Can. J. Math., Vol. XLI, No. 1, 1989, pp. 1–13

# MOYENNES GALOISIENNES DES VALEURS DE FONCTIONS $L$

MARIE-FRANCE VIGNÉRAS

**0.** On se propose d'étendre un résultat de Rorhlich [**5**] concernant les moyennes galoisiennes des valeurs en $s = 1$ des fonctions $L$ associées à une forme modulaire de poids 2, tordue par certains caractères de Dirichlet. On considérera une représentation automorphe parabolique $\pi$ de $GL(n), n \leqq 2$, sur un corps de nombres $K$, et l'on s'intéressera aux valeurs des fonctions $L(s, \pi\chi)$ et de leurs dérivées $L^{(m)}(s, \pi\chi), m \geqq 1$, où $\chi$ parcourt certains caractères de Hecke de $K$, d'ordre fini, et où $s$ appartient à la bande $a < \text{Re } s < 1 - a$, où $a$ mesure la déviation de $\pi$ par rapport à la conjecture de Petersson généralisée.

Pour $n = 1, a = 0$; pour $n = 2$, on sait que $a = 0$ est équivalent à la conjecture de Ramanujan-Petersson, et que $a < 1/4$, donc la valeur critique $s = 1/2$ appartient toujours à cette bande.

En 1, on exprime $L(s, \pi)$ sous forme intégrale, puis sous la forme d'une série rapidement convergente, pour tout $s \in \mathbf{C}$. La formule généralise l'expression rapidement convergente bien connue de la fonction zêta obtenue par Riemann.

En 2, on démontre le lemme fondamental, essentiellement dû à Rohrlich, généralisé de façon à pouvoir l'appliquer aux fonctions $L$, ou à leur dérivées, obtenues par la théorie des représentations.

En 3, on démontre qu'il existe effectivement des ensembles de caractères de Hecke, infinis, et satisfaisant les conditions du lemme de Rohrlich. Malheureusement nous ne vérifions ceci que si $K$ est un corps quadratique imaginaire (si $K = \mathbf{Q}$ [**5**]), situation particulièrement simple due au fait qu'alors le nombre d'unités de $K$ est fini. Il est évident qu'il serait souhaitable d'améliorer les résultats obtenus.

En 4, nous tirons les conséquences des trois parties précédentes, et nous obtenons le théorème principal. Nous énoncons maintenant le résultat obtenu sur un corps $K = \mathbf{Q}$ ou un corps quadratique imaginaire.

Soit $F$ un corps de nombres. Soit $L(\chi)$ une fonction à valeurs complexes, définie sur les caractères de Hecke de $K$ de type $A_0$, c'est-à-dire tels que le corps $F(\chi)$ engendré par les valeurs de $\chi$ sur $F$ est de degré fini. La moyenne galoisienne de $L$ sur $F$ est

$$L_F(\chi) = [F' : F]^{-1} \sum_{\sigma \in \text{Gal } (F'/F)} L(\chi^\sigma)$$

pour toute extension galoisienne $F'/F$ contenant $F(\chi)$.

Reçu le 25 janvier 1984.

*Notations et hypothèses.* $K = \mathbf{Q}$ ou un corps quadratique imaginaire, $P =$ un ensemble non vide d'idéaux premiers de $K$, fini et vérifiant les conditions (si $K \neq \mathbf{Q}$):

a) si $\mathcal{Y} \in P$, et $p \in \mathbf{N}$ premier appartient à $\mathcal{Y}$, alors $K_{\mathcal{Y}} = \mathbf{Q}_p$

b) si $\mathcal{Y} \neq \mathcal{Y}' \in P$, alors $p \neq p'$, et l'on a

c) $p' \neq 1 \pmod{p^t}$, où $t$ est l'entier minimal tel que $F(\mu_{p^\infty})/F(\mu_{p^t})$ soit totalement ramifiée; on note $\mu_{p^r}$ le groupe des racines $r$-ièmes de l'unité et $\mu_{p^\infty} = \cup \mu_{p^r}$.

d) si $\mathcal{Y} \in P$, le caractère central de $\pi$ n'est pas ramifié en $\mathcal{Y}$.

$X$ est l'ensemble des caractères de Hecke (représentations automorphes de $GL(1)$) de $K$, d'ordre fini, non ramifiés aux idéaux premiers n'appartenant pas à $P$. Il est clair que $X$ est un ensemble infini, et qu'il existe un nombre fini de $\chi \in X$ de conducteur de norme donnée $q$.

THEOREME. *On a pour $a < \operatorname{Re} s < 1 - a$,*

$$\lim_{\substack{q \to \infty \\ \chi \in X}} L_F(s, \pi\chi) = 1 \quad et \quad \lim_{\substack{q \to \infty \\ \chi \in X}} L_F^{(m)}(s, \pi\chi) = 0 \quad si \quad m \geqq 1.$$

*En particulier $L_F(s, \pi\chi)$ n'est pas nul sauf pour un nombre fini de $\chi \in X$.*

*Remarques et variantes.* 1) Notre résultat améliore celui de [**5**], puisque nous ne supposons pas que les éléments de $P$ sont premiers au conducteur de $\pi$, mais seulement à celui du caractère central de $\pi$. En particulier, si le caractère central de $\pi$ est trivial, comme par exemple si $L(s, \pi)$ est la fonction $L$ d'une courbe elliptique, cette condition disparait.

2) Le théorème se démontre pour tout corps $K$, tel qu'il existe un ensemble de caractères de Hecke de $K$ ayant les propriétés du lemme principal.

3) On déduit du théorème que $L_F(s, \pi_f\chi_f)$ n'est pas nulle sauf pour un nombre fini de $\chi \in X$. Dans certains cas, les résultats de Shimura ([**8**]) permettent d'en déduire que $L(s, \pi_f\chi_f)$ n'est pas nul sauf pour un nombre fini de $\chi \in X$. C'est le cas si $K = \mathbf{Q}$ et si $\pi$ correspond à une forme modulaire holomorphe de poids $k > 2$. On sait grâce à Deligne que $\pi$ vérifie la conjecture de Ramanujan-Petersson; les points $s$ permis pour [**8**] sont $s = r/k$, avec $r = 1, \ldots, k-1$.

4) Il est possible de remplacer $L(s, \pi_f\chi_f)$ par une combinaison linéaire de fonctions analogues, à laquelle on peut appliquer le lemme principal. La limite galoisienne est la somme des coefficients.

5) Par continuité, il est possible de remplacer les formules limites du théorème en un point $s$, par le même résultat pour tout point $s$ situé dans un rectangle contenu dans la bande $a < \operatorname{Re} s < 1 - a$.

6) Pour $GL(3)$, le théorème reste vrai dans deux bandes, ne contenant pas $\operatorname{Re} s = 1/2$ contenues dans $a < \operatorname{Re} s < 1 - a$ (où la condition (43) est vérifiée).

7) Il est probablement possible d'obtenir des résultats analogues, si l'on ne suppose plus $\pi$ parabolique, mais simplement que $L(s, \pi_f)$ ait un nombre fini de pôles. On obtient aisément une formule rapidement convergente pour $L(s, \pi)$ hors des pôles, analogue à celle de Riemann pour la fonction zeta.

**1. Formule rapidement convergente pour** $L(s,\pi)$. On refère pour la méthode à [**6**] et pour les fonctions $L$ à [**4**] et aux nombreux articles de Jacquet. L'indice "$f$" dénote la partie finie, ou non archimédienne, et l'indice "$\infty$" la partie infinie ou archimédienne d'une notion adélique, notée avec l'indice "$A$". Soit $\pi = \pi_A = \pi_f\pi_\infty$ une représentation automorphe parabolique de $GL(n, K_A)$, $n \geqq 1$.

La partie finie de sa fonction $L$ prend la forme

$$L(s,\pi_f) = \prod_{\mathcal{Y}}\prod_{i=1}^{n}(1 - a_i^{\mathcal{Y}} N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{Y})^{-s})^{-1}, \tag{1}$$

$\mathcal{Y}$ parcourt les idéaux premiers de $K$, oú $a_i^{\mathcal{Y}} \in \mathbf{C}$, et le produit converge absolument si $\operatorname{Re} s > 1$. Soit $a_{\mathcal{Y}} \geqq 0$ le plus petit réel positif ou nul tel que $|a_i| \leqq N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{Y})^a$. Nous dirons que $a_{\mathcal{Y}}$ est la *déviation de $\pi_{\mathcal{Y}}$ par rapport à la conjecture de Ramanujan-Petersson.* On peut aussi écrire

$$L(s,\pi_f) = \sum_{\mathcal{N}} a(\mathcal{N})N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})^{-s} \quad \operatorname{Re} s > 1 \tag{2}$$

où $\mathcal{N}$ parcourt les idéaux entiers de $K$.

Regardons maintenant la partie infinie de la fonction $L$. C'est un produit de fonctions gamma de la forme $\Gamma(as+b)$, $a > 0$, $b \in \mathbf{C}$, et d'un polynôme. Pour toute place infinie $v$, soit $a_v > 0$, le plus petit nombre réel positif tel que $L(s,\pi_v)$ n'est ni zéro ni pôle dans la bande $a_v < \operatorname{Re} s < 1 - a_v$. On dira que $a_v$ est la déviation de $\pi_v$ par rapport à la conjecture de Ramanujan-Petersson. On dira que $a = \sup(a_v)$, $v$ parcourant toutes les places de $K$ est la déviation de $\pi$ par rapport à la conjecture de Ramanujan- Petersson. On sait que pour $GL(2)$, $a = 0$ si et seulement si cette conjecture est vérifiée.

Il existe une fonction $W$ sur $GL(n, K_\infty)$ dans un espace de Whittaker, $C^\infty$ et à décroissance rapide, telle que

$$L(s,\pi_\infty) = \int_{GL(n-1,K_\infty)} W\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} |x|_\infty^s dx \tag{3}$$

où $|x|_\infty$ est le module de $x$ et $dx$ une mesure de Haar donnée dans $GL(n-1, K_\infty)$. On peut écrire (3) comme la transformée de Mellin d'une fonction $K(t)$, appartenant à l'espace de Schwartz $S(]0,\infty[)$:

$$\int_{GL(n-1,K_\infty)} W\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} |x|_\infty^s = \int_0^\infty K(t)t^s\frac{dt}{t} \tag{4}$$

$$K(t) = \int_{G_\infty^1} W\begin{pmatrix} ty & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} dy, \quad K(t) = K(t,\pi_\infty) \tag{5}$$

où

$$G_\infty^1 = \{g \in GL(n-1, K_\infty), |g|_\infty = 1\}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1989-001-x Published online by Cambridge University Press

est la surface de la sphère de rayon 1; on notera

$$B_\infty(u) = \{g \in GL(n-1, K_\infty), |g|_\infty > u\}$$

l'extérieur de la sphère de rayon $u$. On choisit un plongement de $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R}, x > 0\}$ dans $GL(n-1, K_\infty)$ de sorte que $GL(n-1, K_\infty) = \mathbf{R}^+ G^1_\infty$, on prend sur $\mathbf{R}^+$ la mesure usuelle $dt/t$ et sur $G^1_\infty$ celle compatible avec le produit.

La fonction $L$ de $\pi$ apparaît alors comme une transformée de Mellin:

$$(6) \qquad L(s, \pi) = \int_0^t \varphi(t) t^s \, dt/t$$

où

$$(7) \qquad \varphi(t) = \varphi(t, \pi) = \sum_{\mathcal{N}} a(\mathcal{N}, \pi_f) K(N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})t, \pi_\infty).$$

On est dans la situation analogue à celle considérée par Rieman, dans son étude de la fonction zêta. Les propriétés bien connues de la transformation de Mellin nous enseigne qu'une situation d'équation fonctionnelle pour $L(s, \pi)$ est équivalente à une situation d'équation fonctionnelle pour $\varphi(t, \pi)$. Pour notre but, il est commode d'admettre l'équation fonctionnelle de $L(s, \pi)$ et d'en déduire celle de $\varphi(t, \pi)$. Celle-ci, reportée dans (6), donnera l'expression rapidement convergente de $L(s, \pi)$ que nous voulons obtenir. Dérivant terme à terme en $s$, on obtiendra des formules analogues pour les dérivèes $L^{(m)}(s, \pi)$. On sait que $L(s, \pi)$ est entière, bornée dans les bandes verticales, et vérifie l'équation fonctionnelle

$$(8) \qquad L(s, \pi) + \epsilon(s, \pi) L(1-s, \check{\pi})$$

où $\check{\pi}$ est la duale de $\pi$, et le facteur $\epsilon$ a la forme

$$(9) \qquad \epsilon(s, \pi) = W(\pi) N_{K/\mathbf{Q}}(F(\pi))^{-s+1/2}$$

où $F(\pi)$ est le conducteur de $\pi$, et $W(\pi)$ est la constante de l'équation fonctionnelle, et de module 1.

Il est plus commode de remplacer $L(s, \pi)$ par

$$\Lambda(s, \pi) = N^{s/2} L(s, \pi)$$

où

$$(10) \qquad N = N_{K/\mathbf{Q}}(F(\pi)) = N(\pi).$$

Ceci ramène (8) à

$$(11) \qquad \Lambda(s, \pi) = W(\pi) \Lambda(1-s, \check{\pi})$$

et la transformation de Mellin (6), (7) à

$$(12) \qquad \Lambda(s,\pi) = \int_0^\infty \psi(t)t^s dt/t \quad \text{avec}$$

$$(13) \qquad \psi(t) = \psi(t,\pi) = \varphi(t/N^{1/2},\pi).$$

Les propriétés de $\Lambda$ nous apprennent que $\psi(t) = O(t^{-d})$, $d > 0$ quand $t$ tend vers 0, et que $\psi$ vérifie l'équation fonctionnelle:

$$(14) \qquad \psi(t,n) = W(\pi)t^{-1}\psi(t^{-1},\check{\pi}).$$

Coupant l'intégrale (12) en deux parties séparées par $u > 0$ et transformant celle contenant 0, où se situent les problèmes de convergence, par (14), on obtient pour $\Lambda$ une formule intégrale convergeant pour tout $s \in \mathbf{C}$:

$$(15) \qquad \Lambda(s,\pi) = \int_u^\infty \psi(t,\pi)t^s dt/t + \int_{1/u}^\infty W(\pi)\psi(t,\check{\pi})t^{1-s}dt/t.$$

Les convergences étant maintenant absolues, on peut permuter intégrale et somme (figurant dans $\psi$)

$$(16) \qquad \Lambda(s,\pi) = \sum a(\mathcal{N},\pi_f)\int_u^\infty K(N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})t/N^{1/2},\pi_\infty)t^s\frac{dt}{t}$$
$$+ W(\pi)\sum a(\mathcal{N},\check{\pi}_f)\int_{1/u}^\infty K\left(N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})\frac{t}{N^{1/2}},\check{\pi}_\infty\right)t^{1-s}\frac{dt}{t}.$$

On est conduit à définir une nouvelle fonction, que nous appellerons la fonction $L(\pi_\infty)$ incomplète, par analogie avec la fonction gamma incomplète:

$$(17) \qquad L(s,\pi_\infty,x) = \int_x^\infty K(t,\pi_\infty)t^s\frac{dt}{t} = \int_{B_\infty(x)} W\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}|u|_\infty^s du.$$

Comme fonction de $x$, elle appartient à l'espace de Schwartz $S([0,\infty[)$. Nous nous intéressons aux valeurs de la série (2) pour laquelle nous avons obtenu l'expression rapidement convergente donnée dans la proposition suivante.

Proposition 1. *Pour tout $s$ qui n'est ni zéro ni pôle de $L(s,\pi_\infty)$, on a pour tout $u > 0$:*

$$(18) \qquad L(s,\pi_f)$$
$$= \sum a(\mathcal{N},\pi_f)N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})^{-s}L(s,\pi_\infty)^{-1}$$
$$\times L(s,\pi_\infty,N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})N(\pi)^{-1/2}u)$$
$$+ W(\pi)N(\pi)^{-s+1/2}\sum a(\mathcal{N},\check{\pi}_f)N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})^{1-s}L(s,\pi_\infty)^{-1}$$
$$\times L(1-s,\check{\pi}_\infty,N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})N(\pi)^{-1/2}u^{-1}).$$

On s'intéressera aux valeurs de cette fonction pour Re $s$ dans $]0,1[$, et $s$ ni zéro ni pôle de $L(s,\pi_\infty)$. Si $a_\infty$ est la déviation de $\pi_\infty$ par rapport à la conjecture de Ramanujan-Petersson, les valeurs de $s$ dans la bande $a_\infty < \mathrm{Re}\, s < 1 - a_\infty$ sont permises.

On s'intéressera à une version simplifiée de la formule précise ci-dessus. Posons $\underline{n} = N_{K/\mathbf{Q}}(\mathcal{N})$, alors (18) est de la forme:

$$L(s,\pi_f) = \sum \underline{a}(\mathcal{N},s)E_1(\underline{n}u,s) + \underline{b}(\mathcal{N},s)E_2(\underline{n}u^{-1},s) \tag{19}$$

$$a(\mathcal{N},s) = O(\underline{n}^{-s+a_f+\epsilon}), \quad \text{pour tout } \epsilon > 0 \tag{20}$$

$$b(\mathcal{N},s) = O(\underline{n}^{1-s+\check{a}_f+\epsilon}), \quad \text{pour tout } \epsilon > 0. \tag{21}$$

(22) $E_i(x,s)$ est bornée, rapidement décroissante en $x \in [0,\infty[$, pour $i = 1,2$,

$$E_1(0,s) = 1 \tag{23}$$

où $a_f$ est la déviation de $\pi_f$ par rapport à la conjecture de Ramanujan-Petersson et $\check{a}_f$ celle de $\check{\pi}_f$. On sait que $a_f = \check{a}_f$. On voit que les fonctions $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont décroissantes par rapport à la première variable si et seulement si $s$ est dans la bande $a_f < \mathrm{Re}\, s < 1 - a_f$. Pour ces raisons, nous supposerons

$$a < \mathrm{Re}\, s < 1 - a \tag{24}$$

où $a = \sup(a_\infty, a_f)$ est la déviation de $\pi$ par rapport à la conjecture de Ramanujan-Petersson.

Si l'on dérive (18) en $s$, on obtient

$$\begin{aligned} L^{(m)}(s,\pi_f) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \sum & \underline{a}(\mathcal{N},s)(\mathrm{Log}\,\underline{n})^k E_1^{(m-k)}(\underline{n}u,s) \\ & + \underline{b}(\mathcal{N},s)(\mathrm{Log}\,\underline{n})^k E_2^{(m-k)}(\underline{n}u^{-1},s). \end{aligned} \tag{25}$$

Cette expression est analogue à (19), et les propriétés (20), (21) restent vérifées avec les mêmes exposants de $\underline{n}$, (22) est aussi vérifée, mais l'on a

$$E_1^{(m)}(0,s) = 0, \quad \text{pour tout } m \geqq 1. \tag{26}$$

Nous voulons maintenant savoir comment (18) se modifie, si l'on tord $\pi$ par un caractère de Hecke de $K$, c'est-à-dire par un homomorphisme continu $\chi$ de $K_A^*/K^*$ dans le groupe des nombres complexes de module 1.

Regardons comment se modifient les parties finies. On sait que, sous certaines conditions

$$F(\pi\chi) = F(\pi)F(\chi)^n \tag{27}$$

$$a(\mathcal{N},\pi_f\chi_f) = \chi(\mathcal{N})a(\mathcal{N},\pi_f) \tag{28}$$

$$W(\pi_f\chi_f) = W(\pi_f)W(\chi_f)^n \cdot \omega_\pi(F(\chi))\chi(F(\pi)) \tag{29}$$

où $\omega_\pi$ est le caractère central de $\pi$, et où l'on associe à un caractère de Hecke un caractère d'idéaux de la façon usuelle (ce caractère est nul sur les idéaux non premiers aux conducteur). Ces formules sont vraies si les conducteurs de $\pi$ et de $\chi$ sont premiers entre eux. Utilisant [**1**] et [**2**] on sait qu'elles sont encore vraies si pour tout $\mathcal{Y} \mid (F(\pi), F(\chi))$, on a

$$\mathrm{val}_{\mathcal{Y}} F(\chi) > 2\mathrm{val}_{\mathcal{Y}} F(\pi),$$

($\pi$ cuspidale, mais par induction à partir des cuspidales, grâce aux résultats de [**3**] on peut supprimer cette hypothèse), et si $\omega_\pi$ n'est pas ramifié en $\mathcal{Y}$. Examinons maintenant les parties infinies, dans le cas simple où $\chi_\infty$ est trivial sur la composante connexe de 1 dans $K_\infty^*$. On a:

$$(30) \qquad L(s, \pi_\infty \chi_\infty) = L(s, \pi_\infty)$$

$$(31) \qquad W(\pi_\infty \chi_\infty) = i^r W(\pi_\infty), \quad r \text{ dépend de } \pi_\infty \text{ et de } \chi_\infty.$$

Pour les représentations duales, on a

$$(32) \qquad (\pi\chi)^\nu = \check{\pi}\chi^{-1}.$$

Nous obtenons alors pour $\chi$ vérifiant les conditions ci-dessus, une forme particulièrement simple pour la valeur $L(s, \pi_f \chi_f)$: avec les notations de (18), (19):

$$(33) \qquad L(s, \pi_f \chi_f) = \sum \chi(\mathcal{N})\underline{a}(\mathcal{N}, s) E_1(\underline{n}uq^{-n/2}, s) + \tilde{\chi}(\mathcal{N})\underline{b}(\mathcal{N}, s) E_2(\underline{n}u^{-1}q^{-n/2}, s)$$

où $q$ est la norme du conducteur de $\chi$, et

$$(34) \qquad \tilde{\chi}(\mathcal{N}) = i^r \omega_\pi(F(\chi))\chi(F(\pi))W(\chi_f)^n \bar{\chi}(\mathcal{N}) q^{n(-s+1/2)}.$$

Si l'on dérive (33) en $s$, on obtient l'analogue tordu de (25):

$$(35) \qquad L^{(m)}(s, \pi_f \chi_f) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \sum \chi(\mathcal{N})\underline{a}(\mathcal{N}, s)(\mathrm{Log}\ \underline{n})^k E_1^{(m-k)}(\underline{n}uq^{-n/2}, s) + \tilde{\chi}(\mathcal{N})\underline{b}(\mathcal{N}, s)(\mathrm{Log}\ n)^k E_2^{(m-k)}(\underline{n}u^{-1}q^{-n/2}, s).$$

**2. Lemme principal.** Nous allons démontrer un résultat de limite pour les moyennes galoisiennes des fonctions de caractères de la forme (33). Ce résultat est essentiellement du à Rohrlich.

On considère les données:

$K$ est un corps de nombres, $O$ est l'anneau des entiers de $K$, $\mathcal{N}$ parcourt l'ensemble $N$ des idéaux entiers de $K$, $n$ est la norme de $\mathcal{N}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1989-001-x Published online by Cambridge University Press

$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbf{C}^N$ sont à décroissance lente à l'infini: il existe $a > 0$, $b > 0$ tels que pour tout $\epsilon > 0$,

(36) $\quad \underline{a}(\mathcal{N}) = O(n^{-a+\epsilon}), \quad \underline{b}(\mathcal{N}) = O(n^{-b+\epsilon})$

(37) $\quad E_1, E_2 \in \mathbf{C}^{]0,\infty[}$ sont bornés, à décroissance rapide à l'infini,

$\chi \longrightarrow \tilde{\chi}$ est une application de $X$ dans $\mathbf{C}^N$, où $X$ est un ensemble donné de caractères de Hecke de $K$ de type $A_0$, vérifiant les conditions

(38) $X$ est infini

(39) le nombre de $X$ de conducteur de norme donnée $q$ est fini.

$q' = q^r, r > 0$

$F$ est un corps de nombres sur lequel on prend les moyennes galoisiennes, et il existe des constantes $c_i > 0$, ne dépendant que de $x, K, F, \epsilon$ telles que

(40) $\chi_F(\mathcal{N}) \neq 0$ implique $n = 1$ ou $n > c_1 q^{c_2}$

(41) le nombre de $N$ tels que $\chi_F(\mathcal{N}) \neq 0$, $n < l$ est majoré par $c_3[l/q]$

(42) $|\tilde{\chi}_F(\mathcal{N})| < c_4 q^{-c+\epsilon}$, pour tout $\epsilon > 0$.

(43) $(2r - 1 + a)(1 - b) < c$.

On s'intéresse aux fonctions $L : X \longrightarrow \mathbf{C}$

(44) $$L(\chi) = \sum_{\mathcal{N} \in N} \underline{a}(\mathcal{N})\chi(\mathcal{N})E_1(nu/q') + \underline{b}(\mathcal{N})\tilde{\chi}(\mathcal{N})E_2(n/uq')$$

expression valable pour tout $u > 0$.

(45) LEMME. *Il existe $\sigma > 0$ tel que*

$$\lim_{\substack{\chi \in X \\ q \to \infty}} L_F(\chi) - a(O)E_1(q^{-\sigma}) = 0.$$

Autrement dit, le comportement asymptotique de $L$ est déterminé par celui de $a(O)E_1$ au voisinage de 0. Comme application, on voit que si $a(O) \neq 0$ et si $E_1$ n'est pas nul dans un voisinage de 0, alors $L_F(\chi)$ n'est pas nul sauf pour un nombre fini de $\chi \in X$.

*Preuve du lemme*. Nous imitons la démonstration de [**5**]. On décompose $L_F$ en trois parties:

(46) $$L_F(\chi) = \underline{a}(O)E_1(u/q') + \Xi_1 + \Xi_2$$

(47) $$\Xi_1 = \sum_{n \geqq 2} \underline{a}(\mathcal{N})\chi_F(\mathcal{N})E_1(nu/q')$$

(48) $$\Xi_2 = \sum_{\mathcal{N} \in N} \underline{b}(\mathcal{N})\tilde{\chi}_F(\mathcal{N})E_2(n/uq').$$

Puis, nous profitons de la latitude que nous avons pour choisir $u$. Soit $-r < \beta$, $u = q^{-\beta}$, et l'on veut montrer que $\Xi_1$ et $\Xi_2$ tendent vers 0 si $q \longrightarrow \infty$. Considérons d'abord $\Xi_1$ que l'on décompose en trois parties

$$\Xi_1 = \sum_{2 \leqq n < q} + \sum_{q \leqq n < \rho} + \sum_{\rho \leqq n} \tag{49}$$

où l'on choisit

$$\rho = q^{1+\gamma}, \quad \text{avec } \gamma > \max(0, \beta - 1 + r).$$

On fixe de nouvelles constantes $c_i > 0$ dont l'existence est assurée par les données:

$$|\underline{a}(\mathcal{N})| < c_5 n^{-a+\epsilon} \quad 0 < \epsilon < a \tag{50}$$

$$|E_1(x)| < c_6 \tag{51}$$

$$|\underline{b}(\mathcal{N}) < c_7 n^{-b+\epsilon} \quad 0 < \epsilon < b \tag{52}$$

et l'on utilise les majorations:

$$\left|\sum_{2 \leqq n < q}\right| \leqq c_5 c_6 \sum_{2 \leqq n < q} |\chi_F(\mathcal{N})| n^{-a+\epsilon} \tag{53}$$

$$\left|\sum_{q < n \leqq \rho}\right| \leqq c_5 c_6 \sum_{q < n \leqq \rho} |\chi_F(\mathcal{N})| n^{-a+\epsilon} \tag{54}$$

$$\left|\sum_{\rho < n}\right| \leqq c_5 \sum_{\rho < n} E_1(nu/q^r). \tag{55}$$

Occupons nous de la partie droite de (53). On suppose $0 < \epsilon < a$, comme $n^{-a+\epsilon}$ est une fonction décroissante de $n$, les conditions (40), (41) impliquent

$$c_5 c_6 \sum_{2 \leqq n < q} |\chi_F(\mathcal{N})| n^{-a+\epsilon} < c_5 c_6 c_3 (c_1 q^{c_2})^{-a+\epsilon} \tag{56}$$

le membre de droite de (56) tend vers 0 si $q \longrightarrow \infty$. Considérons maintenant la partie droite de (54), à laquelle nous appliquons (41):

$$c_5 c_6 \sum_{q \leqq n < \rho} \tilde{\chi}_F(\mathcal{N}) n^{-a+\epsilon} < c_5 c_6 c_3 q^{-a+\gamma+\epsilon}. \tag{57}$$

On choisit $\gamma < a$ ce qui est possible si l'on suppose $\beta < a - r + 1$, et l'on choisit $\epsilon < a - \gamma$, alors la partie droite de (57) tend vers 0 si $q \longrightarrow \infty$. Considérons alors la partie droite de (55); comme

$$un/q^r > q^{-\beta+1+\gamma-r}$$

et que $E_1$ est à décroissance rapide à l'infini, il est évident qu'elle tend vers 0 si $q \longrightarrow \infty$.

Il reste à examiner $\Xi_2$, que l'on décompose en deux parties qui tendront vers 0

$$\Xi_2 = \sum_{1 \leqq n < s} + \sum_{s \leqq n} \tag{58}$$

séparées par $s = q^{1-\alpha}$, où $\alpha < \beta - r + 1$.

On ajoute à (50), (51), (52) la majoration manquante

$$|E_2(x)| < c_8 \tag{59}$$

et l'on utilise les majorations:

$$\left| \sum_{1 \leqq n < s} \right| < c_7 c_8 \sum_{1 \leqq n < s} |\chi_F(\mathcal{N})| n^{-b+\epsilon} \tag{60}$$

$$\left| \sum_{s \leqq n} \right| < c_7 c_4 \sum_{s \leqq n} E_2(n/q'u). \tag{61}$$

On procède pour la partie droite de (61) comme pour celle de (55). Comme

$$n/uq' > q^{1-\alpha+\beta-r}$$

et que $E_2$ est à décroissance rapide à l'infini, elle tend vers 0 si $q \longrightarrow \infty$. Dans la partie droite de (60), on applique (42): pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} c_7 c_8 \sum_{1 \leqq n < s} \tilde{\chi}_F(\mathcal{N}) n^{-b+\epsilon} &< c_7 c_8 c_4 q^{-c+\eta} \sum_{\mathcal{N}, 1 \leqq n \leqq s} n^{-b+\epsilon} \\ &< \text{constante } q^{-c+(1-\alpha)(-b+1+\epsilon)+\eta}. \end{aligned} \tag{62}$$

On pourra choisir $\eta, \epsilon, \alpha$ tels que l'exposant de $q$ est négatif, si et seulement si $(1-\alpha)(1-b) < c$, ou ce qui est équivalent (43). Alors la partie droite de (62) tend vers 0 si $q \longrightarrow \infty$.

**3. Caractères de Hecke.** Il reste à vérifier qu'il existe des ensembles de caractères vérifiant (38) à (41), pour que le lemme principal ne soit pas vide. Si $K = \mathbf{Q}$, il en existe ([**5**]). Nous allons vérifier qu'il en est de même si $K$ est un corps quadratique imaginaire, hypothèse simplificatrice, puisque nous n'avons alors pas d'unité d'ordre infini dans $K$. Je ne sais pas si l'on peut prendre $K$ quelconque, par exemple $K$ égal à un corps quadratique réel.

LEMME. *Soit $X$ l'ensemble de caractères de Hecke d'un corps quadratique imaginaire, ayant les propriétés définies dans l'introduction. Alors $X$ vérifie les conditions* (38) *à* (41) *du lemme principal.*

*Preuve.* (38) et (39) sont faciles. Pour (38) on utilise que pour tout caractère de $O_{\mathcal{Y}}^* = Z_p^*$ trivial sur les unités d'ordre fini, il existe un caractère de Hecke de $X$, d'ordre fini, non ramifié hors de $\mathcal{Y}$, et dont il est la $\mathcal{Y}$-composante. Ici, l'hypothèse que $K$ a un groupe d'unités fini est essentielle. Pour vérifier (40), (41) la remarque suivante, de à Rohrlich, est fondamentale: si $x$ est une racine de l'unité d'ordre divisible par $p^{t+1}$, alors

(63) $\quad \mathrm{trace}_{F(x)/F}(x) = 0.$

Nous l'appliquerons de la façon suivante: soit encore $\chi$ le caractère des idéaux fractionnaires de $K$, premiers au conducteur $Q$ de $\chi \in X$, ou le caractère de $(O/Q)^*$, normalisés de sorte que

(64) $\quad \chi(\mathcal{A}a) = \chi(\bar{a})\chi(\mathcal{A}), \quad \text{si } (Q, \mathcal{A}a) = (Q, \mathcal{A}) = O,$

et $\bar{a}$ est l'image de a dans $O/Q$. Alors si $\chi_F(\mathcal{A}a)$ et $\chi_F(\mathcal{A})$ sont non nuls, $p^{t+1}$ ne divise pas l'ordre de $\chi(\bar{a})$, pour tout $\mathcal{Y} \mid Q$.

Les hypothèses faites sur $P$ impliquent qu'alors $p^{t+1}$ ne divise pas l'ordre de $\chi_{\mathcal{Y}}(\bar{a})$. Suivant [**5**], on obtient facilement une congruence sur $a$: il existe $m \in \mathbf{N}$, indépendant de $\chi \in X$, un idéal entier $C$ indépendant de $\chi \in X$, tels que

(65) $\quad a^m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ Q/(C, Q)).$

Un argument facile permet d'en deduire (40). Pour (41), il suffit alors d'utisiser que le nombre d'idéaux entiers contenant $Q$, de norme $< l$ est $O(l/q)$. Ceci implique que le nombre d'idéaux entiers $\mathcal{A}a$, où $a^m - 1 \in Q/(C, Q)$ et $N(\mathcal{A}a) < l$ est $O(l/q)$; ceci se voit en représentant géométriquement les éléments de $K$ [**1**].

**Applications aux moyennes galoisiennes de valeurs spéciales de fonctions $L$.** Nous allons appliquer le lemme principal aux fonctions $L^{(m)}(s, \pi_f \chi_f)$ données en (33), (35). Nous supposons désormais que $(K, X)$ vérifie les hypothèses de 0.

LEMME. *La fonction* $\tilde{\chi}(\mathcal{N})$ *donnée en* (34) *vérifie* (42) *avec* $c = 1/2$, *si* $s = 1/2$.

*Preuve.* Tout revient à montrer le même résultat pour une puissance quelconque de sommes de Gauss, ce qui résulte d'une estimation connue de sommes de Kloosterman généralisées ([**7**], [**9**]).

On remarque dans (34) que les termes $r, F(\chi)$ ne changent pas si l'on remplace $\chi$ par $\chi^\sigma$, $\sigma \in$ Aut $(\mathbf{C})$, et l'on peut les oublier. Nous sommes amener à estimer la moyenne galoisienne de

(66) $$\chi(\alpha) q^{-n/2} \left[ \sum_{x \in (O/Q)^*} \chi(x) \psi_Q(x) \right]^n$$

où $\psi_Q$ est un caractère additif de $O$, tel que $Q$ soit le plus grand idéal entier sur lequel $\psi_Q$ est trivial. On fait apparaître une somme de Kloosterman. La moyenne galoisienne de (66) est égale à:

$$(67)\qquad q^{-n/2}\sum_{x\in(O/Q)^*}\chi_F(\mathcal{A}x)J(x,n-1)$$

où

$$(68)\qquad J(x,n-1)=\sum_{\substack{y\in(O/Q)^{*n}\\ y_1\dots y_n=x}}\psi_Q(y_1+\ldots+y_n).$$

L'estimation connue, si $q\longrightarrow\infty$:

$$(69)\qquad J(x,n-1)=O(q^{(n-1)/2}).$$

D'après (65), si $q\longrightarrow\infty$

$$(70)\qquad \sum_{x\in(O/Q)^*}\chi_F(\mathcal{A}x)=O(1).$$

Combinant (69), (70) on obtient l'estimation souhaitée de (67).

Soit $L(\chi)=L^{(m)}(s,\pi_f\chi_f)$ donnée par (35), où $a<\operatorname{Re}s<1-a$. Si $\pi$ est une représentation parabolique de $GL(n)$, $n\leqq 2$, la condition (43) est toujours vérifiée dans cette bande. On applique le lemme principal, et l'on obtient: soit $X_0$ l'ensemble des caractères de $X$ tels que si $\mathcal{Y}\in P$, $\mathcal{Y}\mid F(\pi)$ alors

$$\operatorname{val}_{\mathcal{Y}}(F(\pi)^2)<\operatorname{val}_{\mathcal{Y}}(F(\chi)).$$

Alors

$$\lim_{\substack{q\to\infty\\ \chi\in X_0}}L_F^{(m)}(s,\pi_f\chi_f)=\begin{cases}1 & \text{si } m=0\\ 0 & \text{si } m\neq 0.\end{cases}$$

On décompose $X=\sqcup X_i$ en un nombre fini de parties $X_i=\{\chi_i\chi\}$, où $\chi_i\in X$ est un caractère de conducteur divisant $F(\pi)^2_P$, la $P$-partie de $F(\pi)^2$, et $\chi$ parcourt les éléments de $X$ de conducteur vérifiant

$$\operatorname{val}_{\mathcal{Y}}F(\chi)>2\operatorname{val}_{\mathcal{Y}}F(\pi)\quad \text{si } \mathcal{Y}\in P,$$

ne divise pas $F(\chi_i)$. Cette partition décrit les différents chemins suivis par les éléments de $X$ pour tendre vers l'infini. La relation (71) reste vérifiée pour $\chi\in X_i$, au lieu de $X_0$ (on écrit (35) pour le couple $(\pi\chi_i\chi)$), quelque soit $i$. Elle est donc vraie pour $\chi\in X$. Le théorème donné en 0 est démontré.

*Note.* Les résultats de cet article ont été étendus par Rohrlick dans "*L-functions and division towers*", Math. Ann. *981* (1988), 611–632.

## Bibliographie


1. Borevich-Chafarevich, *Théorie des nombres* (Gauthier-Villars, Paris, 1967).
2. Deligne, Kazhdan et Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples locales*, dans Reprèsentations des groupes reducifs sur un corps local (Hermann, Paris, 1984).
3. Godement et Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*. Springer-Verlag Lecture Notes *260* (1972).
4. Jacquet, Piatetskii-Shapiro et Shalika, *Automorphic forms on GL*(3), Ann. of Math. *109* (1979), 213–258.
5. Rohrlich, *On L-functions of elliptic curves and cyclotomic towers*, Invent. Math. *75* (1984), 409–423.
6. Riemann, *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*, Oeuvres, tirage (1968), 165–176.
7. Serre, *Majoration de sommes exponentielles*, Astérisque *41–42* (1977) 111–126.
8. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp-forms*, Comm. Pure Appl. Math. *29* (1976), 783–804.
9. Weinstein, *The hyper-Kloosterman sum*, L'enseignement mathématique *27* (1981), 29–40.



*Université Paris 7,*
*Paris, France*


https://doi.org/10.4153/CJM-1989-001-x Published online by Cambridge University Press