = 1, \ldots, n-1, \text{ “.” } = \frac{\partial}{\partial\rho}.$$

D'où compte tenu de (27)(29) il vient

$$\eta = \Delta\varphi = \pm\sqrt{\xi}\Delta\rho = \pm\sqrt{\xi}f^{ij}\Gamma^{\rho}_{ij} = \pm\frac{\sqrt{\xi}}{2}f^{ij}\dot{f}_{ij}. \tag{31}$$

Etape 2. On utilise le fait que la courbure est constante égale à -1. On a en particulier pour $i = 1, \ldots, n-1$

$$R_{\rho ij\rho} = -(f_{\rho i}f_{j\rho} - f_{\rho\rho}f_{ij}) = f_{ij}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1989-020-8 Published online by Cambridge University Press

D'autre part (cf [E] p.20)

$$R_{\rho ij\rho} = 2^{-1}\ddot{f}_{ij} - 4^{-1}\dot{f}_{ik}f^{ks}\dot{f}_{sj} \left(\text{``..''} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \right)$$

d'où l'on obtient si l'on pose $F = (f_{ij})$, $G = F^{-1}$:

$$2^{-1}\ddot{F} = 4^{-1}\dot{F}G\dot{F} + F.$$

Etape 3. Soit $(u, \rho) = (u^1, \dots, u^{n-1}, \rho)$ un point quelconque de V. Posons $\psi = (\psi_{ij}) = (1/2)G\dot{F}$. Différentiant ψ par rapport à ρ et remarquant que $\dot{G} = -G\dot{F}G$ on déduit de (32)

(33) $$\dot{\psi} = I - \psi^2.$$

Posons $\hat{\gamma} = \eta / \pm\sqrt{\xi}$ on déduit de (31) que Trace $\psi = \hat{\gamma}$ $(= cste)$ et

(34) $$\text{Trace } \dot{\psi} = 0, \text{ Trace } \psi^2 = n - 1.$$

On déduit de la seconde équalité dans (34) et (33)

$$\text{Trace } (\psi\dot{\psi} + \dot{\psi}\psi) = 2\text{Trace } (\psi - \psi^3) = 0,$$
$$\text{Trace } \psi^3 = \text{Trace } \psi = \hat{\gamma},$$

et par suite, on obtient par récurrence,

$$\text{Trace } \psi^{2m+1} = \hat{\gamma}, \text{ Trace } \psi^{2m} = n - 1, m = 0, 1, \dots$$

Mais il est facile de voir que les valeurs propres de ψ sont ± 1.

La seconde forme fondamentale d'une telle hypersurface S_ρ dans V : $\rho = cste$ est donnée par $b_{ij} = \langle \partial_{ij}, \partial_\rho \rangle = \Gamma^\rho_{ij} = -(1/2)\dot{f}_{ij}$. De cette équalité et de l'équalité $\dot{F} = 2F\psi$ on obtient que les courbures principales de S_ρ sont les valeurs propres de $-\psi$. Il en résulte que les courbures principales de S_ρ sont toutes constantes et sont éguales à ± 1. On notera par τ la muliplicité de -1. On peut utiliser l'identité de E. Cartan (comme dans [N], p. 195) et obtenir que $\tau = 0$ ou $\tau = n - 1$. Il s'en suit que $\psi = \pm I$. Dans ce cas, la formule (30) est ovtenue en intégrant la relation $\dot{F} = \pm 2IF$. Comme $\hat{\gamma} = \pm(n - 1)$, on obtient la relation (26). Ceci termine la démonstration du lemme.

Maintenant nous pouvons terminer la démonstration du théorème 4. D'après le lemme 4, la seconde forme fondamentale $B = \pm IF$. Tout point de S_ρ est donc un ombilic et S_ρ est donc une portion de sphère, horosphère ou hypersurface équidistante (Voir [SP_4] p.114). Comme d'autre part la courbure d'une telle surface est donnée par $K = \epsilon^2 - 1 = 0$ celle-ci ne peut être qu'une portion d'horosphère (cf. [SP_4]). Ceci termine la démonstration du lemme et du théorème 4.

REMARQUE 4. Lorsque l'on réalise une inversion isométrique par rapport au point de base de ces horosphères (cf. [SP_4] p.20) il est clair φ se transforme en une fonction constante sur les hyperplans $x_n = cste$ et le transformé de φ est donc du type (25). Si maintenant l'on remarque que pour toute transformation orthogonale de B_n une solution de (10)(11) est encore solution et si l'on revient à F en prenant l'exponentielle dans (25) on retrouve (5) sous une autre forme.

Remerciements. Ce travail a été réalisé en partie durant notre séjour à l'Institut de Mathématiques de Minneapolis. Nous remercions vivement cette institution pour son aide et son atmosphère chaleureuse. Nous remercions également le referee dont les commentaires nous on permi de combler une lacune dans la démonstration du théorème 4.

Le travail de V. Oliker a été subventionné par la N.S.F. sous les contrats MCS-8301904 et MCS-8342997.

REFERENCES

1. [B] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Acadamic Press, 1975.

2. [C] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, M. Dekker, New York, 1973.

3. [CH] M. Chipot, résultat non publié.

4. [C.E.T] M. Chipot, P. Eymard et T. Tahani, *Sur les fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami dont le carré est fonction propre*, Symposia Mathematica, vol. xxix, 1987, Academic Press.

5. [E] L. P. Eisenhart, *Riemanian geometry*, Princeton University Press, 1949.

6. [N] K. Nomizu, *Elie Cartan's work on isoparametric families of hypersurfaces*, Proc. of Symp. in Pure Mathematics *27* (1975), 191–200.

7. [S.S] M. B. Sake and T. O. Sherman, *Hilbert and Fourier transforms on a sphere*, SIAM J. of Anal., 15, *3* (1984), 605–620.

8. [SPi] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry, Vol i*, Publish or Perish Inc., 1979.

9. [T] T. Tahani, *Fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans les boules hyperboliques réelles ou complexes*, Thèse de 3ème cycle, Université de Nancy I (1985).

Université de Metz
Département de mathématiques
Ile du Saulcy
57045 METZ CEDEX 1 (FRANCE)

Emory University
Department of Mathematics and Computer Science
Atlanta, GA, 30322 (USA)