Can. J. Math., Vol. XXXVIII, No. 3, 1986, pp. 513-537

ENSEMBLES RECONNAISSABLES DE MOTS BIINFINIS

MAURICE NIVAT ET DOMINIQUE PERRIN

Introduction. La théorie des automates finis fait partie de ce que l'on appelle aujourd'hui les mathématiques de l'informatique. Comme pour les autres specialités de ce domaine, elle est née des travaux de logiciens et, pour les automates finis, c'est à Kleene que l'on doit le premier théorème. Cette théorie s'est considérablement développée depuis la période des fondations. La direction principale est l'étude des automates reconnaissant des suites finies ou mots. Elle présente des aspects mathématiques qui la rapprochent de domaines classiques comme par exemple la théorie combinatoire des groupes. Parallèlement, plusieurs auteurs ont étudié le comportement des automates finis sur des objets plus généraux que les mots. C'est le cas notamment pour la théorie des automates reconnaissant des arbres. C'est aussi le cas pour les automates reconnaissant des mots infinis qui sont le sujet de cet article.

L'étude du comportement des automates finis sur des mots infinis commence avec les travaux de Büchi, D. Muller et R. McNaughton dans les années 60. Le premier théorème, dû à Büchi, montre que la négation d'une propriété des mots infinis vérifiable par un automate fini est encore du même type. Ce résultat fut, en fait, démontré par Büchi pour établir en resultat de logique : la décidabilité de la théorie monadique du second ordre des entiers naturels. Un peu plus tard R. McNaughton devait établir un théorème très profond qui généralise celui de Büchi : les propriétés des mots infinis définissables par automate fini sont les combinaisons booléennes de propriétés définissables par des automates déterministes.

Le but de cet article est d'étendre la théorie de Büchi et McNaughton aux mots doublement infinis, c'est-à-dire aux applications de l'ensemble **Z** des entiers relatifs dans un alphabet. Notre résultat principal est une généralisation du théorème de McNaughton à cette situation.

Il est intéressant de situer cette généralisation par rapport à d'autres. La généralisation la plus célèbre du théorème de Büchi est le théorème de Rabin qui montre que les propriétés des arbres infinis définissables par un automate fini forment une famille close par négation [**10**]. Ce résultat a pour conséquence que la théorie monadique du second ordre des arbres infinis est décidable. Des généralisations et des preuves simplifiées de ce

Reçu le 20 novembre 1981 et sous forme revisée le 25 janvier 1985.

résultat ont été annoncées ces dernières années par plusieurs auteurs (cf. [**6**], [**8**], [**13**]). Il est intéressant de remarquer que l'extension au cas des arbres infinis ne permet pas de formuler d'analogue du théorème de McNaughton [**15**].

L'étude du comportement des automates sur des objets qui sont des étiquetages d'un ensemble ordonné fournit à chaque fois une interprétation en logique symbolique. La généralisation du théorème de Büchi au cas bilatère permet d'obtenir assez facilement comme corollaire la décidabilité de la théorie monadique du second ordre des entiers relatifs. Ce résultat est, en fait, déjà connu [**14**].

Notre article est organisé de la façon suivante. Dans une première partie, nous fixons les notations en ce qui concerne en particulier les automates. Nous suivons essentiellement celles de S. Eilenberg [**4**]. Tout résultat sur les automates non démontré dans cet article peut être trouvé dans son ouvrage. La deuxième partie est un exposé rapide des résultats concernant les automates reconnaissant des mots infinis. Nous donnons en particulier une preuve du théorème de McNaughton qui est dûe à M. P. Schützenberger [**12**], et dont nous utilisons les éléments plus loin pour la généralisation au cas bilatère. D'autres preuves du théorème de McNaughton ont été proposées, en dehors de celle de McNaughton lui-même [**9**]. L'une d'entre elles figure dans le livre de S. Eilenberg [**4**]. Une autre, assez voisine, a été donnée par M. Rabin [**11**]. Il ne nous semble pas qu'elles s'étendent aisément aux cas bilatère. Dans la troisième partie, nous introduisons les mots biinfinis et les notations correspondantes pour les automates. La quatrième partie contient la preuve de notre résultat principal. L'article s'achève avec quelques remarques sur les modifications intervenues depuis la diffusion de la première version de nos résultats.

1. Preliminaires. Soit A un ensemble nommé alphabet. On note A^* le monoïde libre sur l'ensemble A dont les éléments sont appelés mots. On note 1 l'élément neutre de A^*, appelé le mot vide. On note $A^+ = A^* - 1$ l'ensemble des mots non vides. On note $|x|$ la longueur d'un mot $x \in A^*$. On dit qu'un mot $x \in A^*$ est *facteur gauche* d'un mot $y \in A^*$ s'il existe $z \in A^*$ tel que $y = xz$. On note $x \leqq y$. On dit que x est facteur gauche propre de y noté $x < y$ quand on a $z \neq 1$ c'est-à-dire encore quand $x \leqq y$ et $x \neq y$.

Etant donné un mot $x = x_0x_1 \dots x_n$ avec $x_i \in A$, on note $\tilde{x}$ le mot

$$\tilde{x} = x_n \dots x_1x_0.$$

Etant donnée une partie X de A^*, on note X^* le sous monoïde de A^* engendré par X. On note X^+ l'ensemble $X^* - 1$.

On dit qu'une partie X de A^* est *préfixe* si

$$XA^+ \cap X = \emptyset,$$

c'est-à-dire si aucun mot de X n'est facteur gauche d'un autre mot de X. Pour tout $X \subset A^*$, l'ensemble $Y = X - XA^+$ formé des mots de X n'ayant pas de facteur gauche propre dans X est préfixe.

Un *automate* $\mathfrak{A} = (Q, I, T)$ sur l'alphabet A est donné par un ensemble fini Q d'*états*, une partie F de $Q \times A \times Q$ dont les éléments sont appelés *flèches*, et deux parties I, T de Q nommées respectivement l'ensemble des états *initiaux* et *terminaux*. Un *chemin* dans l'automate $\mathfrak{A}$ est une suite finie de flèches de la forme $(p_k, a_k, p_{k+1})_{0 \leqq k \leqq n}$. L'*étiquette* du chemin est le mot $x = a_0 a_1 \dots a_n$. Le chemin est *réussi* si $p_0 \in I$ et $p_{n+1} \in T$. Le *comportement* de l'automate $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des étiquettes des chemins réussis. On note $|\mathfrak{A}|$ le comportement de l'automate $\mathfrak{A}$ et on dit aussi que l'ensemble $X = |\mathfrak{A}|$ est *reconnu* par l'automate $\mathfrak{A}$.

On note aussi un automate $\mathfrak{A} = (Q, F, I, T)$ si l'on a besoin de spécifier l'ensemble des flèches.

On dit qu'une partie X de A^* est *reconnaissable* s'il existe un automate $\mathfrak{A}$ reconnaissant X. On note $\mathrm{Rec}(A^*)$ la famille des parties reconnaissables de A^*.

On dit qu'un automate $\mathfrak{A} = (Q, F, I, T)$ est *déterministe* si pour tout état $p \in Q$ et toute lettre $a \in A$ il existe au plus un état $q \in Q$ tel que $(p, a, q) \in F$. Il est classique que toute partie reconnaissable de A^* peut être reconnue par un automate déterministe.

On dit qu'un morphisme φ de A^* sur un monoïde M *sature* une partie X de A^* si on a

$$\varphi^{-1}\varphi(X) = X.$$

On sait que $X \subset A^*$ est reconnaissable ssi il existe un morphisme de A^* sur un monoïde fini qui sature X.

Nous aurons besoin dans la suite de quelques résultats concernant les idéaux d'un monoïde. Rappelons qu'un *idéal* d'un monoïde M est une partie I de M telle que $MIM = I$. Un *idéal à gauche* de M est une partie L de M telle que $ML = L$.

Le résultat suivant est bien connu (cf. [7] par exemple).

PROPOSITION 1.1. *Soit M un monoïde fini. Pour tous idempotents $e, f \in M$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $e \in MfM, f \in eM \cap Me$

(ii) $e \in fM, f \in Me$

(iii) $e = f$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soient $r, s, t, u \in M$ tels que

$$e = rfs, \quad f = et = ue.$$

Posons $v = ts$. On a $e = rev$. Comme M est une monoïde fini, il existe un entier $i \geqq 1$ tel que r^i et v^i soient idempotents. On a alors

$$e = r^i e v^i = r^i e v^{2i} = e v^i = etsv^{i-1} = fw$$

avec $w = sv^{i-1}$. Ainsi $e \in fM$, et (ii) est satisfaite.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soient $u, w \in M$ tels que $f = ue$, $e = fw$. On a

$$f = ue = ue^2 = fe = f^2w = fw = e$$

et donc $f = e$. Enfin (iii) $\Rightarrow$ (i) est triviale.

Etant donnée une famille $\mathfrak{U}$ de parties d'un ensemble E, on dit que $\mathfrak{U}$ est une algèbre de Boole si $U, V \in \mathfrak{U}$ implique

$$U \cap V, U - V \in U.$$

On note $\mathfrak{U}^B$ la clôture booléenne de la famille $\mathfrak{U}$, qui est la plus petite algèbre de Boole contenant $\mathfrak{U}$.

2. Mots infinis. Un mot infini sur l'alphabet A est une application de l'ensemble N des entiers naturels dans A. Pour $u \in A^N$, on note u_n au lieu de $u(n)$ et on note

$$u = u_0u_1u_2 \ldots, u_i \in A.$$

Pour $x = x_0x_1 \ldots x_n$ et $u \in A^N$ on note xu le mot infini

$$xu = x_0x_1 \ldots x_nu_0u_1u_2 \ldots$$

Cela définit une action à gauche de A^* sur A^N. La notation est étendue aux parties en posant pour $X \subset A^*$ et $U \subset A^N$

$$XU = \{xu | x \in X, u \in U\}.$$

Etant donnée une suite $(x_i)_{i \geqq 0}$ de mots de A^* tels que

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$$

il existe un seul mot infini $u \in A^N$ dont tous les x_i sont facteurs gauches. On le note

$$u = \lim x_i.$$

A toute partie X de A^*, on associe une partie $\overrightarrow{X}$ de A^N nommée l'*enveloppe* de X de la façon suivante. Etant donné un mot infini $u \in A^N$ on a $u \in \overrightarrow{X}$ ssi il existe une infinité d'entiers $n \geqq 0$ tels que

$$u_0u_1 \ldots u_n \in X.$$

On a donc $u \in \overrightarrow{X}$ ssi il existe une suite croissante $(x_i)_{i \geqq 0}$ d'éléments de X telle que $u = \lim x_i$.

Notons tout de suite que l'on a pour tous $X, Y \subset A^*$

$$\overrightarrow{X \cup Y} = \overrightarrow{X} \cup \overrightarrow{Y}$$
$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X} \cup X\overrightarrow{Y}.$$

On a $\overrightarrow{X} = \emptyset$ quand X est préfixe.

A toute partie X de A^* on associe une autre partie de A^N, notée X^ω, et définie comme l'ensemble des

$$u = x_0 x_1 x_2 \ldots$$

avec $x_i \in X - 1$. En d'autres termes, on a $u \in X^\omega$ ssi il existe une suite $(x_i)_{i \geqq 0}$ d'éléments de X telle que $u = \lim y_n$ avec

$$y_n = x_0 x_1 \ldots x_n.$$

On a bien entendu $A^N = A^\omega$. La relation entre $\overrightarrow{X^*}$ et X^ω est une peu subtile. On a

$$\overrightarrow{X^*} = X^* \overrightarrow{X} \cup X^\omega.$$

On a $X^\omega = \overrightarrow{X^*}$ quand $\overrightarrow{X} = \emptyset$ et, en particulier quand X est préfixe. Nous aurons besoin d'une autre formule. Soit I un idéal à gauche de A^+, c'est-à-dire une partie I de A^+ telle que $A^*I = I$. Soit

$$X = I - IA^+$$

l'ensemble des mots de I qui n'ont pas de facteur gauche propre dans I. On a

(2.1) $\quad I^\omega = \overrightarrow{X^*}.$

En effet, on a $A^*X \subset I \subset XA^*$ et donc pour tout entier $n \geqq 1$ on a $I^n \subset X^n A$. Ainsi $I^\omega = X^\omega$. Comme enfin X est préfixe, on a $X^\omega = \overrightarrow{X^*}$.

Exemple 2.1. Soit $A = \{a, b\}$ et I l'ideal à gauche $I = A^*bA^*$. L'ensemble des mots n'ayant pas de facteur gauche propre dans I est $X = a^*b$. On a

$$I^\omega = (a^*b)^\omega = \overrightarrow{(a^*b)^*}.$$

Soit $\mathfrak{A} = (Q, F, I, T)$ un automate sur A. Un *chemin infini* dans $\mathfrak{A}$ est une suite de flèches de la forme $(p_n, a_n, p_{n+1})_{n \geqq 0}$. Son *étiquette* est le mot infini $u = a_0 a_1 a_2 \ldots$ Le chemin infini est *réussi* si on a $p_0 \in I$ et que l'on a $p_n \in T$ pour une infinité d'entiers $n \geqq 0$. Le *comportement infini* de l'automate $\mathfrak{A}$, noté $|\mathfrak{A}|_N$ est l'ensemble des étiquettes des chemins infinis réussis. On dit aussi que l'ensemble est l'ensemble $|\mathfrak{A}|_N$ est reconnu par $\mathfrak{A}$.

On dit qu'une partie de A^N est *reconnaissable* si elle est reconnue par un automate et on note $\mathrm{Rec}(A^N)$ la famille des parties reconnaissables de A^N.

La proposition suivante est bien connue (cf. [**4**]) et facile à établir.

PROPOSITION 2.1. *La famille* $\mathrm{Rec}(A^N)$ *est constituée des unions finies de parties de la forme* XY^ω *pour* $X, Y \in \mathrm{Rec}(A^*)$.

Le résultat suivant est dû à Büchi [**2**].

THEOREME 2.2. *La famille* $\mathrm{Rec}(A^N)$ *est une algèbre de Boole.*

La preuve de ce résultat utilise l'énoncé suivant qui est une conséquence du théorème de Ramsey (cf. [**5**] par exemple).

PROPOSITION 2.3. *Soit* $\varphi:A^* \to E$ *une application de* A^* *dans un ensemble fini* E. *Pour tout* $u \in A^N$ *il existe un élément* e *de* E *tel que*

$$u \in A^*[\varphi^{-1}(e)]^\omega.$$

Nous introduisons maintenant une notion nouvelle. Soit

$$\varphi:A^* \to M$$

un morphisme de A^* dans un monoïde fini M. On dit que φ *sature* une partie U de A^N si pour tous $m, n \in M$ on en posant $R = \varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(n)]^\omega$ l'implication

$$U \cap R \neq \emptyset \Rightarrow R \subset U.$$

La famille des parties de A^N saturées par un morphisme donné forme une algèbre de Boole. L'énoncé suivant complète donc la preuve du Théorème de Büchi (Théorème 2.2).

PROPOSITION 2.4. *Une partie* U *de* A^N *est reconnaissable ssi il existe un morphisme de* A^* *sur un monoïde fini qui sature* U.

Démonstration. Soit d'abord $\varphi:A^* \to M$ un morphisme de A^* dans un monoïde fini qui sature $U \subset A^N$. Soit P l'ensemble des paires $(m, n) \in M \times M$ telles que

$$\varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(n)]^\omega \subset U.$$

On a alors

$$U = \bigcup_{(m,n) \in P} \varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(n)]^\omega.$$

En effet, l'inclusion de la droite vers la gauche est triviale. Réciproquement, si $u \in U$ il existe d'après la Proposition 2.3 une paire $(m, n) \in M$ telle que

$$u \in \varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(n)]^\omega.$$

Comme φ sature U, on en déduit que $(m, n) \in P$. Cela montre que la formule ci-dessus est vraie et donc que U est reconnaissable d'après la Proposition 2.1.

Soit maintenant $U \in \mathrm{Rec}(A^N)$. Soit $\mathfrak{A} = (Q, I, T)$ un automate qui reconnait U. On associe à tout mot $x \in A^*$ deux relations $\gamma(x)$ et $\tau(x)$ sur Q ainsi définies. On a $(p, q) \in \gamma(x)$ ssi il existe un chemin de p à q d'étiquette x. On a $(p, q) \in \tau(x)$ ssi il existe un chemin de p à q d'étiquette x et passant par un état de T. On a pour tous, $x, y \in A^*$ les égalités.

$$\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y), \quad \tau(xy) = \gamma(x)\tau(y) + \tau(x)\gamma(y).$$

Définissons pour chaque mot $x \in A^*$ une relation sur un ensemble constitué de deux copies de Q par

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \gamma(x) & \tau(x) \\ 0 & \gamma(x) \end{bmatrix}$$

Les relations ci-dessus montrent que φ est un morphisme. Il est facile de vérifier que ce morphisme sature U.

Nous en venons maintenant à la question du déterminisme. On note $\mathrm{Det}(A^N)$ la famille des parties de A^N reconnues par un automate déterministe. On a

$$\mathrm{Det}(A^N) \subset \mathrm{Rec}(A^N)$$

mais cette inclusion est stricte (cf. Exemple 2.2).

PROPOSITION 2.5. *On a* $U \in \mathrm{Det}(A^N)$ *ssi il existe une partie* $X \in \mathrm{Rec}(A^*)$ *telle que*

$$U = \overrightarrow{X}.$$

Démonstration. Cet énoncé est une conséquence immédiate de la formule suivante. Pour tout automate déterministe $\mathfrak{A}$ on a

(2.2) $\quad |\mathfrak{A}|_N = \overrightarrow{|\mathfrak{A}|}.$

Cette formule elle-même est facile à vérifier. Si $u \in |\mathfrak{A}|_N$ on a certainement $u \in \overrightarrow{|\mathfrak{A}|}$. Réciproquement, si $u \in \overrightarrow{|\mathfrak{A}|}$, il existe une infinité d'entiers n tels que $u_0u_1 \dots u_n \in |\mathfrak{A}|$. Mais comme l'automate est déterministe, il existe au plus un chemin d'étiquette u commençant dans l'état initial. Il passe par un état terminal à chaque fois que $u_0u_1 \dots u_n \in |\mathfrak{A}|$. Ainsi $u \in |\mathfrak{A}|_N$.

Exemple 2.2. L'ensemble $U = A^*a^\omega$ avec $A = \{a, b\}$ est reconnaissable mais n'est pas déterministe. Supposons en effet en raisonnant par l'absurde que $U = \overrightarrow{X}$ pour $X \subset A^*$. Comme $ba^\omega \in \overrightarrow{X}$ il existe un entier n_1 tel que $ba^{n_1} \in X$. Ensuite, comme $ba^{n_1}ba^\omega \in \overrightarrow{X}$, il existe un entier n_2 tel que

$$ba^{n_1}ba^{n_2} \in X.$$

On construit ainsi une suite $(n_k)_{k \geqq 0}$ d'entiers tel que

$$ba^{n_1}ba^{n_2} \dots ba^{n_k} \in X \quad \text{pour tout } k \geqq 1.$$

On obtient ainsi une contradiction puisque le mot infin $ba^{n_1}ba^{n_2} \dots$ est dans $\overrightarrow{X}$ mais pas dans U.

Le théorème suivant est dû à R. McNaughton **[9]**.

THEOREME 2.6. *La famille* $\mathrm{Rec}(A^N)$ *est la clôture booléenne de la famille* $\mathrm{Det}(A^N)$.

Nous allons donner une preuve de ce théorème. L'inclusion

$$[\mathrm{Det}(A^N)]^B \subset \mathrm{Rec}(A^N)$$

est évidente puisque nous avons déjà établi que Rec(A^N) est une algèbre de Boole. Pour établir l'inclusion inverse, nous procédons par étapes.

Soit $U \subset A^N$. On dit que U est une *partie reconnaissable simple* s'il existe un morphisme $\varphi:A^* \to M$ de A^* sur un monoïde fini M, un élément $m \in M$ et un idempotent e de M tels que $m = me$ avec

$$U = \varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(e)]^\omega.$$

Remarquons pour usage ultérieur que, comme pour toute partie de A^* fermée par produit, on a en posant

$$Y = \varphi^{-1}(e) - (\varphi^{-1}(e) - 1)^2$$

les égalités

$$\varphi^{-1}(e) = Y^+, [\varphi^{-1}(e)]^\omega = Y^\omega.$$

PROPOSITION 2.7. *Toute partie reconnaissable de A^N est une union finie de parties reconnaissables simples.*

Démonstration. D'après la Proposition 2.1, il suffit d'établir l'énoncé pour une partie de A^N de la forme XY^ω avec X, $Y \in$ Rec(A^*). Soit φ un morphisme de A^* sur un monoïde fini M qui sature XY^* et Y^* (pour l'obtenir, il suffit de considérer le produit direct de M_1 et M_2 où $\varphi_1:A^* \to M_1$ sature XY^* et $\varphi_2:A^* \to M_2$ sature Y^*). Soit E l'ensemble des idempotents de M et

$$P = \{(m, e) \in M \times E | m \in \varphi(XY^*), e \in \varphi(Y^*), m = me\}.$$

Nous vérifions que

$$XY = \bigcup_{(m,e) \in P} \varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(e)]^\omega.$$

Soit d'abord $u = xy_0y_1 \ldots$ avec $x \in X$, $y_i \in Y$. On considère une bijection α de l'ensemble $x \cup \{y_i | i \geqq 0\}$ sur un alphabet B et le morphisme $\psi:B^* \to M$ défini par

$$\psi = \varphi \circ \alpha^{-1}.$$

D'après la Proposition 2.3, il existe m, $n \in M$ tels que

$$\alpha(u) \in \psi^{-1}(m)[\psi^{-1}(n)]^\omega.$$

On a donc

$$u \in \varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(n)]^\omega$$

avec

$$m \in \varphi(XY^*), n \in \varphi(Y^*).$$

Comme M est un monoïde fini, il existe un entier k tel que n^k soit un idempotent e de M. Comme

$$[\varphi^{-1}(n)]^{\omega} = [\varphi^{-1}(e)]^{\omega},$$

on a bien, quitte à remplacer m par me,

$$u \in \varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(e)]^{\omega} \quad \text{avec } (m, e) \in P.$$

Réciproquement, soit $u = xy_0y_1 \dots$ avec $\varphi(x) = m$, $\varphi(y_i) = e$ et $(m, e) \in P$. Comme φ sature XY^* et Y^*, on a $x \in XY^*$ et $y_i \in Y^*$. Ainsi $u \in XY^*$.

Nous établissons maintenant le résultat suivant, dû à M. P. Schützenberger [**12**].

PROPOSITION 2.8. *Soit $\varphi:A^* \to M$ un morphisme de A^* sur un monoïde fini M. Soit m un élément de M et e un idempotent de M. Soient*

$$X = \varphi^{-1}(m),$$

$$Y = \varphi^{-1}(e), \quad D = Y - YA^{+},$$

et soit I l'idéal

$$I = \{w \in A^* | e \notin M\varphi(w)M\}.$$

On a les égalités

(2.4) $\quad Y^{\omega} = \overrightarrow{YD}$

(2.5) $\quad XY^{\omega} = \overrightarrow{XYD} - I^{\omega}.$

Démonstration. Montrons d'abord la première égalité. Soit $u = y_0y_1y_2 \dots$ avec $y_i \in Y$. Comme chaque y_n a un facteur gauche y_n' dans D, on a pour chaque entier $n \geqq 1$, $y_0y_1 \dots y_n' \in YD$. Ainsi $u \in \overrightarrow{YD}$. Inversement, soit (y_nd_n) une suite strictement croissante avec

$$y_n \in Y, d_n \in D \quad \text{et} \quad u = \lim y_nd_n.$$

Comme D est préfixe la suite des longueurs des y_n ne peut être bornée. On peut donc, quitte à prendre une sous suite supposer que $y_nd_n < y_{n+1}$ pour $n \geqq 0$. Posons

$$y_{n+1} = y_nd_nv_n \quad \text{et} \quad w_n = d_nv_n.$$

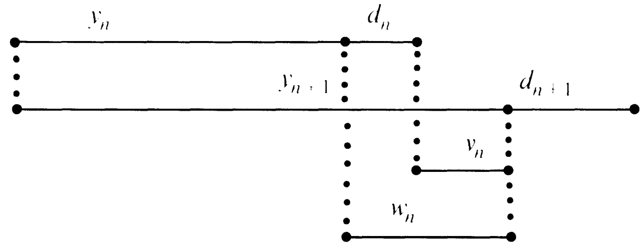


Figure 2.1.

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-025-6 Published online by Cambridge University Press

On a pour tout $n \geqq 0$

$$\varphi(w_n) = \varphi(d_n)\varphi(v_n) = e\varphi(v_n) = \varphi(y_n d_n)\varphi(v_n) = \varphi(y_{n+1}) = e.$$

Ainsi $\varphi(w_n) \in Y$. Comme d'autre part

$$u = y_0 w_0 w_1 \dots$$

on a bien $u \in Y^\omega$. Ceci achève de prouver que $Y^\omega = \overrightarrow{YD}$.

Montrons maintenant la deuxième égalité. Soit d'abord $u = xy_0y_1 \dots$ avec $x \in X$ et $y_i \in Y$. Comme chaque y_i a un facteur gauche dans D, on a bien $u \in \overrightarrow{XYD}$. Ensuite comme aucun facteur du mot infini $y_0y_1 \dots$ ne peut être dans I, on a $u \notin I^\omega$. Réciproquement, soit $u \in \overrightarrow{XYD} - I^\omega$. Soit $(x_ny_nd_n)$ une suite strictement croissante tell que

$$u = \lim x_ny_nd_n \quad \text{avec } x_n \in X, y_n \in Y, d_n \in D.$$

Si la suite des $|x_n|$ est bornée, on peut supposer quitte à prendre une sous suite que $x_n = x$. On a alors $u \in \overrightarrow{XYD}$ et donc $u \in XY^\omega$ d'après la Formule (2.4).

Sinon, on peut supposer quitte à prendre une sous-suite que l'on a pour tout $n \geqq 0$, $x_ny_nd_n < x_{n+1}$

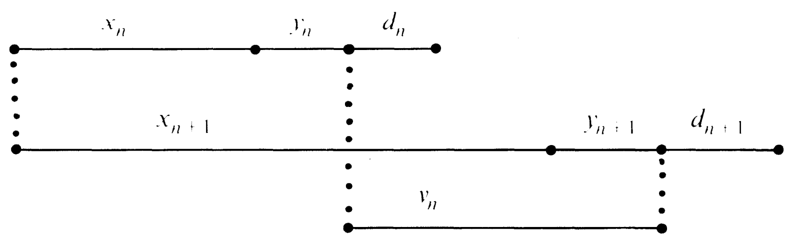


Figure 2.2

Posons $x_{n+1}y_{n+1} = x_ny_nv_n$. Soit $V = \{v_n | n \geqq 0\}$. On a

$$u = x_0y_0v_0v_1v_2 \dots .$$

Par application de la Proposition 2.3 à un alphabet en correspondance biunivoque avec $X \cup V$, on peut supposer quitte à prendre une sous-suite que $\varphi(v_n)$ est un idempotent fixe f de M pour $n \geqq 0$.

Du fait que $u \notin I^\omega$, on a $e \in MfM$. Comme $v_n \in d_nA^*$, et que $\varphi(d_n) = e$, on a aussi $f \in eM$. Enfin, comme $v_n \in A^*y_{n+1}$, on a $f \in Me$. D'après la Proposition 1.1 cela implique que $e = f$. Ainsi $u \in XY^\omega$.

Le Théorème 2.6 découle directement des Propositions 2.7 et 2.8. En effet, si $U \in \mathrm{Rec}(A^N)$ il est une union finie de parties reconnaissables simples. D'après la Proposition 2.8 toute partie reconnaissable simple est une combinaison booléenne de parties déterministes puisque, l'ensemble I étant un idéal à gauche, on a $I^\omega = \overrightarrow{Z^*}$ avec $Z = I - IA^+$ (cf. Formule (2.1)).

Exemple 2.3. Soit $A = \{a, b\}$ et $U = A^*a^\omega$. On obtient une décomposition de U en parties reconnaissables simples en considérant le morphisme φ de A^* sur le sous-monoïde $M = \{1, 0\}$ du monoïde multiplicatif des entiers défini par $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 0$. On a

$$\varphi^{-1}(1) = a^* \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}(0) = A^*bA^*.$$

De plus

$$U = a^\omega \cup A^*ba^\omega.$$

L'ensemble A^*ba^ω s'écrit d'après la formule de la Proposition 2.8

$$A^*ba^\omega = \overrightarrow{A^*ba^+} - \overrightarrow{(a^*b)^*}.$$

3. Mots biinfinis. On appelle *mot biinfini* sur l'alphabet A une application de l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs dans A. On notera un mot biinfini

$$w = \ldots w_{-1}w_1w_2 \ldots, \quad w_i \in A.$$

On peut construire un mot biinfini à partir d'une paire de mots infinis de la façon suivante. On considère, en plus de l'ensemble $A^{\mathbf{N}}$ des mots infinis ordinaires, l'ensemble $A^{-\mathbf{N}}$ des mots infinis à gauche de la forme

$$u = \ldots u_{-2}u_{-1}u_0. \quad (u_i \in A)$$

Pour tout $u \in A^{\mathbf{N}}$ on note $\tilde{u}$ le mot infini à gauche défini par

$$\tilde{u}_{-n} = u_n. \quad (n \in \mathbf{N})$$

L'application $u \mapsto \tilde{u}$ est une bijection de $A^{\mathbf{N}}$ sur $A^{-\mathbf{N}}$. On note de la même façon l'application réciproque de $A^{-\mathbf{N}}$ dans $A^{\mathbf{N}}$. Pour une partie X de A^*, on note

$${}^\omega X = \{u \in A^{-\mathbf{N}} | \tilde{u} \in (\tilde{X})^\omega\}.$$

On a en particulier ${}^\omega A = A^{-\mathbf{N}}$.

Etant donnés $u \in A^{-\mathbf{N}}$ et $v \in A^{\mathbf{N}}$, on note $[u, v]$ le mot biinfini w défini par

$$w_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leqq 0 \\ v_{n-1} & \text{si } n \geqq 1. \end{cases}$$

Pour deux parties $U \subset A^{-\mathbf{N}}$ et $V \subset A^{\mathbf{N}}$, on note $[U, V]$ la partie de $A^{\mathbf{Z}}$ définie par

$$[U, V] = \{[u, v] | u \in U, v \in V\}.$$

L'ensemble $A^{\mathbf{Z}}$ est muni d'un opérateur de translation $T:A^{\mathbf{Z}} \rightarrow A^{\mathbf{Z}}$ qui est défini par

$$T(w)_n = w_{n-1}. \quad (n \in \mathbf{Z})$$

On étend T aux parties de $A^{\mathbf{Z}}$ en posant

$$T(W) = \{T(u) | u \in W\}.$$

On dit qu'une partie W de $A^{\mathbf{Z}}$ est *close par translation* si $T(W) = W$. On note $T^*(W)$ la clôture par translation de W qui est la plus petite de $A^{\mathbf{Z}}$ close par translation contenant W. On a

$$T^*(W) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} T^k(W).$$

Pour deux parties $U \subset A^{-\mathbf{N}}$ et $V \subset A^{\mathbf{N}}$, on note UV la clôture par translation de l'ensemble $[U, V]$. L'ensemble UV est donc formé des mots biinfinis w tels qu'il existe un entier $k \in \mathbf{Z}$ pour lequel

$$\dots w_{k-2}w_{k-1}w_k \in U, \quad w_{k+1}w_{k+2} \dots \in V.$$

Remarquons que pour tous $U \subset A^{-\mathbf{N}}$, $V \subset A^*$ et $W \subset A^{\mathbf{N}}$ on a

$$U(VW) = (UV)W$$

et on notera donc simplement UVW.

Soit $\mathfrak{A} = (Q, F, I, T)$ un automate. Un *chemin biinfini* dans l'automate $\mathfrak{A}$ est une suite biinfini de flèches de la forme $(p_n, a_n, p_{n+1})_{n \in \mathbf{Z}}$.

Son étiquette est le mot biinfinie $\dots a_{-1}a_0a_1 \dots$ Un chemin biinfini est *réussi* si on a $p_n \in I$ pour une infinité d'entiers $n \leqq 0$ et $p_n \in T$ pour une infinité d'entiers $n \geqq 0$. Le *comportement biinfini* de l'automate $\mathfrak{A}$, noté $|\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}$, est l'ensemble des étiquettes des chemins biinfinis réussis.

On dit qu'une partie W de $A^{\mathbf{Z}}$ est reconnaissable si elle est le comportement biinfini d'un automate. On note $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ la famille des parties reconnaissables de $A^{\mathbf{Z}}$.

Il importe de remarquer qu'une partie reconnaissable de $A^{\mathbf{Z}}$ est, par définition, *close par translation*. En effet, l'ensemble des chemins biinfinis réussis d'un automate est, par définition, clos par translation. La proposition suivante établit un lien entre les familles $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$, $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{N}})$ et $\mathrm{Rec}(A^*)$.

PROPOSITION 3.1. *Pour toute partie W de $A^{\mathbf{Z}}$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $W \in \mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$.

(ii) *W est clos par translation et est une union finie de parties de la forme $[\tilde{U}, V]$ pour $U, V \in \mathrm{Rec}(A^{\mathbf{N}})$.*

(iii) *W est une union finie de parties de la forme $\tilde{U}V$ pour $U, V \in \mathrm{Rec}(A^{\mathbf{N}})$.*

(iv) *W est une union finie de parties de la forme ${}^{\omega}XYZ^{\omega}$ avec $X, Y, Z \in \mathrm{Rec}(A^*)$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $\mathfrak{A} = (Q, F, I, T)$ un automate fini tel que $W = |\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}$. Pour chaque $q \in Q$, soient $\mathfrak{A}_q$ et $\mathfrak{B}_q$ les automates

$$\mathfrak{A}_q = (Q, \widetilde{F}, q, I), \quad \mathfrak{B}_q = (Q, F, q, T)$$

avec $\widetilde{F} = \{(s, a, r) \mid (r, a, s) \in F\}$. On pose

$$U_q = |\mathfrak{A}_q|_N, \quad V_q = |\mathfrak{B}_q|_N.$$

Il est facile de vérifier que l'on a l'égalité :

$$W = \bigcup_{q \in Q} [U_q, V_q].$$

Ceci montre que W satisfait la condition (ii) puisqu'il est par ailleurs clos par translation.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Si

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} [U_i, V_i]$$

est clos par translation on a

$$W = T^*(W) = \bigcup_{i=1}^{n} T^*([U_i, V_i]) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i V_i.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) est évident d'après la Proposition 2.1.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Considérons $X, Y, Z \in \mathrm{Rec}(A^*)$. On peut construire un automate fini $\mathfrak{A} = (Q, i, t)$ possèdant les propriétés suivantes :

$$X^* = |(Q, i, i)|, \; X^*YZ^* = |(Q, i, t)|, \; Z^* = |(Q, t, t)|.$$

On a alors ${}^{\omega}XYZ^{\omega} = \mathfrak{A}^{\mathbf{Z}}$. Ceci montre que

$${}^{\omega}XYZ^{\omega} \in \mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}}).$$

Comme par ailleurs $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ est fermé par union ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 3.2. *La famille* $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ *est une algèbre de Boole.*

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ donnée par la condition (ii) de la Proposition 2.1. La propriété découle directement du fait que $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{N}})$ est une algèbre de Boole. Considérons en effet

$$W = \bigcup_{i=1}^{n} [\widetilde{U}_i, V_i]$$

avec $U_i, V_i \in \mathrm{Rec}(A^{\mathbf{N}})$. Comme $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{N}})$ est une algèbre de Boole, on peut supposer que la famille des U_i est formée de parties deux à deux disjointes. On a alors

$$A^{\mathbf{Z}} - W = [{}^{\omega}A - \bigcup_{i=1}^{n} U_i, A^{\omega}] \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} [U_i, A^{\omega} - V_i]\right).$$

Exemple 3.1. Considérons l'automate $\mathfrak{A} = (Q, I, T)$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ donné ci-dessous

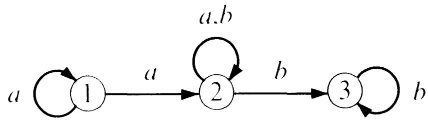


Figure 3.1

avec $Q = \{1, 2, 3\}$, $I = \{1\}$, $T = \{3\}$. Soit $W = |\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}$. On a

$$W = {}^{\omega}aA^*b^{\omega}.$$

Une décomposition de l'ensemble W correspondant à la condition (ii) de la Proposition 2.1 est

$$W = [{}^{\omega}aA^*, A^*b^{\omega}].$$

Le complément de W est

$$A^{\mathbf{Z}} - W = [{}^{\omega}(ba^*), A^{\omega}] \cup [{}^{\omega}A, (b^*a)^{\omega}] = {}^{\omega}(ba^*)A^{\omega} \cup {}^{\omega}A(b^*a)^{\omega}.$$

Nous en venons maintenant à la définition d'une notion d'automate déterministe sur les mots biinfinis. Pour cela nous avons besoin de la notion suivante.

On appelle *biautomate* sur l'alphabet A la donnée de deux automates déterministes sur A

$$\mathfrak{A}_- = (Q_-, I_-, T_-), \quad \mathfrak{A}_+ = (Q_+, I_+, T_+)$$

et d'une relation $\lambda \subset I_- \times I_+$. On note $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_-, \mathfrak{A}_+, \lambda)$ le biautomate. Le *comportement fini* d'un biautomate est l'ensemble des paires (x, y) de mots sur l'alphabet A telles qu'il existe une paire $(i_-, i_+) \in \lambda$ telle que

$$\tilde{x} \in |(Q_-, i_-, T_-)|, \quad y \in |(Q_+, i_+, T_+)|.$$

On note $|\mathfrak{A}|$ le comportement fini du biautomate $\mathfrak{A}$. *Le comportement biinfini* d'un biautomate $\mathfrak{A}$, noté $|\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}$, est l'ensemble des mots biinfinis $w = [u, v]$ tels que pour une paire $(i_-, i_+) \in \lambda$ on ait

$$\tilde{u} \in |(Q_-, i_-, T_-)|_{\mathbf{N}}, \quad v \in |(Q_+, i_+, T_+)|_{\mathbf{N}}.$$

Un *automate bilatère* est une biautomate $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_-, \mathfrak{A}_+, \lambda)$ dont le comportement fini a la propriété suivante : pour tous mots $x, y\ z \in A^*$

$$(x, yz) \in |\mathfrak{A}| \Leftrightarrow (xy, z) \in |\mathfrak{A}|.$$

Etant donnée une partie X de A^* on lui associe une partie $\overleftrightarrow{X}$ de $A^{\mathbf{Z}}$ nommée son *enveloppe bilatère* qui est définie comme suit. On a $w \in \overleftrightarrow{X}$ s'il existe une suite strictement décroissante $(1_k)_{k \geqq 0}$ de nombres négatifs et une suite strictement croissante $(r_k)_{k \geqq 0}$ de nombres positifs telles que pour tout $k \geqq 0$

$$w_{1_k} w_{1_k+1} \dots w_{r_k-1} w_{r_k} \in X.$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble $\overleftrightarrow{X}$ est clos par translation. On peut définir $\overleftrightarrow{X}$ de façon équivalente de la façon suivante. On considère l'ensemble $A^* \times A^*$ dont les éléments sont appelés des bimots. On ordonne l'ensemble $A^* \times A^*$ des bimots en posant

$$(x, y) < (z, t)$$

si $\tilde{x} < \tilde{z}$ et $y < t$. Soit

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1) \dots$$

une suite croissante d'éléments de $A^* \times A^*$ tels que $x_k y_k \in X$ pour $k \geqq 0$. Soient $u \in A^{-N}$ et $v \in A^N$ définis par $\tilde{u} = \lim \tilde{x}_k$, $v = \lim y_k$. L'ensemble $\overleftrightarrow{X}$ est formé de tous les mots biinfinis de la forme $[u, v]$ obtenus de cette façon.

PROPOSITION 3.3. *Une partie W de $A^{\mathbf{Z}}$ est le comportement infini d'un automate bilatère ssi elle est l'enveloppe bilatère d'une partie reconnaissable de A.*

Démonstration. Soit d'abord $X \in \mathrm{Rec}(A^*)$ et $W = \overleftrightarrow{X}$. Considérons un automate déterministe $\mathfrak{A} = (Q, F, I, T)$ reconnaissant X. Pour chaque état $q \in Q$, il existe un automate déterministe $\mathfrak{A}_{q-}$ qui reconnait l'ensemble des mots x tels que $\tilde{x}$ soit l'étiquette d'un chemin dans $\mathfrak{A}$ allant d'un état de I à q. On pose

$$\mathfrak{A}_{q-} = (Q_{q-}, i_{q-}, T_{q-}).$$

On pose de plus

$$\mathfrak{A}_{q^+} = (Q, q, T).$$

Soit $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_-, \mathfrak{A}_+, \lambda)$ le biautomate obtenu en prenant pour $\mathfrak{A}_-$ l'union des automates $\mathfrak{A}_{q-}$, pour $\mathfrak{A}_+$ l'union des automates $\mathfrak{A}_{q^+}$ et

$$\lambda = \{i_{q^-}, q) | q \in Q\}.$$

Le biautomate $\mathfrak{A}$ est par construction un automate bilatère et son comportement biinfini est $\overleftrightarrow{X}$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_-, \mathfrak{A}_+, \lambda)$ un automate bilatère et $W = |\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}$. Soit

$$X = \{xy | (x, y) \in |\mathfrak{A}| \}.$$

Nous vérifions que W est l'enveloppe bilatère de X. Soit d'abord $w \in W$. Par définition, on a

$$w = [u, v]$$

avec

$$\tilde{u} \in |(Q_-, i_-, T_-)|_{\mathbf{N}}, \quad v \in |(Q_+, i_+, T_+)|_{\mathbf{N}} \text{ et } (i_-, i_+) \in \lambda.$$

Il existe alors une suite strictement croissante $(x_n)_{n \geqq 0}$ de facteurs gauches de $\tilde{u}$ tels que

$$x_n \in |(Q_-, i_-, T_-)|$$

et une suite strictement croissante $(y_n)_{n \geqq 0}$ de facteurs gauches de v tels que

$$y_n \in |(Q_+, i_+, T_+)|.$$

On a alors pour chaque $n \geqq 0$

$$(\tilde{x}_n, y_n) \in |\mathfrak{A}|.$$

Ainsi $\tilde{x}_n y_n \in X$ pour tout $n \geqq 0$ et donc $w \in \overleftrightarrow{X}$. Réciproquement, soit $w \in \overleftrightarrow{X}$. On a alors $w = [u, v]$ avec $\tilde{u} = \lim \tilde{x}_n$, $v = \lim y_n$ et $x_n y_n \in X$ pour tout $n \geqq 0$. Comme $\mathfrak{A}$ est un automate bilatère, on a pour tout $n \geqq 0$, $(x_n, y_n) \in |\mathfrak{A}|$. On peut, quitte à prendre une sous suite, supposer que la même paire $(i_-, i_+) \in \lambda$ est utilisée pour chaque paire (x_n, y_n) et donc que pour tout $n \geqq 0$

$$\tilde{x}_n \in |(Q_-, i_-, T_-)|, \quad y_n \in |(Q_+, i_+, T_+)|.$$

Ainsi

$$\tilde{u} \in \overrightarrow{|(Q_-, i_-, T_-)|}, \quad v \in \overrightarrow{|(Q_+, i_+, T_+)|}.$$

Comme $\mathfrak{A}_-$ et $\mathfrak{A}_+$ sont déterministes, cela implique que

$$\tilde{u} \in |(Q_-, i_-, T_-)|_{\mathbf{N}} \quad \text{et} \quad v \in |(Q_+, i_+, T_+)|_{\mathbf{N}}.$$

Cela signifie que $w \in |\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}$ par définition du comportement biinfini d'un biautomate.

On dit qu'une partie W de $A^{\mathbf{Z}}$ est *déterministe*, noté $W \in \mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}})$ si elle est le comportement biinfini d'un automate bilatère.

Toute partie déterministe de $A^{\mathbf{Z}}$ est, bien entendu, reconnaissable. En effet, si W est le comportement biinfini d'un automate bilatère

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_-, \mathfrak{A}_+, \lambda)$$

alors W est l'union des $[\tilde{U}_{i_-}, V_{i_+}]$ pour $(i_-, i_+) \in \lambda$ avec

$$U_{i_-} = |(Q_-, i_-, T_-)|_{\mathbf{N}}, \quad V_{i_+} = |(Q_+, i_+, T_+)|_{\mathbf{N}}.$$

Par ailleurs W est clos par translation d'après la Proposition 3.3. Cela implique que W est reconnaissable d'après la Proposition 3.1.

Exemple 3.2. L'ensemble $W = {}^{\omega}ab^{\omega}$ est l'enveloppe bilatère de $X = a^+b^+$. Il est reconnu par l'automate bilatère ci-dessous.

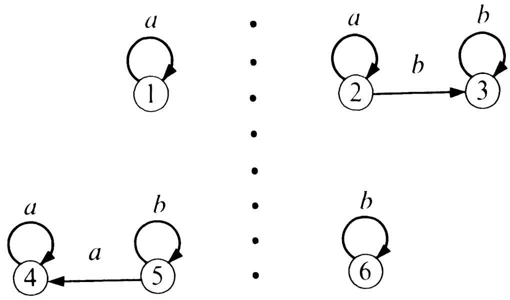


Figure 3.2

avec

$$\lambda = \{ (1, 2), (5, 6) \}, T_{-} = \{1, 4\}, T_{+} = \{3, 6\}.$$

Exemple 3.3. L'ensemble $W = {}^{\omega}Aa^{\omega}$ avec $A = \{a, b\}$ n'est pas déterministe. En effet, si W était déterministe, l'ensemble $R = A^*a^{\omega}$ de ses facteurs droits serait une partie déterministe de $A^{\mathbf{N}}$. Or $R \notin \mathrm{Det}(A^{\mathbf{N}})$ d'après l'Exemple 2.2.

Exemple 3.4. L'ensemble $W = {}^{\omega}aA^{\omega} \cup {}^{\omega}Aa^{\omega}$ n'est pas déterministe. Il suffit pour le vérifier de supposer par l'absurde que $W = \overleftrightarrow{X}$. On raisonne ensuite comme dans l'Exemple 2.2 en utilisant le fait que pour tout $x \in X$, il existe des mots $u, v \in A^*$ tels que $ubxbv \in X$. A la différence de l'exemple précédent, les ensembles de facteurs droits et de facteurs gauches de W sont, cette fois, déterministes.

Nous avons besoin plus loin d'une formule analogue à la formule (2.1) pour les enveloppes bilatères.

PROPOSITION 3.4. *Soit I un idéal à gauche de A^+ et $X = I - IA^+$. On a*

$$ {}^{\omega}AI^{\omega} = \overleftrightarrow{A^*X}.$$

Démonstration. Soit d'abord $w \in \overleftrightarrow{A^*X}$. On a

$$w = \lim(u_n, v_n) \quad \text{avec } u_nv_n \in A^*X.$$

Remarquons d'abord que si $x \in X$ et $u, v \in A^+$ alors $uxv \notin X$ puisque, I étant un idéal à gauche, on a $ux \in I$ et donc $uxv \in IA^+$. Comme

$$X \cap A^+XA^+ = \emptyset,$$

on peut supposer quitte à prendre une sous-suite que l'on a pour tout $n \geqq 0$,

$$v_{n+1} = v_nr_nx_n \quad \text{avec } r_n \in A^* \text{ et } x_n \in X.$$

Cela implique que

$$w \in {}^{\omega}Ar_0x_0r_1x_1 \ldots \subset {}^{\omega}AI^{\omega}.$$

Inversement, on a d'après la formule (2.1) les inclusions

$${}^{\omega}AI^{\omega} = {}^{\omega}A\overrightarrow{X^*} \subset {}^{\omega}A\overrightarrow{A^*X} \subset \overrightarrow{A^*X}.$$

Nous utiliserons aussi l'énoncé suivant

PROPOSITION 3.5. *Soit $X \subset A^*$ une partie reconnaissable. Si X est préfixe, on a $\overleftrightarrow{X} = \emptyset$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{A} = (Q, i, T)$ un automate déterministe reconnaissant X. Soit $(x_n)_{n \geqq 0}$ une suite d'éléments de X avec pour chaque $n \geqq 0$

$$x_{n+1} = r_nx_ns_n, \quad \text{et} \quad r_n, s_n \in A^+.$$

Posons

$$t_n = r_{n-1} \ldots r_1r_0 \quad \text{et} \quad u_n = s_0s_1 \ldots s_{n-1}$$

de telle sorte que $x_n = t_nx_0s_n$. Il existe deux entiers n, m avec $n < m$ et un état $p \in Q$ tels que les chemins partant de i et d'étiquettes respectivement t_n et t_m mènent au même état q. On a alors $t_mx_0s_n \in X$ bien que ce mot soit facteur gauche propre de x_m, d'où la contradiction.

Il n'est pas inutile de considérer la signification des définitions que nous avons donné du point de vue de la topologie naturelle sur $A^{\mathbf{Z}}$ obtenue en prenant la topologie discrète sur A et la topologie produit sur $A^{\mathbf{Z}}$. Les parties ouvertes closes par translation sont les ensembles ${}^{\omega}AXA^{\omega}$ pour $X \subset A^*$. Les parties fermées et reconnaissables ont été étudiées par B. Weiss sous le nom de systèmes sophiques [**16**].

4. Resultat principal. Nous allons dans cette section établir le résultat suivant, qui est une généralisation du Théorème de McNaughton (Théorème 2.6) au cas bilatère.

THEOREME 4.1. *La famille* $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ *est la clôture booléenne de la famille* $\mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}})$.

L'inclusion $[\mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}})]^B \subset \mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ est évidente. En effet, on a $\mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}}) \subset \mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ et, de plus, $\mathrm{Rec}(A^{\mathbf{Z}})$ est une algèbre de Boole (Corollaire 3.2). Pour démontrer l'inclusion réciproque, nous procédons par étapes, comme dans la preuve du Théorème 2.6.

Soit W une partie de $A^{\mathbf{Z}}$. On dit que W est une partie reconnaissable simple de $A^{\mathbf{Z}}$ s'il existe un morphisme φ de A^* sur un monoïde fini M, deux idempotents e, f, de M et un $m \in M$ tels que $em = mf = m$ avec

$$W = {}^{\omega}[\varphi^{-1}(e)]\varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(f)]^{\omega}.$$

On a alors le résultat suivant, analogue à la Proposition 2.7.

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-025-6 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 4.2. *Toute partie reconnaissable de $A^{\mathbf{Z}}$ est une union finie de parties reconnaissables simples.*

Démonstration. D'après la Proposition 3.1, il suffit d'établir l'énoncé pour une partie de $A^{\mathbf{Z}}$ de la forme $W = {}^{\omega}XYZ^{\omega}$ avec X, Y, $Z \subset \mathrm{Rec}(A^*)$. Soit $\varphi:A^* \to M$ un morphisme de A^* sur un monoïde fini M qui sature simultanément X^*, X^*YZ^* et Z^*. Soit

$$T = \{ (e, m, f) \in M^3 | e \in \varphi(X^*YZ^*), f \in \varphi(Z^*), \\ em = mf = m\}.$$

Nous vérifions que

$${}^{\omega}XYZ^{\omega} = \bigcup_{(e,m,f) \in T} {}^{\omega}[\varphi^{-1}(e)]\varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(f)]^{\omega}.$$

Soit d'abord $w = \ldots x_1x_0yz_0z_1 \ldots$ avec $x_i \in X$, $y \in Y$, $z_i \in Z$. En applicant la Proposition 2.3 à un alphabet en bijection avec $Y \cup Z$, on obtient l'existence d'un $s \in \varphi(YZ^*)$ et d'un idempotent $f \in \varphi(Z^*)$ tels que

$$yz_0z_1 \ldots \in \varphi^{-1}(s)[\varphi^{-1}(f)]^{\omega}.$$

En appliquant ensuite la Proposition 1.1 à un alphabet en bijection avec X, on obtient un élément $r \in \varphi(X^*)$ et un idempotent $e \in \varphi(X^*)$ tels que

$$\ldots x_1x_0 \in {}^{\omega}[\varphi^{-1}(e)]\varphi^{-1}(r).$$

En posant $m = ersf$ on a alors

$$w \in {}^{\omega}[\varphi^{-1}(e)]\varphi^{-1}(m)[\varphi^{-1}(f)]^{\omega} \quad \text{avec } (e, m, f) \in T.$$

Réciproquement, soit $w = \ldots x_1x_0yz_0z_1 \ldots$ avec $\varphi(x_i) = e$, $\varphi(y) = m$, $\varphi(z_i) = f$ et $(e, m, f) \in T$. Comme φ sature X^*, X^*YZ^* et Z^*, on a

$$x_i \in X^*, \quad y \in X^*YZ^*, \quad z_i \in Z^*$$

et donc $w \in {}^{\omega}XYZ^{\omega}$.

La deuxième étape de la preuve du Théorème 4.1 est l'énoncé suivant, analogue à la Proposition 2.8 mais dont la preuve est substantiellement plus compliquée.

PROPOSITION 4.3. *Soit $\varphi:A^* \to M$ un morphisme de A^* sur un monoïde fini M. Soit m un élément de M et e, f deux idempotents de M avec $emf = m$. Soient*

$$X = \varphi^{-1}(e) - (\varphi^{-1}(e) - 1)^2, \quad G = X - A^+X$$

$$Y = \varphi^{-1}(m)$$

$$Z = \varphi^{-1}(f) - (\varphi^{-1}(f) - 1)^2, \quad D = X - XA^+$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-025-6 Published online by Cambridge University Press

et soient I, J les idéaux

$$I = \{w \in A^* | e \notin M\varphi(w)M\}$$

$$J = \{w \in A^* | f \notin M\varphi(w)M\}.$$

On a l'égalité

$$^{\omega}XYZ^{\omega} = \overleftrightarrow{GXYZD} - {}^{\omega}IA^{\omega} - {}^{\omega}AJ^{\omega}.$$

Démonstration. Soit d'abord $w = \ldots x_1x_0yz_0z_1 \ldots$ chaque x_i a un facteur droit g_i dans G et chaque z_i a un facteur gauche d_i dans D. Comme $emf = m$ on a de plus

$$x_{i-1} \ldots x_0yz_1 \ldots z_{i-1} \in Y.$$

Ainsi

$$w = \lim(g_ix_{i-1} \ldots x_1x_0, yz_0z_1 \ldots z_{i-1}d_i) \in \overleftrightarrow{GXYZD}.$$

Ensuite, comme aucun facteur du mot infini $z_0z_1 \ldots$ n'est dans J, on a $w \notin {}^{\omega}AJ^{\omega}$. De même, $w \notin {}^{\omega}IA^{\omega}$.

Réciproquement, considérons

$$w \in \overleftrightarrow{GXYZD} - {}^{\omega}IA^{\omega} - {}^{\omega}AJ^{\omega}.$$

Il existe une suite strictement croissante (u_n, v_n) de bimots telle que

$$w = \lim(u_n, v_n) \quad \text{avec } u_nv_n \in GXYZD.$$

Pour chaque entier $n \geqq 0$, la "coupure" entre u_n et v_n peut "tomber" dans l'un des cinq ensemble G, X, Y, Z ou D. Le même cas se produit nécessairement pour une infinité d'entiers n. Nous allons considérer successivement les cinq cas

Cas 1. Il existe une infinité d'entiers $n \geqq 0$ tels que

$$u_n = u'_nu''_n, \quad u''_nv_n \in D, \quad u'_n \in GXYZ.$$

Ce cas ne peut se produire. En effet, D est une partie reconnaissable de A^* qui est préfixe et donc $\overleftrightarrow{D} = \emptyset$ d'après la Proposition 3.5, alors que la suite (u''_n, v_n) est une suite strictement croissante de bimots tels que $u''_nv_n \in D$.

Cas 2. Il existe une infinité d'entiers $n \geqq 0$ tels que

$$u_n = u'_nu''_n, \quad v_n = v'_nv''_n \quad \text{avec}$$

$$u'_n \in GXY, u''_nv'_n \in Z, \quad v''_n \in D$$

Comme D est préfixe, on peut supposer que l'on a $v_n < v'_{n+1}$ pour $n \geqq 0$.

Distinguons maintenant deux sous-cas.

Sous cas 2a. La suite $|u''_n|$ est bornée. On peut alors supposer que $u'_n = u''$ pour $n \geqq 0$. La suite $(\widetilde{u}'_n)_{n \geqq 0}$ est alors une suite strictement croissante dont la limite $\widetilde{u}'$ est dans $\overrightarrow{\widetilde{Y}\widetilde{X}\widetilde{G}} - \widetilde{I}^{\omega}$. D'après la Proposition 2.8,

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-025-6 Published online by Cambridge University Press

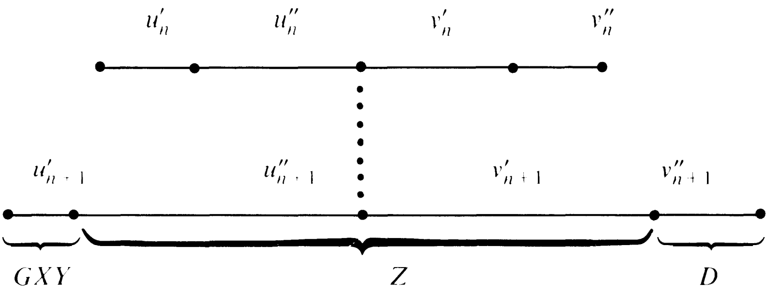


Figure 4.1

on a donc $u' \in {}^{\omega}XY$. La suite $u''v_n$ est strictement croissante et sa limite $u''v$ est dans $\overrightarrow{ZD}$. D'après la Proposition 2.8 on a donc $u''v \in Z^{\omega}$. Comme $w = [u'u'', v]$ on a donc $w \in {}^{\omega}XYZ^{\omega}$.

Sous cas 2b. La suite $|u''_n|$ n'est pas bornée. Nous montrons que ce cas est impossible. On peut, quitte à prendre une sous-suite, supposer que $u_n < \tilde{u}''_{n+1}$ pour tout $n \geqq 0$.

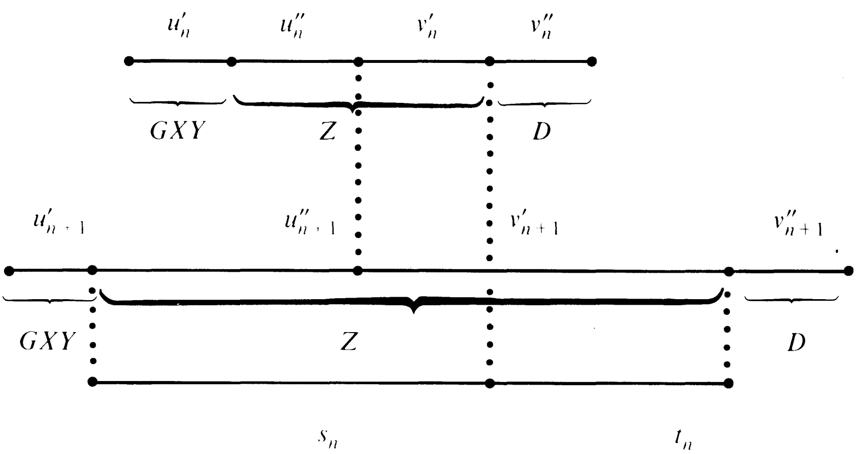


Figure 4.2

Posons pour tout $n \geqq 0$

$$s_n = u''_{n+1}v'_n, \quad v'_{n+1} = v'_n t_n.$$

On a alors

$$v'_{n+1} = v'_0 t_0 t_1 \ldots t_n$$

et donc $w \in {}^{\omega}AT^{\omega}$ avec $T = \{t_n\}$. D'après la Proposition 2.3 on peut, quitte à prendre une sous-suite, supposer que $\varphi(t_n)$ est un idempotent fixe g de M pour $n \geqq 0$. On a $g \in fM$ car $t_n \in v''_n A^*$ et aussi $f \in Mg$ car

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-025-6 Published online by Cambridge University Press

$s_nt_n \in Z$. D'après la Proposition 1.1, cela implique $f = g$. On a de plus $\varphi(s_n) \in Mf$ puisque $s_n \in A^*Z$. Comme

$$\varphi(t_n) = \varphi(s_nt_n) = f,$$

cela implique que

$$\varphi(s_n) = \varphi(s_n)\varphi(t_n) = \varphi(s_nt_n) = f.$$

On obtient ainsi une contradiction avec la définition de Z puisque s_nt_n est un mot de Z qui est un produit de deux mots non vides de $\varphi^{-1}(f)$.

Cas 3. Il existe une infinité d'entiers $n \geqq 0$ tels que

$$u_n = u'u''_n, \quad v_n = v'_nv''_n \quad \text{avec}$$

$$u'_n \in GX, \quad u''_nv'_n \in Y, \quad v''_n \in ZD$$

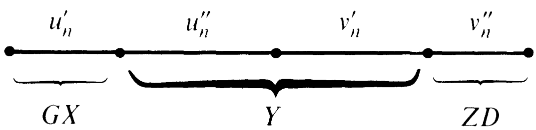


Figure 4.3

On peut supposer, quitte à prendre une sous-suite, que $\varphi(u''_n)$ et $\varphi(v'_n)$ sont deux éléments fixes de M. Posons $m'' = \varphi(u''_n)$, $m' = \varphi(v'_n)$ et

$$Y'' = \varphi^{-1}(m''), \quad Y' = \varphi^{-1}(m').$$

On a d'après la Proposition 2.8

$$\tilde{Y}''\tilde{X}^\omega = \overrightarrow{\tilde{Y}\tilde{X}\tilde{G}} - \tilde{I}^\omega, \quad Y'Z^\omega = \overrightarrow{Y'ZD} - J^\omega.$$

Ainsi, on a

$$\lim(\tilde{u}_n) \in \tilde{Y}''\tilde{X}^\omega \quad \text{et} \quad \lim(v_n) \in Y'Z^\omega.$$

Comme $Y''Y' \subset Y$ ceci montre que $w \in {}^\omega XYZ^\omega$.

Cas 4. Il existe une infinité d'entiers $n \geqq 0$ tels que

$$u_n = u'_nu''_n, \quad v_n = v'_nv''_n \quad \text{avec}$$

$$u'_n \in G, \quad u''_nv'_n \in X, \quad v''_n \in YZD.$$

Ce cas est symétrique du cas 3.

Cas 5. Il existe une infinité d'entiers $n \geqq 0$ tels que

$$v_n = v'_nv''_n, \quad u_nv'_n \in G, \quad v''_n \in XYZD.$$

Ce cas est impossible dans le cas 1.

L'examen des cinq cas est achevé ainsi donc que la preuve de la proposition.

Le Théorème 4.1 est une conséquence directe des Propositions 4.2 et 4.3. En effet, d'après la Proposition 4.2, il suffit de démontrer que $W \in [\mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}})]^B$ quand W est une partie reconnaissable simple. Et dans ce cas, la Proposition 4.3 permet de conclure puisque, d'après la Proposition 3.4, on a ${}^{\omega}AJ^{\omega} \in \mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}})$, et que, symétriquement, ${}^{\omega}IA^{\omega} \in \mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}})$.

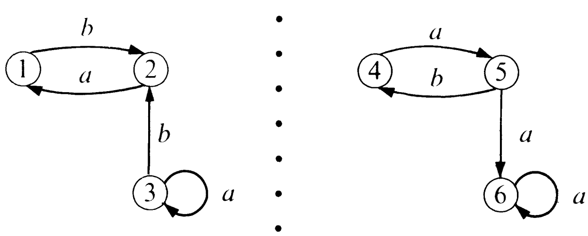
5. Remarques. Les résultats contenus dans cet article ont été présentés au colloque de l'ACM intitulé "Symposium on Theory of Computing" en Mai 1982. Depuis cette date, plusieurs collègues nous ont fait des suggestions dont la version finale tient compte. Tout d'abord, la première version de notre article contenait une inexactitude qui a d'abord été relevée par Wolfang Thomas de l'Université d'Aix la Chapelle, puis par le rapporteur de l'article pour ce journal. En fait, nous avons donné dans la première version une définition des automates bilatères qui est différente de celle qui est donnée dans cet article. Au lieu d'exiger que le comportement fini d'un automate bilatère soit un ensemble de bimots qui est union de classes pour la relation d'équivalence

$$(x, yz) \sim (xy, z) \quad (x, y, z \in A^*)$$

nous exigions seulement la condition plus faible que le comportement biinfini du biautomate soit clos par translation. Il n'est alors pas évident du tout que le comportement biinfini d'un biautomate $\mathfrak{A}$ satisfaisant cette condition soit l'enveloppe bilatère d'une partie de A^*. Il est en tout cas faux, contrairement à ce que nous avons affirmé, qu'il soit l'enveloppe bilatère de l'ensemble

$$X = \{xy|(x, y) \in |\mathfrak{A}|\}$$

comme le montre l'exemple du biautomate ci-dessous



avec

$$\lambda = \{(1, 4), (1, 6), (2, 5), (3, 6)\}, \quad T_- = \{2\}, \quad T_+ = \{6\}.$$

On a $|\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}} = {}^{\omega}(ab)a^{\omega}$ et le comportement biinfini de $\mathfrak{A}$ est bien clos par translation. On a par ailleurs

$$(b(ab)^*, a) \subset |\mathfrak{A}|$$

et donc ${}^{\omega}(ba)^{\omega}$ est dans l'enveloppe bilatère de $\{xy|(x, y) \in |\mathfrak{A}|\}$ bien que

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-025-6 Published online by Cambridge University Press

$$^{\omega}(ba)^{\omega} \notin |\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}.$$

Cette question difficile a été résolue par Danielle Beauquier, qui a démontré le résultat suivant (cf. [**1**]) :

THEOREME. *Soit* $\mathfrak{A}$ *un biautomate et* $W = |\mathfrak{A}|_{\mathbf{Z}}$ *son comportement biinfini. Si* W *est clos par translation, alors* $W \in \mathrm{Det}(A^{\mathbf{Z}})$.

D'autres résultats sur les automates et les mot biinfinis ont été obtenus par différents auteurs depuis que nous avons diffusé la première version de cet article.

Parmi ces résultats, nous mentionnons le suivant, dû à Kevin Compton [**3**]. Disons qu'un mot $w \in A^{\mathbf{Z}}$ est *générique* si tout mot de A^* apparait une infinité de fois à gauche et à droite dans w. (Kevin Compton appelle ces mots "riches"). Le résultat est le suivant : une partie reconnaissable W de $A^{\mathbf{Z}}$ contient tous les génériques ou aucun d'entre eux.

D'autres résultats très intéressants on été annoncés par A. Semenov [**13**], comprenant en particulier une généralisation du résultat de K. Compton. Disons pour cela qu'un mot biinfini $w \in A^{\mathbf{Z}}$ est *récurrent* si tout facteur fini de w apparait une infinité de fois à gauche et à droite dans w. Le résultat annoncé en [**13**] est le suivant : deux mots récurrents ayant le même ensemble de facteurs ne sont pas distinguables par un automate fini.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. Beauquier, *Bilimites de langages reconnaissables*, Theoretical Comput. Sci. *33* (1984), 335-342.

2. R. Büchi, *On a decision method in restricted second order arithmetic*, in *Logic, methodology and philosophy of science*, Proc. 1960 Internat. Congress (Stanford Univ. Press, 1962), 1-11.

3. K. Compton, *On rich words*, in *Combinatorics on words* (Academic Press, 1983), 39-62.

4. S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Vol. A (Academic Press, 1974).

5. R. Graham, B. Rotschild and J. Spencer, *Ramsey theory* (Wiley, 1980).

6. Y. Gurevitch et L. Harrington, *Trees, automata and games*, Proc. 14th ACM Symp. on Theor. of Computing (1982), 60-65.

7. G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications* (Wiley, 1979).

8. D. Muller et P. Schupp, *The theory of ends pushdown automata and second order logic*, Theoret. Comput. Sci., *37* (1985), 51-76.

9. R. McNaughton, *Testing and generating infinite sequences by a finite automaton*, Information and Control *9* (1966), 521-530.

10. M. Rabin, *Decidability of second order theories and automata on infinite trees*, Trans. AMS *141* (1969), 1-35.

11. ——— *Automata on infinite objects and Church's problems*, Amer. Math. Soc. Regional Conferences Series in Math. *13* (1972), 1-23.

12. M. P. Schützenberger, *A propos des relations rationnelles fonctionnelles*, in *Automata, languages and programming* (North Holland, 1973), 103-114.

13. A. Semenov, *Decidability of monadic theories*, in *Mathematical foundations of computer science*, Lecture Notes in Comput. Sci. *176* (1984), 162-175.

14. S. Shelah, *The monadic theory of order*, Annals of Math. *102* (1975), 379-419.

15. W. Thomas, *A hierarchy of sets of infinite trees*, in *Theoretical computer science*, Springer Lecture Notes in Comput. Sci. *145* (1982).

16. B. Weiss, *Subshifts of finite type and sophic systems*, Monatshefte für Mathematik *77* (1973), 462-474.

Université Paris 7,
Paris, France