M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 66 (1977), 53-76

SUR LES NOYAUX DE CONVOLUTION CONDITIONNELLEMENT SOUS-MEDIANS

MASAYUKI ITÔ

1. Introduction

Dans toute la suite X désignera un groupe abélien localement compact et séparé, et ξ désignera la mesure de Haar sur X. Pour simplifier la discussion, on supposera toujours que X est à base dénombrable.

On rappelle qu'un noyau de convolution N sur X est une mesure de Radon positive dans X et que, pour une mesure (de Radon) réelle μ dans X, le N-potentiel de μ est la convolution $N*\mu$ dès qu'elle est définie au sens des mesures.

Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau N_0. On dit qu'un noyau de convolution N est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 si $\lim_{t\downarrow 0}\left(\dfrac{\alpha_t-\varepsilon}{t}\right)*N$ a un sens en dehors de l'origine pour la topologie vague et s'il définit une mesure positive en dehors de l'origine, où ε désigne la mesure d'unité à l'origine.

En particulier, soit $X=\boldsymbol{R}^n$ (l'espace euclidien à dimension $n\geqq 1$) et supposons qu'il existe un laplacien généralisé T sur $\boldsymbol{R}^n$ tel que $T*N_0 = -\varepsilon$ (au sens des distributions). Alors N est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 si et seulement si, pour tout $t>0$, $N*\alpha_t$ a un sens et $T*N\geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine.

Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt sur X et N un noyau de convolution. On connaît que s'il existe un noyau de convolution de Hunt N' tel que $N*N'=N_0$, alors N est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 et $N=0(N_0)$[1] (cf. [5]).

Received March 5, 1976.

(1) On écrit $N=0(N_0)$ si, pour une fonction finie et continue f dans X à support compact quelconque, il existe une fonction finie et continue g dans X à support compact telle que $N*f\leqq N_0*g$ en dehors d'un certain compact de X.

Il est plus important si son inverse a lieu. Le but de cette note est d'affirmer que cela a lieu. Si $X = \boldsymbol{R}^n$ et N_0 est le noyau newtonien, cela est déjà connu (cf. [3]).

Pour le montrer, on utilisera les deux résultats suivants:

(1) Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution sur X. Si N_1 satisfait au principe transitif de domination par rapport à N_2 et si N_1 est injectif(2), alors N_1 satisfait au principe du balayage relatif à N_2.

(2) Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt et N un noyau de convolution. Si $N \neq 0$ et si N est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0, alors N satisfait au principe transitif de domination par rapport à N_0.

2. Le principe transitif de domination et le balayage relatif

On notera toujours:

$L_2 = L_2(X)$ l'espace hilbertien usuel des fonctions réelles et carré ξ-sommables dans X;

$M_K = M_K(X)$ l'ensemble formé par toutes les fonctions réelles, ξ-mesurables et bornées dans X à support compact;

$C_K = C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions finies et continues dans X à support compact;

L_2^+, M_K^+ et C_K^+ leur sous-ensembles des fonctions $\geqq 0$.

Soient f et g deux fonctions réelles et ξ-mesurables dans X. Dans cette note, on utilise souvent la notation $f \geqq g$ (resp. $f = g$) si $f \geqq g$ (resp. $f = g$) ξ-p.p. sur X, où ξ-p.p. signifie "presque partout pour ξ".

Soit N un noyau de convolution sur X. Pour une fonction localement ξ-sommable f dans X, on désigne par Nf la densité de $N*(f\xi)$ par rapport à ξ dès que $N*(f\xi)$ a un sens.

Remarque 1. Pour $f \in M_K$ quelconque, Nf a un sens et elle est localement bornée.

PROPOSITION 1. *Soit N un noyau de convolution. Pour $f \in L_2$ à support compact quelconque, Nf a un sens et elle est localement carré ξ-sommable. Pour un compact F de X quelconque, il existe une constante $A(F) > 0$ telle que, quelle que soit f une fonction de L_2 portée par F,*

(2) On dit que N est injectif si, pour une mesure réelle μ quelconque, $\mu = 0$ dès que $N*\mu$ a un sens et que $N*\mu = 0$ dans X.

$$\int_F |Nf|^2 \, d\xi \leqq A(F) \int_F |f|^2 \, d\xi \ . \tag{2.1}$$

Voir, par exemple, le lemme 1.4 dans [4]. Pour un fermé F de X, on désigne par $L_2(F)$ le sous-espace de L_2 des fonctions porteés par F.

COROLLAIRE 1. *Soit F un compact de X. Pour $f \in L_2$ à support compact, on pose $(Nf)_F = Nf$ sur F et $(Nf)_F = 0$ dans $\mathscr{C}F$. Alors l'application $L_2(F) \ni f \to (Nf)_F \in L_2(F)$ est fortement continue et faiblement continue dans L_2.*

La continuité forte résulte de (2.1) et la continuité faible résulte de l'égalité $\int (Nf)_F g d\xi = \int f(\check{N}g)_F d\xi$ pour toutes $f, g \in L_2(F)$ et de $(\check{N}g)_F \in L_2(F)$.

Pour un noyau de convolution N, on note $\check{N}$ le noyau de convolution défini par $\int f d\check{N} = \int f(-x) dN(x)$ pour toute $f \in C_K$ et on l'appelle le noyau adjoint de N.

DÉFINITION 1. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. On dit que N_1 satisfait au principe transitif de domination par rapport à N_2 (noté simplement $N_1 \sqsubset N_2$) si, quelle que soient $f, g \in M_K^+$, $N_2 f \leqq N_2 g$ ξ-p.p. sur X dès que $N_1 f \leqq N_1 g$ ξ-p.p. sur $\mathrm{supp}(f\xi)$.

Pour une mesure réelle μ dans X, $\mathrm{supp}(\mu)$ désigne le support de μ.

PROPOSITION 2. *Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. Alors $N_1 \sqsubset N_2$ et $\check{N}_1 \sqsubset \check{N}_2$ sont equivalents.*

Démonstration. Evidemment il suffit de montrer que $N_1 \sqsubset N_2 \Rightarrow \check{N}_1 \sqsubset \check{N}_2$. Supposons que, pour $f, g \in M_K^+$, $\check{N}_1 f \leqq \check{N}_1 g$ ξ-p.p. sur $\mathrm{supp}(f\xi)$; alors $N_1 \check{f} \leqq N_1 \check{g}$ ξ-p.p. sur $\mathrm{supp}(\check{f}\xi)$, où $\check{f}(x) = f(-x)$. D'après $N_1 \sqsubset N_2$, on a $N_2 \check{f} \leqq N_2 \check{g}$ ξ-p.p. sur X, d'où $\check{N}_2 f \leqq \check{N}_2 g$ ξ-p.p. sur X. On voit ainsi que $\check{N}_1 \sqsubset \check{N}_2$, et la démonstration est complète.

Considérons une condition commode pour le principe transitif de domination. La proposition suivante est analogue au théorème 1 dans [2].

PROPOSITION 3. *Soient $N_1 \neq 0$ et $N_2 \neq 0$ deux noyaux de convolution. Alors les quatre énoncés suivants sont équivalents:*

(1) $N_1 \sqsubset N_2$.

(2) *Pour toute constante $c > 0$, $N_1 + c\varepsilon \sqsubset N_2$.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

(3) *Pour* $f, g \in C_K^+$ *quelconques,* $N_2 * f \leqq N_2 * g$ *partout sur* X *dès que* $N_1 * f \leqq N_1 * g$ *sur* $\mathrm{supp}(f)$.

(4) *Pour* $f, g \in C_K^+$ *quelconques et pour une constante* $c > 0$ *quelconque,* $N_2 * f \leqq N_2 * g$ *partout sur* X *dès que* $N_1 * f + cf \leqq N_1 * g + cg$ *sur* $\mathrm{supp}(f)$.

On désigne aussi par $\mathrm{supp}(f)$ le support de f. Pour montrer la proposition 3, on prépare le lemme suivant:

LEMME 1. *Soient* N_1 *et* N_2 *deux noyaux de convolution sur* X; *supposons que* $N_1 \sqsubset N_2$. *Si, pour* $f, g \in M_K^+, N_1 f \leqq N_1 g$ ξ-p.p. *sur* $\{x \in X; f(x) > 0\}$, *alors* $N_2 f \leqq N_2 g$ ξ-p.p. *sur* X.

Montrons d'abord le lemme 1. On peut choisir une suite croissante $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de compacts de X telle que $F_n \subset \{x \in X; N_1 f(x) \leqq N_1 g(x)\}$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{C}F_n} f d\xi = 0$. Posons $f_n = f$ sur F_n et $f_n = 0$ dans $\mathscr{C}F_n$. Alors $N_1 f_n \leqq N_1 g$ ξ-p.p. sur $\mathrm{supp}(f_n \xi)$, et donc $N_1 \sqsubset N_2$ donne que $N_2 f_n \leqq N_2 g$ ξ-p.p. sur X. En faisant $n \uparrow +\infty$, on arrive à $N_2 f \leqq N_2 g$ ξ-p.p. sur X, d'où le lemme 1.

Montrons la proposition 3. On montrera d'abord que (1) $\Rightarrow$ (2). Soit c une constante > 0 et supposons que, pour $f, g \in M_K^+, N_1 f + cf \leqq N_1 g + cg$ ξ-p.p. sur $\mathrm{supp}(f\xi)$. Alors on a

$$N_1(f-g)^+ + c(f-g)^+ \leqq N_1(f-g)^- + c(f-g)^-$$

ξ-p.p. sur $\mathrm{supp}(f\xi)$, et donc $N_1(f-g)^+ \leqq N_1(f-g)^-$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; (f-g)^+(x) > 0\}$. D'après le lemme 1, on a $N_2(f-g)^+ \leqq N_2(f-g)^-$ ξ-p.p. sur X, d'où $N_2 f \leqq N_2 g$ ξ-p.p. sur X. On voit ainsi (1) $\Rightarrow$ (2).

De la même manière, on obtient que (3) $\Rightarrow$ (4). On montrera ensuite que (4) $\Rightarrow$ (2). Soit c une constante > 0 quelconque et supposons que, pour $f, g \in M_K^+, N_1 f + cf \leqq N_1 g + cg$ sur $\mathrm{supp}(f\xi)$. On prend une suite décroissante $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de X telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \mathrm{supp}(f\xi)$. Soit φ_n la fonction caractéristique de $G_n \cap \mathscr{C}(\mathrm{supp}(f\xi))$ $(n = 1, 2, \cdots)$ et posons

$$a = \operatorname*{ess.sup}_{x \in G_1} N_1 f(x) \qquad (< +\infty).$$

Alors on a

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

$$N_1f + cf \leqq N_1\Big(g + \frac{a}{c}\varphi_n\Big) + c\Big(g + \frac{a}{c}\varphi_n\Big)$$

ξ-p.p. dans G_n. Il existe donc un voisinage compact V_n de l'origine tel que $\varphi \in C_K^+$, portée par V_n quelconque,

$$(N_1 + c\varepsilon)*(f*\varphi) \leqq (N_1 + c\varepsilon)*\Big(\Big(g + \frac{a}{c}\varphi_n\Big)*\varphi\Big)$$

sur $\mathrm{supp}(f*\varphi)$. L'énoncé (4) donne que

$$N_2*(f*\varphi) \leqq N_2*\Big(\Big(g + \frac{a}{c}\varphi_n\Big)*\varphi\Big)$$

En faisant $\varphi\xi \to \varepsilon$ (vaguement), on a $N_2f \leqq N_2\Big(g + \dfrac{a}{c}\varphi_n\Big)$ ξ-p.p. sur X. En faisant ensuite $n \uparrow +\infty$, on arrive à $N_2f \leqq N_2g$ ξ-p.p. sur X. On voit ainsi que (4) $\Rightarrow$ (2).

Evidemment on a (1) $\Rightarrow$ (3) et (2) $\Rightarrow$ (4). Donc il suffit de montrer que (2) $\Rightarrow$ (1). On remarque que, pour $f \in M_K^+$ quelconque, $N_1f > 0$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$ sous la condition (2). En effet, supposons qu'il existe $f \in M_K^+$ telle que $\xi(\{x \in X; f(x) > 0, N_1f(x) = 0\}) > 0$. Posons $A = \{x \in X; f(x) > 0, N_1f(x) = 0\}$ et $g(x) = f(x)$ sur A, $=0$ dans $\mathscr{C}A$. Alors $g \neq 0 \in M_K^+$ et $N_1g = 0$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; g(x) > 0\}$. Comme $N_1 \neq 0$, il existe $h \in M_K^+$ telle que $N_1h \geqq g$ ξ-p.p. sur X. Alors, pour une constante $c > 0$ quelconque, $N_1g + cg \leqq c(N_1h + ch)$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; g(x) > 0\}$. D'après $N_1 + c\varepsilon \sqsubset N_2$, on a $N_2g \leqq cN_2h$ ξ-p.p. sur X. Comme c est quelconque, on a $N_2g = 0$ ξ-p.p. sur X. Mais cela est en contradiction avec $N_2 \neq 0$. On voit ainsi que, pour $f \in M_K^+$ quelconque, $N_1f > 0$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. On montrera que (2) $\Rightarrow$ (1). Pour cela, il suffit de montrer l'implication suivante: Pour $f, g \in M_K^+$ quelconques,

$$N_1f < N_1g \ \xi\text{-p.p. sur } \{x \in X; f(x) > 0\} \Rightarrow N_2f \leqq N_2g \ \xi\text{-p.p. sur } X\,,$$

car si $N_1f \leqq N_1g$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$, alors, pour toute la constante $0 < a < 1$, $aN_1f < N_1g$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$. On peut supposer encore que $f \leqq 1$ ξ-p.p. sur X. Posons

$$B_n = \Big\{x \in X; N_1f(x) + \frac{1}{n} \leqq N_1g(x)\Big\}$$

et $f_n = f$ sur B_n, $= 0$ dans $\mathscr{C}B_n$. Alors $N_1 f_n + \frac{1}{n} f_n \leqq N_1 g$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; f_n(x) > 0\}$, et donc $N_1 + \frac{1}{n}\varepsilon \sqsubset N_2$ donne que $N_2 f_n \leqq N_2 g$ ξ-p.p. sur X. En faisant $n \uparrow +\infty$, on arrive à $N_2 f \leqq N_2 g$ ξ-p.p. sur X, d'où (2) $\Rightarrow$ (1). La démonstration est ainsi complète.

Remarque 2. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. Si $N_1 \sqsubset N_2$ et $N_1 = 0$, alors on a aussi $N_2 = 0$.

Discutons le principe relatif du balayage. On donne d'abord sa définition.

DÉFINITION 2. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. On dit que N_1 satisfait au principe du balayage relatif à N_2 si, pour une mesure positive μ dans X à support compact quelconque et pour un ouvert relativement compact G dans X quelconque, il existe une mesure positive μ' portée par $\overline{G}$ telle que l'on ait:

(B.1) $N_1 * \mu' \leqq N_2 * \mu$ dans X.

(B.2) $N_1 * \mu' = N_2 * \mu$ dans G (au sens des mesures).

Montrons le premier théorème qui a déjà introduit dans § 1.

THÉORÈME 1. *Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. Si $N_1 \sqsubset N_2$ et si N_2 est injectif, alors N_1 satisfait au principe du balayage relatif à N_2.*

Pour le montrer, on prépare les deux lemmes suivants.

LEMME 2. *Soient $N_1 \neq 0$, N_2 deux noyaux de convolution. Supposons que, pour toute $f \in M_K^+$, tout le compact F de X et pour toute la constante $c > 0$, il existe $f'_{F,c} \in M_K^+$ portée par F telle que $N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c} \leqq N_2 f$ ξ-p.p. sur X et $N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c} = N_2 f$ ξ-p.p. sur F. Alors N_1 satisfait au principe du balayage relatif à N_2.*

Le présent lemme sera obtenu de la même manière que dans le lemme 1.6 dans [4]. Montrons précisément le lemme 2. Soient μ une mesure positive dans X à support compact et G un ouvert relativement compact de X. On choisit une suite $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ de C_K^+ telle que φ_n soit portée par un compact fixé et que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n \xi = \varepsilon$ (vaguement). Alors, pour toute la constante $c > 0$, il existe $f'_{c,n} \in M_K^+$ portée par $\overline{G}$ telle que l'on ait $N_1 f'_{c,n} + c f'_{c,n} \leqq N_2(\mu * \varphi_n)$ ξ-p.p. sur X et $N_1 f'_{c,n} + c f'_{c,n} = N_2(\mu * \varphi_n)$ ξ-p.p.

sur $\overline{G}$. Evidemment $(f'_{c,n}\xi)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Soit μ'_c un point vaguement adhérent de $(f'_{c,n}\xi)_{n=1}^{\infty}$; alors on a $N_1 * \mu'_c + c\mu'_c \leqq N_2 * \mu$ dans X et $N_1 * \mu'_c + c\mu'_c = N_2 * \mu$ dans G. Comme $N_1 \neq 0$, on voit que $(\mu'_c)_{c>0}$ est vaguement bornée. Soit μ' un point vaguement adhérent de $(\mu'_c)_{c>0}$ lorsque $c \to 0$; alors on a $N_1 * \mu' \leqq N_2 * \mu$ dans X et $N_1 * \mu' = N_2 * \mu$ dans G, d'où le lemme 2.

Lemme 3. *Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. Supposons que $N_1 \sqsubset N_2$, N_2 est injectif et que, pour $f \in M_K^+$ quelconque et pour un compact F de X quelconque, il existe $f'_F \in M_K^+$ portée par F, et une seule telle que $N_1 f'_F = N_2 f$ ξ-p.p. sur F. Alors on a toujours $N_1 f'_F \leqq N_2 f$ ξ-p.p. sur X.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $f \in M_K^+$ et un compact F de X tels que

$$\xi(\{x \in X\,;\, N_1 f'_F(x) > N_2 f(x)\} > 0\ .$$

On choisit un compact F' de X tel que $\xi(F') > 0$ et que $N_1 f'_F > N_2 f$ sur F'. On a alors

$$N_1 f'_F = N_1 f'_{F \cup F'} \ \ \xi\text{-p.p. sur } \operatorname{supp}(f'_F \xi)$$

et

$$N_1 f'_F \geqq N_1 f'_{F \cup F'} \ \ \xi\text{-p.p. sur } \operatorname{supp}(f'_{F \cup F'} \xi)\ .$$

D'après $N_1 \sqsubset N_2$, on a $N_2 f'_F = N_2 f'_{F \cup F'}$ ξ-p.p. sur X. Comme N_2 est injectif, on a $f'_F = f'_{F \cup F'}$. Mais cela est en contradiction avec

$$N_1 f'_F > N_2 f = N_1 f'_{F \cup F'}$$

ξ-p.p. sur F'. Par conséquent on voit ainsi le lemme 3.

Démonstration du théorème 1. Comme N_2 est injectif, $N_2 \neq 0$ et donc la remarque 2 donne que $N_1 \neq 0$. D'après la proposition 3 et les présents deux lemmes, il suffit de montrer que, pour $f \in M_K^+$ quelconque, un compact F de X quelconque et pour une constante $c > 0$ quelconque, il existe $f'_{F,c} \in M_K^+$ portée par F, et une seule telle que

$$N_1 f'_{F,c} + c f'_{F,c} = N_2 f \ \ \xi\text{-p.p. sur } F\ . \tag{2.2}$$

Si $f'_{F,c}$ existe, alors $N_1 + c\varepsilon \sqsubset N_2$ et l'injectivité de N_2 donnent l'unicité de $f'_{F,c}$. Donc on montrera seulement l'existence de $f'_{F,c}$. Posons

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

$$\alpha = \inf_{g \in L_2^+(F)} \int_F |N_1 g + cg - N_2 f|^2 d\xi , \tag{2.3}$$

où $L_2^+(F) = \{f \in L_2(F) ; f \geqq 0\}$. Comme, pour toute $g \in L_2^+(F)$,

$$\left(\int_F |N_1 g + cg - N_2 f|^2 d\xi\right)^{1/2} \geqq c\left(\int_F g^2 d\xi\right)^{1/2} - \left(\int_F (N_2 f)^2 d\xi\right)^{1/2}$$

et l'application $L_2(F) \ni g \to (N_1 g)_F \in L_2(F)$ est faiblement continue dans L_2 (cf. le corollaire 1), il existe $f'_{F,c} \in L_2^+(F)$ telle que

$$\int_F |N_1 f'_{F,c} + cf'_{F,c} - N_2 f|^2 d\xi = \alpha . \tag{2.4}$$

Pour que $f'_{F,c}$ soit la fonction demandée, il suffit que α s'annule. Comme $(N_1 f'_{F,c})_F + cf'_{F,c}$ est la projection de $(N_2 f)_F$ sur $\{(N_1 g)_F + cg ; g \in L_2^+(F)\}$, on voit que, pour $g \in L_2^+(F)$ quelconque,

$$\int_F (N_1 f'_{F,c} + cf'_{F,c})(N_1 g + cg) d\xi \geqq \int_F (N_2 f)(N_1 g + cg) d\xi \tag{2.5}$$

et

$$\int_F (N_1 f'_{F,c} + cf'_{F,c})^2 d\xi = \int_F (N_2 f)(N_1 f'_{F,c} + cf'_{F,c}) d\xi . \tag{2.6}$$

Pour simplifier la notation, on note $h_1 = (N_1 f'_{F,c})_F + cf'_{F,c}$ et $h_2 = (N_2 f)_F$. Alors on a, d'après (2.5),

$$\check{N}_1 h_1 + ch_1 \geqq \check{N}_1 h_2 + ch_2 \ \xi\text{-p.p. sur } F \tag{2.7}$$

et, d'après (2.6),

$$\check{N}_1 h_1 + ch_1 = \check{N}_1 h_2 + ch_2 \ \xi\text{-p.p. sur } \{x \in X ; f'_{F,c}(x) > 0\} . \tag{2.8}$$

D'après la présente égalité, on a $c^2 f'_{F,c} \leqq \check{N}_1 h_2 + ch_2$ ξ-p.p. sur $\{x \in X ; f'_{F,c}(x) > 0\}$. Comme $h_2 \in M_K^+$, $\check{N}_1 h_2 + ch_2$ est bornée sur F, et donc $f'_{F,c} \in M_K^+$. On a aussi $h_1 \in M_K^+$. D'après $N_1 + c\varepsilon \sqsubset N_2$, (2.7), la proposition 2 et $\mathrm{supp}(h_1 \xi) \subset F$, on a

$$\check{N}_2 h_1 \geqq \check{N}_2 h_2 \ \xi\text{-p.p. sur } X ,$$

et donc

$$\int (\check{N}_2 h_1) f d\xi \geqq \int (\check{N}_2 h_2) f d\xi ,$$

d'où

$$\int_F (N_1 f'_{F,c} + cf'_{F,c})(N_2 f)d\xi \geqq \int_F (N_2 f)^2 d\xi \,. \tag{2.9}$$

D'après (2.6) et (2.9), on a $\alpha \leqq 0$, d'où $\alpha = 0$. On voit ainsi que $f'_{F,c}$ est la fonction demandée. La démonstration est complète.

On ne connaît pas maintenant si l'on peut éviter l'injectivité de N_2 dans le théorème 1. De la même manière que dans la discussion du principe du balayage, on aura la remarque suivante:

Remarque 3. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution; supposons que $N_1 \sqsubset N_2$ et que N_2 est injectif. Alors, pour une mesure positive μ dans X à support compact quelconque et pour un ouvert relativement compact G de X quelconque, il existe une measure positive μ' portée par $\overline{G}$, et une seule telle que l'on ait (B.1), (B.2) et (B.3):

(B.3) Quelle que soit ν une mesure positive par $\overline{G}, N_2 * \nu \geqq N_2 * \mu'$ dans X dès que $N_1 * \nu \geqq N_2 * \mu$ dans G.

En effet, on prend une suite $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de X telle que $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. D'après le théorème 1, il existe une mesure positive μ'_n portée par $\overline{G}_n$ telle que $N_1 * \mu'_n \leqq N_2 * \mu$ dans X et $N_1 * \mu'_n = N_2 * \mu$ dans G_n. D'après $N_1 \neq 0, (\mu'_n)_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. On désigne par μ' son point vaguement adhérent quelconque. Alors μ' vérifie évidemment (B.1) et (B.2). Soit ν une mesure positive portée par $\overline{G}$ telle que $N_1 * \nu \geqq N_2 * \mu$ dans G; alors, pour tout $n, N_1 * \nu \geqq N_1 * \mu'_n$ dans un certain voisinage de supp(μ'_n). Donc $N_1 \sqsubset N_2$ donne que $N_2 * \nu \geqq N_2 * \mu'_n$ dans X. En faisant $n \uparrow +\infty$, on arrive à $N_2 * \nu \geqq N_2 * \mu'$ dans X. On voit ainsi que μ' vérifie (B.3). Soit μ'' une autre mesure positive portée par $\overline{G}$ satisfaisant à (B.1), (B.2) et (B.3); alors on a $N_2 * \mu' = N_2 * \mu''$ dans X, et donc l'injectivité de N_2 donne $\mu' = \mu''$, d'où l'unicité de μ'.

De la manière usuelle, on verra que l'inverse du théorème 1 a lieu. Mais cela n'est pas très important.

PROPOSITION 4. *Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. Si N_1 satisfait au principe du balayage relatif à N_2, alors on a $N_1 \sqsubset N_2$.*

Démonstration. Supposons que, pour $f, g \in C_K^+$, $\check{N}_1 * f \leqq \check{N}_1 * g$ sur supp(f). Soit $x \in X$ quelconque; alors il existe une mesure positive ε'_x portée par supp(f) telle que $N_1 * \varepsilon'_x \leqq N_2 * \varepsilon_x$ dans X et $N_1 * \varepsilon'_x = N_2 * \varepsilon_x$

dans $\{y \in X ; f(y) > 0\}$, où ε_x désigne la mesure d'unité au point x. Donc on a

$$\check{N}_2 * f(x) = \int f(y) dN_2 * \varepsilon_x(y) = \int f(y) dN_1 * \varepsilon'_x(y) = \int \check{N}_1 * f(y) d\varepsilon'_x(y)$$
$$\leqq \int \check{N}_1 * g(y) d\varepsilon'_x(y) = \int g(y) dN_1 * \varepsilon'_x \leqq \int g(y) dN_2 * \varepsilon_x(y) = \check{N}_2 * g(x) .$$

Comme x est quelconque, on a $\check{N}_2 * f \leqq \check{N}_2 * g$ partout sur X. D'après les propositions 2, 3, on voit que $N_1 \sqsubset N_2$. La démonstration est ainsi complète.

3. Les noyaux de convolution conditionnellement sous-médians

Commeçons avec la discussion préparatoire des noyaux de convolution de Hunt.

Une famille $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ de mesures positives dans X est, par définition, un semi-groupe vaguement continu si $\alpha_0 = \varepsilon$, pour tous $t \geqq 0$ et $s \geqq 0$, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ et si l'application $t \to \alpha_t$ est vaguement continue. Si un noyau de convolution N sur X s'écrit, pour un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$, comme

$$N = \int_0^\infty \alpha_t dt , \tag{3.1}$$

alors N s'appelle un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est uniquement déterminé et s'appelle le semi-groupe vaguement continu associé au noyau N.

Posons, pour tout le nombre $p \geqq 0, N_p = \int \alpha_t \exp(-pt) dt$; alors $(N_p)_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N et, pour tout $p > 0$,

$$N + \frac{1}{p}\varepsilon = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (pN_p)^n , \tag{3.2}$$

où $(\cdot)^0 = \varepsilon$ et $(\cdot)^{n+1} = (\cdot)^n * (\cdot)$. La remarque suivante est bien connue (cf. [1]).

Remarque 4. Si N est un noyau de convolution de Hunt, alors pour tout la constante $c > 0, N + c\varepsilon$ est aussi un noyau de convolution de Hunt.

Les deux lemmes suivants sont aussi bien connus (cf. [1], [2] et [4]).

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

LEMME 4. *Soit N un noyau de convolution. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(a) *N un noyau de convolution de Hunt.*

(b) *N est injectif et il existe la résolvante associée au noyau N.*

Une famille $(N_p)_{p \geqq 0}$ de noyaux de convolution s'appelle la résolvante associée au noyau N si, pour $p \geqq 0$ et $q > 0$ quelconques, $N_p - N_q = (q-p)N_p * N_q$ et si $\lim_{p \to 0} N_p = N_0 = N$ (vaguement).

Pour simplifier la notation, on note $D^+(N)$ la totalité des mesures positives μ dans X telles que $N * \mu$ ait un sens.

LEMME 5. *Soit N un noyau de convolution de Hunt. Alors on a:*

(a) *N satisfait au principe de domination.*

(b) *Soient $\mu \in D^+(N)$ et G un ouvert de X. Alors il existe une mesure positive μ'_G portée par $\overline{G}$, et une seule telle que l'on ait*

(B.1)′ $N * \mu \geqq N * \mu'_G$ *dans* X;

(B.2)′ $N * \mu = N * \mu'_G$ *dans* G;

(B.3)′ *pour une mesure positive ν portée par $\overline{G}$ quelconque, $N * \nu \geqq N * \mu'_G$ dès que $N * \nu \geqq N * \mu$ dans F.*

On dit que N satisfait au principe de domination si $N \sqsubset N$. On dit ensuite que μ'_G est la mesure balayée de μ sur G relativement au noyau N. On connaît que l'injectivité de N donne $N * \mu \neq N * \mu'_G$ dès que $\text{supp}(\mu) \not\subset \overline{G}$,

Soient $\mu \in D^+(N)$ et $x \in X$ quelconques. On désigne par $\mu'_{x,G}$ la mesure balayée de $\mu * \varepsilon_x$ sur G relativement au noyau N.

LEMME 6. (1) *L'application $X \ni x \to \mu'_{x,G}$ est borélienne; c'est-à-dire, pour $f \in C_K$ quelconque, la fonction $\int f d\mu'_{x,G}$ de x est borélienne.*

(2) *Pour $\mu, \nu \in D^+(N)$, on a*

$$(\mu * \nu)'_G = \int \mu'_{x,G} d\nu(x) = \int \nu'_{x,G} d\mu(x) \tag{3.3}$$

dès que $\mu * \nu \in D^+(N)$.

On remarque que l'intégrale de (3.3) a un sens, d'après (1).

Montrons que (1) a lieu. On suppose d'abord que G est relativement compact. Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de points convergeant vers $x \in X$. Comme $N \neq 0$, $(\mu'_{x_n,G})_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Soit $f \in C_K^+$ quelconque. On choisit une sous-suite $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

$$\liminf_{n\to\infty}\int f dN*\mu'_{x_n,G} = \lim_{m\to\infty}\int f dN*\mu'_{x_m,G}\ .$$

Dans ce cas, on peut supposer que $(\mu'_{x_m,G})_{m=1}^{\infty}$ converge vaguement vers la limite μ'' lorsque $m\to+\infty$. Comme $\overline{G}$ est compact,

$$\lim_{m\to\infty} N*\mu'_{x_m,G} = N*\mu'' \qquad \text{(vaguement)}\ .$$

Comme $\operatorname{supp}(\mu'')\subset\overline{G}$, (B.3)$'$ donne que $N*\mu''\geqq N*\mu'_{x,G}$ dans X. Donc

$$\liminf_{n\to\infty}\int f dN*\mu'_{x_n,G} = \int f dN*\mu'' \geqq \int f dN*\mu'_{x,G}\ ,$$

et par suite la fonction $\int f dN*\mu'_{x,G}$ de x est semi-continue inférieurement. Notons $(N_p)_{p>0}$ la résolvante associée au noyau N. Alors, d'après l'équation résolvante $N_p = N*(\varepsilon - pN_p)$, on voit que, pour tout $p>0$, la fonction $\int f dN_p*\mu'_{x,G}$ de x est borélienne sur X. Comme $\lim_{p\to\infty} pN_p=\varepsilon$ (vaguement), on voit que la fonction $\int f d\mu'_{x,G}$ de x est borélienne. Supposons que G est général. Prenons une suite $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts relativement compacts de telle que $\overline{G_n}\subset G_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Il suffit de montrer que, pour $x\in X$ quelconque,

$$\lim_{n\to\infty}\mu'_{x,G_n} = \mu'_{x,G} \qquad \text{(vaguement)}\ .$$

D'après $N\neq 0$, on voit que $(\mu'_{x,G_n})_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée. Soient $\mu''_{x,G}$ un point vaguement adhérent de $(\mu'_{x,G_n})_{n=1}^{\infty}$ quelconque et $(\mu'_{x,G_m})_{m=1}^{\infty}$ une sous-suite de $(\mu'_{x,G_n})_{n=1}^{\infty}$ convergeant vaguement vers $\mu''_{x,G}$. Soit V un voisinage compact de l'origine quelconque. Alors, pour toute $f\in C_K^+$,

$$\begin{aligned}\limsup_{m\to\infty}\int f dN*\mu'_{x,G_m} &\leqq \int f dN*(\varepsilon-\varepsilon'_{CV})*\mu''_{x,G} + \limsup_{m\to\infty}\int f dN*\varepsilon'_{CV}*\mu'_{x,G_m}\\ &\leqq \int f dN*\mu''_{x,G} + \int f dN*\varepsilon'_{CV}*\mu*\varepsilon_x\ .\end{aligned}$$

On connaît bien que $N*\varepsilon'_{CV}$ converge d'une manière décroissante vers 0 lorsque $V\uparrow X$ (cf., par exemple, le théorème 3 de [4]), et donc

$$\limsup_{m\to\infty}\int f dN*\mu'_{x,G_m} \leqq \int f dN*\mu''_{x,G}\ ,$$

d'où $\lim_{m\to\infty} N*\mu'_{x,G_m} = N*\mu''_{x,G}$ (vaguement). On a alors $\mathrm{supp}(\mu''_{x,G}) \subset \overline{G}$ et $N*\mu''_{x,G} = N*(\mu*\varepsilon_x)$ dans G. Donc (B.3)' donne que $N*\mu''_{x,G} \geqq N*\mu'_{x,G}$ dans X. Evidemment $N*\mu'_{x,G_m} \leqq N*\mu'_{x,G}$ dans X, d'où $N*\mu''_{x,G} = N*\mu'_{x,G}$. L'injectivité de N donne que $\mu''_{x,G} = \mu'_{x,G}$. On voit ainsi que $\lim_{n\to\infty} \mu'_{x,G_n} = \mu'_{x,G}$ (vaguement), d'où (1).

Montrons que (2) a lieu. D'après (1), on voit aussi que l'application $X \ni x \to N*\mu'_{x,G}$ est aussi borélienne. Pour $f \in C_K^+$ quelconque, on a

$$\iint f dN*\mu'_{x,G} d\nu(x) \leqq \iint f dN*(\mu*\varepsilon_x) d\nu(x) = \int f dN*(\mu*\nu)$$

et, si $\mathrm{supp}(f) \subset G$,

$$\iint f dN*\mu'_{x,G} d\nu(x) = \int f dN*(\mu*\nu) \ .$$

Donc $\int \mu'_{x,G}\, d\nu(x)$ définit une mesure positive dans X. On a encore $\mathrm{supp}\Big(\int \mu'_{x,G} d\nu(x)\Big) \subset \overline{G}$, $N*(\mu*\nu) \geqq N*\Big(\int \mu'_{x,G} d\nu(x)\Big)$ dans X et $N*(\mu*\nu) = N*\Big(\int \mu'_{x,G} d\nu(x)\Big)$ dans G. D'après (B.3)', on a $N*(\mu*\nu)'_G \leqq N*\Big(\int \mu'_{x,G} d\nu(x)\Big)$ dans X. Soit $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts relativement compacts de X telle que $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. D'après le principe de domination pour N, on a

$$N*(\mu*\nu)'_G \geqq N*\Big(\int \mu'_{x,G_n} d\nu(x)\Big) \qquad \text{dans } X \ .$$

Comme, pour $x \in X$ quelconque, $(N*\mu'_{x,G_n})_{n=1}^{\infty}$ converge d'une manière croissante vers $N*\mu'_{x,G}$ lorsque $n \uparrow \infty$, on a

$$\lim_{m\to\infty} N*\Big(\int \mu'_{x,G_n} d\nu(x)\Big) = N*\Big(\int \mu'_{x,G} d\nu(x)\Big) \qquad \text{(vaguement)} ,$$

et donc $N*(\mu*\nu)'_G \geqq N*\Big(\int \mu'_{x,G} d\nu(x)\Big)$ dans X, d'où $N*(\mu*\nu)'_G = N*\Big(\int \mu'_{x,G} d\nu(x)\Big)$. On a alors $(\mu*\nu)'_G = \int \mu'_{x,G} d\nu(x)$, d'après l'injectivité de N. On a aussi $(\mu*\nu)'_G = \int \nu'_{x,G} d\mu(x)$. On achève ainsi la démonstration du lemme 6.

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

Pour un entier $n \geqq 0$ et pour $G \ni 0$, on note successivement

$$\mu_G^{(0)} = \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu_G^{(n)} = \int \mu_{x,G}^{(n-1)} d\mu'_G(x) \qquad (n \geqq 1) \tag{3.4}$$

dès que l'intégrale a un sens. On a évidemment $\mu_G^{(1)} = \mu'_G$ dans G.

LEMME 7. *Soient N un noyau de convolution de Hunt et $\mu \in D^+(N)$. Supposons que, pour un entier $k \geqq 2$, $(\mu)^k \in D^+(N)$. Alors, pour tout l'entier m $(1 \leqq m \leqq k)$, tout l'ouvert G de X et pour tout $x \in G$, $\mu_{x,G}^{(m)}$ a un sens et*

$$\int \mu_{y,G}^{(m)} d\mu_{x,G}^{(k-m)}(y) = \mu_{x,G}^{(k)} \qquad \text{dans } G\,. \tag{3.5}$$

En effet, on a, pour $1 \leqq m \leqq k$ quelconque, $(\mu)^m \in D^+(N)$. Donc le lemme 6 donne que $\mu_{x,G}^{(m)}$ a un sens. L'égalité (3.5) résulte seulement du théorème de Fubini.

LEMME 8. *Soient N un noyau de convolution de Hunt et $\mu \in D^+(N)$. Si $N(\{0\}) > 0$ et $N * \mu$ est absolument continu par rapport à ξ, alors, pour une mesure positive ν dans X quelconque et pour un ouvert G de X quelconque, $(\mu * \nu)'_G$ est absolument continue par rapport à ξ dès que $\mu * \nu \in D^+(N)$.*

En effet, pour $x \in X$ quelconque, $\mu'_{x,G}$ est absolument continue par rapport à ξ, car

$$N(\{0\})\mu'_{x,G} \leqq N * \mu'_{x,G} \leqq N * \mu * \varepsilon_x$$

dans X. Donc $(\mu * \nu)'_G = \int \mu'_{x,G} d\nu(x)$ est absolument continue par rapport à ξ, d'où le lemme 8.

Le lemme suivant jouera un rôle essentiel dans la démonstration de notre théorème principal.

LEMME 9. *Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt, $\sigma \in D^+(N_0)$ et $f, g \in C_K^+$. Supposons que, pour tout l'entier $n \geqq 1$, $(\sigma)^n$ a un sens et appartient à $D^+(N_0)$. Si $\check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}) * f < \check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}) * g$ sur* supp(f) *et s'il existe $\varphi \in C_K^+$ telle que $\check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi > 0$ sur* supp(f), *alors $\check{N}_0 * f \leqq \check{N}_0 * g$ sur X.*

Démonstration. On peut choisir une constante $c > 0$ et un ouvert relativement compact $G \supset \text{supp}(f)$ tels que $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi > 0$ et

$(\check{N}_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\check{\sigma})*f\leqq(N_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\check{\sigma})*g$ dans $\overline{G}$. Soit ν'_G la mesure balayée de $g\xi$ sur G relativement au noyau $\check{N}_0+c\varepsilon$ (voir la remarque 4). Alors il existe g'_G portée par G telle que $\nu'_G=g'_G\xi$. Dans ce cas, on peut supposer que g'_G est borélienne. Comme $(\check{N}_0+c\varepsilon)*g'_G\leqq(\check{N}_0+c\varepsilon)*g$ ξ-p.p. sur X et $(\check{N}_0+c\varepsilon)*g'_G=(\check{N}_0+c\varepsilon)*g$ ξ-p.p. dans G, on a

$$(\check{N}_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\check{\sigma})*g'_G\geqq(\check{N}_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\check{\sigma})*g$$

ξ-p.p. dans G. Donc

$$(\check{N}_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\check{\sigma})*f\leqq(\check{N}_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\check{\sigma})*g'_G \qquad \text{dans } G\,. \tag{3.6}$$

Notons, pour $x\in X$ quelconque, $\sigma'_{x,G}$ la mesure balayée de σ sur G relativement au noyau $N_0+c\varepsilon$. On suppose que, pour $x\in G$ quelconque, la notation $\sigma^{(n)}_{x,G}$ est la même que dans (3.4) ($n=0,1,2,\cdots$). D'après le lemme 8, $\sigma^{(n)}_{x,G}$ a toujours un sens. Soit $h\in M^+_K$ portée par G quelconque. Alors, pour tout l'entier $n\geqq 2$, le lemme 6 donne que

$$\int\sigma^{(n)}_{x,G}h(x)d\xi(x)=\int\sigma^{(n-1)}_{x,G}d((h\xi)*\sigma)'_G(y)\ ,$$

où $((h\xi)*\sigma)'_G$ est la mesure balayée de $(h\xi)*\sigma$ sur G relativement au noyau $N_0+c\varepsilon$. D'après le lemme 8, $((h\xi)*\sigma)'_G$ est absolument continue par rapport à ξ. On a donc $\int_{\notin G}d((h\xi)*\sigma)'_G=0$. Alors on voit, par récurrence, que $\int\sigma^{(n)}_{x,G}h(x)d\xi(x)$ est absolument continue par rapport à ξ. Sa densité $\tilde{h}^{(n)}_G$ est portée par G. D'après (3.6) et $\int_{\notin G}g'_Gd\xi=0$, on a, pour tout l'entier $k\geqq 1$,

$$\begin{aligned}
0&\leqq\int(\check{N}_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\check{\sigma})*(g'_G-f)(y)d\Big(\sum_{n=0}^{k}\int\sigma^{(n)}_{x,G}h(x)d\xi(x)\Big)(y)\\
&=\sum_{n=0}^{k}\iiint(g'_G(z)-f(z))d(N_0+c\varepsilon)*(\varepsilon-\sigma)*\varepsilon_y(z)d\sigma^{(n)}_{x,G}(y)h(x)d\xi(x)\\
&=\sum_{n=0}^{k}\iiint(g'_G(z)-f(z))d(N_0+c\varepsilon)*(\sigma^{(0)}_{y,G}-\sigma^{(1)}_{y,G})d\sigma^{(n)}_{x,G}(y)h(x)d\xi(x)\\
&=\sum_{n=0}^{k}\iint(g'_G(z)-f(z))d(N_0+c\varepsilon)*(\sigma^{(n)}_{x,G}-\sigma^{(n+1)}_{x,G})(z)h(x)d\xi(x)\\
&=\iint(g'_G(y)-f(y))d(N_0+c\varepsilon)*(\sigma^{(0)}_{x,G}-\sigma^{(k+1)}_{x,G})(y)h(x)d\xi(x)\\
&=\int(\check{N}_0+c\varepsilon)*(g'_G-f)(x)h(x)d\xi(x)
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

$$-\iint (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (g'_G - f)(y) d\sigma_{x,G}^{(k+1)}(y) h(x) d\xi(x) .$$

Admettons que, pour $h \in M_K^+$ portée par G quelconque,

$$\lim_{n\to\infty} \int (N_0 + c\varepsilon) * \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x) = 0 \qquad \text{(vaguement)} . \tag{3.7}$$

Comme $(g'_G - f)$ est bornée et à support compact, on a

$$\lim_{k\to\infty} \iint (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (g'_G - f)(y) d\sigma_{x,G}^{(k+1)}(y) h(x) d\xi(x)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \iint (g'_G - f) d(N_0 + c\varepsilon) * \sigma_{x,G}^{(k+1)} h(x) d\xi(x) = 0 .$$

Par conséquent

$$\int (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (g'_G - f)(x) h(x) d\xi(x) \geqq 0 .$$

Comme h est quelconque, on a

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * f \leqq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g'_G \ \xi\text{-p.p.} \qquad \text{sur } G .$$

D'après le principe de domination pour $\check{N}_0 + c\varepsilon$, on a

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * f \leqq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g'_G \ \xi\text{-p.p.} \qquad \text{sur } X ,$$

d'où $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * f \leqq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * g$ partout sur X. Notons $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau N_0. Alors $(\check{N}_0 + c\varepsilon) * \left(\frac{1}{c}\check{N}_{1/c}\right) = \check{N}_0$, et donc $\check{N}_0 * f \leqq \check{N}_0 * g$ sur X.

Montrons finalement que (3.7) a lieu. Posons

$$a = \inf_{x\in G} (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi(x) > 0 .$$

Soit $\varphi'\xi$ la mesure balayée de $\varphi\xi$ sur G relativement au noyau $\check{N}_0 + c\varepsilon$. On peut supposer que φ' est borélienne et portée par G. De la même manière comme ci-dessus, on a

$$(\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi' \geqq (\check{N}_0 + c\varepsilon) * (\varepsilon - \check{\sigma}) * \varphi \geqq a \ \xi\text{-p.p.}$$

dans G. Comme la mesure $\int \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x)$ est absolument continue par rapport à ξ et $\operatorname{supp}\left(\int \sigma_{x,G}^{(n)} h(x) d\xi(x)\right) \subset \overline{G}$, on a

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

$$a\sum_{n=0}^{k}\int \sigma_{x,G}^{(n)}(X)h(x)d\xi(x) \leqq \int (\check{N}_0 + c\varepsilon)*(\varepsilon - \check{\sigma})*\varphi'(y)d\Big(\sum_{n=0}^{k}\int \sigma_{x,G}^{(n)}h(x)d\xi(x)\Big)$$
$$= \int (\check{N}_0 + c\varepsilon)*\varphi'(x)h(x)d\xi(x)$$
$$- \iint (\check{N}_0 + c\varepsilon)*\varphi'(y)d\sigma_{x,G}^{(k+1)}h(x)d\xi(x)$$
$$\leqq \int (\check{N}_0 + c\varepsilon)*\varphi'(x)h(x)d\xi(x)\ .$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty}\int \sigma_{x,G}^{(n)}(X)h(x)d\xi(x) = 0\ .$$

Comme $\mathrm{supp}\Big(\int \sigma_{x,G}^{(n)}h(x)d\xi(x)\Big) \subset \overline{G}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, on voit que (3.7) a lieu. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 5. Dans le présent lemme 9, on peut remplacer

$$\lim_{n\to\infty} N_0*(\sigma)^n = 0 \qquad \text{(vaguement)}$$

au lieu de la condition qu'il existe $\varphi \in C_K^+$ telle que $\check{N}_0*(\varepsilon - \check{\sigma})*\varphi > 0$ sur $\mathrm{supp}(f)$.

Comme $N_0*\sigma_{x,G}^{(n)} \leqq N_0*(\sigma)^n*\varepsilon_x$ dans X, on voit facilement que (3.7) a lieu.

Dès que maintenant, nous considérerons notre théorème principal. Répétons d'abord la définition des noyaux de convolution conditionnellement sous-médians.

DÉFINITION 3. Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau N_0. On dit qu'un noyau de convolution N est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 si, pour tout $t > 0$, $N*\alpha_t$ a un sens, $\lim_{t\to 0}\Big(\dfrac{\alpha_t - \varepsilon}{t}\Big)*N$ a un sens en dehors de l'origine pour la topologie vague et s'il définit une mesure positive en dehors de l'origine.

LEMME 10. *Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt et N un noyau de convolution conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0. Alors pour que $N = 0\,(N_0)$, il faut et il suffit que, pour un voisinage compact V de l'origine quelconque, il existe deux mesures positives $\lambda_{1,V}$*

et $\lambda_{2,V}$ *telle que* $\operatorname{supp}(\lambda_{1,V}) \subset V$ *et*

$$N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V})) = N_0*(\lambda_{1,V} - \lambda_{2,V}) , \tag{3.8}$$

où $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ *est la mesure balayée de* ε *sur* $\mathscr{C}V$ *relativement au noyau* N_0.

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est suffisante. Pour $f \in C_K^+$ quelconque, on choisit $g \in C_K^+$ et un voisinage compact V de l'origine tels que $f \leqq N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V})*g$. Prenons encore $h \in C_K^+$ telle que $N_0*h \geqslant N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}))*g$ sur $\operatorname{supp}(g) + V = \{x + y\,;\, x \in \operatorname{supp}(g), y \in V\}$. Alors on a

$$N_0*(\lambda_{1,V}*g) \leqq N_0*h + N_0*(\lambda_{2,V}*g) \quad \text{sur} \quad \operatorname{supp}(\lambda_{1,V}*g) ,$$

et donc la même inégalité a lieu sur N, d'après le principe de domination pour N_0. Par conséquent $N*f \leqq N_0*h$ sur X, d'où $N = 0\,(N_0)$.

Montrons ensuite que la condition est nécessaire. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé au noyau N_0. Alors on a

$$\lim_{t \to 0} N_0*\alpha_t = \lim_{t \to 0} \int_t^\infty \alpha_t dt = N_0 \qquad \text{(vaguement)} .$$

Soit $f \in C_K^+$ quelconque. Comme $N = 0\,(N_0)$ et $\operatorname{supp}(N_0) \ni 0$, il existe $g \in C_K^+$ telle que $N*f \leqq N_0*g$ sur X. Donc $N*\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ a un sens et, d'après le théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_{t \to 0} \alpha_t*N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}) = N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}) \qquad \text{(vaguement)} .$$

On a donc

$$\begin{aligned} N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}) &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t}\int_0^t \alpha_t dt\right)*N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}) \\ &= \lim_{t \to 0} \left(\frac{\varepsilon - \alpha_t}{t}\right)*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}))*N \qquad \text{(vaguement)} . \end{aligned}$$

Comme, dans $\mathscr{C}V$, $\left(\dfrac{\alpha_t - \varepsilon}{t}\right)*N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}))$ converge vaguement vers une mesure positive lorsque $t \to 0$, on a $\operatorname{supp}((N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}))^+) \subset V$. Posons $\lambda_{1,V} = (N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}))^+$ et $\lambda_{2,V} = (N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V}))^-$; alors celles sont des mesures demandées. En effet, soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante associée au noyau N_0. Comme $N = 0\,(N_0)$, on voit que, pour tout $p > 0$, $N*N_p$ a un sens et

$$N*(N_p*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V})) = N_p*(N*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V})) . \tag{3.9}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

On a $N*(N_p*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))=N*(N_0*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))*(\varepsilon-pN_p)$ et $\lim_{p\to 0} pN_p*N_0=0$ (vaguement), et donc $\lim_{p\to 0} N*(N_p*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))=N*(N_0*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))$ (vaguement). D'après (3.9) et $\mathrm{supp}(\lambda_{1,V})\subset V, N_0*(N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))$ a un sens. Donc, en faisant $p\to 0$ dans (3.9),

$$N*(N_0*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))=N_0*(N*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))=N_0*(\lambda_{1,V}-\lambda_{2,V})\ .$$

La démonstration est ainsi complète.

L'étude du principe transitif de domination et la proposition suivante sont les deux clefs pour notre démonstration du théorème principal.

PROPOSITION 5. *Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt et $N\neq 0$ un noyau de convolution. Alors pour qu'il existe un noyau de convolution de Hunt N' tel que $N*N'=N_0$, il faut et il suffit que, pour toute la constante $c\geqq 0$, $N+cN_0$ satisfasse au principe du balayage relatif à N_0.*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est suffisante. Soit $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts relativement compacts de X telle que $G_1\ni 0, \overline{G_n}\subset G_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n=X$. Pour un nombre $p>0$ quelconque, il existe une mesure positive $\varepsilon'_{p,n}$ portée par $\overline{G_n}$ telle que $(N+pN_0)*\varepsilon'_{p,n}\leqq N_0$ dans X et $(N+pN_0)*\varepsilon'_{p,n}=N_0$ dans G_n. Comme $N+pN_0 \sqsubset N_0$ (cf. la proposition 4) et $\mathrm{supp}(\varepsilon'_{p,n})\subset G_{n+1}$ on a $N_0*\varepsilon'_{p,n}$ $\leqq N_0*\varepsilon'_{p,n+1}\leqq \dfrac{1}{p}N_0$ dans X. Comme $(\varepsilon'_{p,n})_{n=1}^{\infty}$ est vaguement bornée, on peut supposer qu'elle converge vaguement vers la limite N'_p lorsque $n\to\infty$. Soit ε''_m la mesure balayée de ε sur $\mathscr{C}\overline{G_m}$ relativement au noyau N_0; alors $\lim_{m\to\infty} N_0*\varepsilon''_m=0$ (vaguement). Comme, pour, tout $m\geqq 1$, $N_0*\varepsilon''_m*\varepsilon'_{p,n}\leqq \dfrac{1}{p}N_0*\varepsilon''_m$ $(n=1,2,\cdots)$ et

$$\lim_{n\to\infty}(N_0-N_0*\varepsilon''_m)*\varepsilon'_{p,n}=(N_0-N_0*\varepsilon''_m)*N'_p \qquad \text{(vaguement)}\ ,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} N_0*\varepsilon'_{p,n}=N_0*N'_p \qquad \text{(vaguement)}$$

et, pour un nombre $\delta>0$ quelconque et pour $f,g\in C_K^+$ quelconques, il existe un compact F de X et un entier $n_0\geqq 1$ tels que, pour $n\geqq n_0$

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

quelconque, $\int_F \check{N}_0 * f \varepsilon'_{p,n} * g d\xi < \delta$. D'autre part, pour $f \in C_K^+$ quelconque, il existe $g \in C_K^+$ telle que $f \leqq \varepsilon'_{p,1} * g$, et par suite $N * f \leqq N_0 * g$ sur X. Donc on a aussi

$$\lim_{n\to\infty} N * \varepsilon'_{p,n} = N * N'_p \qquad \text{(vaguement)} .$$

Par conséquent, pour $p > 0$ quelconque, il existe un noyau de convolution N'_p tel que $(N + pN_0) * N'_p = N_0$. Pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, on a

$$\begin{aligned} N_0 * N'_q &= (N + pN_0) * N'_p * N'_q = (N_0 + qN_0) * N'_q * N'_p + (p-q) N_0 * N'_p * N'_q \\ &= N_0 * (N'_p + (p-q) N'_p * N'_q) . \end{aligned}$$

L'injectivité de N_0 donne que $N'_p - N'_q = (p-q) N'_p * N'_q$. Comme $N \neq 0$, $\lim_{p \downarrow 0} N'_p$ a un sens. On le désigne par $N' (= N'_0)$. Alors $(N'_p)_{p \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N'. Comme $\lim_{p\to 0} pN'_p = 0$ (vaguement) et, pour tout $p > 0$, $N_0 * (pN'_p) \leqq N_0$, on obtient, de la même manière comme ci-dessus, $\lim_{p\to 0} pN_0 * N'_p = 0$ (vaguement). Par conséquent on a $N * N' = N_0$.

Montrons que N' est injectif. Comme, pour $p > 0$ quelconque, $pN' * (\varepsilon - pN'_p) = pN'_p$, il suffit de montrer que $\lim_{p\to\infty} pN'_p = \varepsilon$ (vaguement). Comme $N_0 * (pN'_p) = N_0 - N * N'_p$ et $\lim_{p\to\infty} N * N'_p = 0$ (vaguement) on a, pour tout le voisinage compact V de l'origine,

$$\lim_{p\to\infty} (N_0 - N_0 * \varepsilon''_{\mathscr{C}V}) * (pN'_p) = (N_0 - N_0 * \varepsilon''_{\mathscr{C}V}) \qquad \text{(vaguement)} ,$$

où $\varepsilon''_{\mathscr{C}V}$ est la mesure balayée de ε sur $\mathscr{C}V$ relativement au noyau N_0. Donc on voit facilement que $\lim_{p\to\infty} pN'_p = \varepsilon$ (vaguement), d'où l'injectivité de N'. Le lemme 4 donne que N' est un noyau de convolution de Hunt.

Montrons que la condition est nécessaire. On désigne aussi par $(N'_p)_{p \geqq 0}$ la résolvante associée au noyau N'. Posons, pour $p > 0$ quelconque, $\tilde{N}_p = pN * N'_p$; alors

$$\tilde{N}_p = pN_0 * (\varepsilon - pN'_p) .$$

Soient μ une mesure positive dans X et G un ouvert relativement compact de X. On désigne par μ' la mesure balayée de μ sur G relativement au noyau N_0 et l'on suppose que la notation $(pN'_p)^{(n)}_{x,G}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ est la même que ci-dessus. Posons, pour un entier $k \geqq 1$ quelconque,

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

$$\tilde{\mu}_p^{(k)} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{k} \int (pN'_p)_{x,G}^{(n)} d\mu'(x)\,;$$

alors $\tilde{\mu}_p^{(k)}$ est une mesure positive portée par $\overline{G}$. D'après le lemme 6, on a

$$\begin{aligned}\tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p^{(k)} &= \sum_{n=0}^{k} \int N_0 * (\varepsilon - pN'_p) * (pN'_p)_{x,G}^{(n)} d\mu'(x) \\ &= \sum_{n=0}^{k} \iint N_0 * (\varepsilon_y - (pN'_p)'_{y,G}) d(pN'_p)_{x,G}^{(n)}(y) d\mu'(x) \\ &= N_0 * \mu' - N_0 * \left(\int (pN'_p)_{x,G}^{(k+1)} d\mu'(x) \right) \leqq N_0 * \mu'\end{aligned}$$

dans G. En rappelant (B.3)' dans le lemme 5, on a

$$\tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p^{(k)} \leqq N_0 * \mu'$$

dans X. Ceci donne que $\sum_{n=0}^{k} \int (pN'_p)_{x,G}^{(n)} d\mu'(x)$ converge vaguement vers la limite $\tilde{\mu}_p$ lorsque $n \to \infty$. Donc $\lim_{n\to\infty} \int (pN'_p)_{x,G}^{(n)} d\mu'(x) = 0$ (vaguement), et par suite

$$\lim_{n\to\infty} N_0 * \left(\int (pN'_p)_{x,G}^{(n)} d\mu'(x) \right) = 0 \qquad \text{(vaguement)}\ ,$$

car $\operatorname{supp}\left(\int (pN'_p)_{x,G}^{(n)} d\mu'(x) \right) \subset \overline{G}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, d'où $\tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p \leqq N_0 * \mu$ dans X et $\tilde{N}_p * \tilde{\mu}_p = N_0 * \mu$ dans G. Comme $pN_0 * N'_p \leqq N_0$ et $\lim_{p\to\infty} pN'_p = \varepsilon$ (vaguement), on a $\lim_{p\to\infty} pN_0 * N'_p = N_0$, et donc $\lim_{p\to\infty} pN * N'_p = N$ (vaguement). Par conséquent, en faisant $p \uparrow +\infty$, on voit qu'il existe une mesure positive μ'' portée par $\overline{G}$ telle que $N * \mu'' \leqq N_0 * \mu$ dans X et $N * \mu'' = N_0 * \mu$ dans G, d'où la condition est nécessaire. La démonstration est ainsi complète.

Montron finalement notre théorème principal.

THÉORÈME 2. *Soient N_0 un noyau de convolution de Hunt et $N \neq 0$ un noyau de convolution. Alors pour qu'il existe un noyau de convolution de Hunt N' tel que $N * N' = N_0$, il faut et il suffit que N soit conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 et que $N = 0\,(N_0)$.*

Démonstration. On cannaît déjà que la condition est nécessaire (cf. [5]), est donc on montrera seulement que la condition est suffisante.

Pour toute la constante $c > 0$, $N + cN_0$ est aussi conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 et l'on a $N + cN_0 = 0\,(N_0)$. Par conséquent, en rappelant le théorème 1 et la présente proposition, on voit qu'il suffit de montrer l'énoncé suivant:

Soient N_0 et N les mêmes que ci-dessus. Si N est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 et si $N = 0\,(N_0)$, alors $N \sqsubset N_0$.

Montrons le présent énoncé. D'après la proposition 3, on peut supposer que $N(\{0\}) > 0$. Donc, en utilisant encore les propositions 2 et 3, il suffit de montrer l'implication suivante: Pour $f, g \in C_K^+$ quelconques,

$$\check{N}*f < \check{N}*g \text{ sur } \mathrm{supp}(f) \Rightarrow \check{N}_0*f \leqq \check{N}_0*g \text{ sur } X\,.$$

On choisit un ouvert relativement compact G de X telle que $\mathrm{supp}(f) \subset G \subset \overline{G} \subset \{x \in X\,;\, \check{N}*f(x) < \check{N}*g(x)\}$ et $\varphi \in C_K^+$ telle que $N*\varphi > 0$ sur $\overline{G}$. Pour un voisinage compact V de l'origine quelconque, on note $\varepsilon'_{\mathscr{C}V}$ la mesure balayée de ε sur $\mathscr{C}V$ relativement au noyau N_0 et $a_V = \int dN_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V})$. Posons

$$\nu_{i,V} = \frac{1}{a_V}\lambda_{i,V} \quad (i = 1, 2) \quad \text{et} \quad \sigma_V = \frac{1}{\int d\nu_{1,V}}\nu_{2,V}\,,$$

où $\lambda_{i,V}$ $(i = 1, 2)$ est la mesure positive obtenue dans le lemme 10. On remarque ici que $N \neq 0$ donne $\lambda_{1,V} \neq 0$. Rappelons que $\mathrm{supp}(\nu_{1,V}) \subset V$ et que $\nu_{2,V}$ converge vaguement vers la mesure positive $\lim\limits_{t \downarrow 0}\left(\dfrac{\alpha_t - \varepsilon}{t}\right)*N$ en dehors de l'origine lorsque $V \downarrow \{0\}$, où $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$. Alors on a

$$\begin{aligned}
N &= \lim_{V \downarrow \{0\}} \frac{1}{a_V} N*(N_0*(\varepsilon - \varepsilon'_{\mathscr{C}V})) = \lim_{V \downarrow \{0\}} N_0*(\nu_{1,V} - \nu_{2,V}) \\
&= \lim_{V \downarrow \{0\}} N_0*\left(\nu_{1,V} - \frac{1}{\int d\nu_{1,V}}\nu_{1,V}*\nu_{2,V}\right) \\
&= \lim_{V \downarrow \{0\}} N_0*\nu_{1,V}*(\varepsilon - \sigma_V) \qquad \text{(vaguement)}\,.
\end{aligned}$$

Donc il existe un voisinage compact V_0 de l'origine symétrique par rapport à l'origine tel que $\mathrm{supp}(f) + V_0 \subset G$ et que, pour un voisinage compact V de l'origine contenu dans V_0 quelconque,

$$\check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}_V) * \check{\nu}_{1,V} * f \leqq \check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}_V) * \check{\nu}_{1,V} * g$$

et

$$\check{N}_0 * (\varepsilon - \check{\sigma}_V) * \check{\nu}_{1,V} * \varphi > 0$$

dans G. D'après le lemme 9, on a $\check{N}_0 * \check{\nu}_{1,V} * f \leqq N_0 * \check{\nu}_{1,V} * g$ sur X. Par conséquent on a

$$\check{N}_0 * f - \check{N}_0 * g = \lim_{V \downarrow \{0\}} \frac{1}{\int d\nu_{1,V}} (\check{N}_0 * \check{\nu}_{1,V} * f - N_0 * \check{\nu}_{1,V} * g) \leqq 0$$

dans X, d'où l'implication demandée. La démonstration est ainsi complète.

Remarque 6. Soient N_0 et N les mêmes que ci-dessus; supposons que N est conditionnellement sous-médian par rapport au noyau N_0 et que $N = 0\,(N_0)$. Si N est absolument continu par rapport à ξ, alors on voit plus facilement que N satisfait au principe du balayage relatif à N_0.

En effet, d'après le théorème d'existence (cf. le théorème 1 dans [6]), on voir que, pour $f \in C_K^+$ quelconque, un compact F de X quelconque et pour une constante $c > 0$ quelconque, il existe $f'_{c,F} \in M_K^+$ portée par F telle que l'on ait $Nf'_{c,F} + cf'_{c,F} \geqq N_0 * f$ ξ-p.p. sur F et $Nf'_{c,F} + cf'_{c,F} = N_0 * f$ ξ-p.p. sur $\{x \in X; f'_{c,F}(x) \neq 0\}$. Désignons aussi par N la densité de N par rapport à ξ. Alors $N * f'_{c,F}$ est finie et continue, et donc $N * f'_{c,F} \leqq N_0 * f$ sur $\mathrm{supp}(f'_{c,F}\xi)$. On peut choisir $h \in C_K^+$ telle que $N_0 * h \geqq 1$ dans un certain voisinage de $\mathrm{supp}(f'_{c,F}\xi)$. Alors, pour tout l'entier $n \geqq 1$, il existe un voisinage ouvert V_n de l'origine tel que, pour un voisinage compact V de l'origine contenu dans V_n quelconque et pour $\varphi \in C_K^+$ vérifiant $\int \varphi d\xi = 1$ et $\mathrm{supp}(\varphi) \subset V_n$ quelconque,

$$\frac{1}{a_V} N * (f'_{c,F} * \varphi) * (N_0 * (\varepsilon - \varepsilon'_{\varphi V})) \leqq N_0 * \left(f + \frac{1}{n} h\right)$$

dans $\mathrm{supp}(f'_{c,F}) + 2V_n$, où $2V_n = V_n + V_n$. Le lemme 10 donne que

$$N_0 * (f'_{c,F} * \varphi) * \nu_{1,V} \leqq N_0 * \left(f + \frac{1}{n} h + (f'_{c,F} * \varphi) * \nu_{2,V}\right)$$

sur $\mathrm{supp}((f'_{c,F} * \varphi) * \nu_{1,V})$, et donc le principe de domination pour N_0 donne

https://doi.org/10.1017/S0027763000017712 Published online by Cambridge University Press

que la même inégalité a lieu sur X, d'où

$$\frac{1}{a_V} N*(f'_{c,F}*\varphi)*(N_0*(\varepsilon-\varepsilon'_{\mathscr{C}V}))\leqq N_0*\left(f+\frac{1}{n}h\right)$$

sur X. En faisant $V\downarrow\{0\}, \varphi\xi\to\varepsilon$ et ensuite $n\uparrow+\infty$, on arrive à $N*f'_{c,F}\leqq N_0*f$ sur X. De la même manière que dans le lemme 2, on voit que N satisfait au principe du balayage relatif à N_0.

Dans ce cas, on obtient, en même temps, que N_0 est aussi absolument continu par rapport à ξ.

Bibliographie

[1] J. Deny: Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 643–667.

[2] M. Itô: Sur le principe de domination pour les noyaux de convolution, Nagoya Math. J., **50** (1973), 149–173.

[3] ——: Sur les cônes convexes de Riesz et les noyaux de convolution complètement sous-harmoniques, ibid., **55** (1974), 111–144.

[4] ——: Sur le principe relatif de domination pour les noyaux de convolution, Hiroshima Math. J., **5** (1975), 293–350.

[5] ——: Sur le cône convexe maximum constitué par des diviseurs d'un noyau de convolution et son application, Ann. Inst. Fourier, **25** (1975), 289–308.

[6] ——: Le principe relatif de domination et le principe transitif de domination pour les noyau-fonctions boréliennes, Hiroshima Math. J., **6** (1976), 207–219.

Département de Mathématiques
Université de Nagoya