Canad. Math. Bull. Vol. 16 (2), 1973

THEOREME DE MÜNTZ POUR LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

PAR
BERNARD H. AUPETIT

1. **Introduction.** Le théorème de Weierstrass affirme que toute fonction réelle continue sur l'intervalle [0, 1] est limite uniforme d'une suite de polynômes (voir [5]). Dans [4], Ch. Müntz généralise ce résultat de la façon suivante.

THÉORÈME. *Soit* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ *une suite strictement croissante et non bornée de nombres réels. Pour que le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions* $1, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots$ *soit dense dans l'ensemble des fonctions réelles continues sur* [0, 1] *il faut et il suffit que la série* $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\alpha_i$ *soit divergente.*

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème: celles de Kaczmarz et Steinhaus, Natanson, Hirschman et Widder, celle de Gelfond utilise une extension des polynômes de Bernstein, celles de Schwartz et Feller [2] utilisent la transformée de Laplace et les produits de Blaschke. Celle de Müntz, qui est la plus simple, se sert de la théorie des séries de Fourier et du calcul de certains déterminants de Gram (voir [1] ou [3]). Le but de cette note est d'étendre ce résultat aux fonctions de plusieurs variables.

2. **Notations.** Soit I un ensemble quelconque, $P=[0,1]^I$ et $(\alpha_i^k)_{k=1,\ldots,\infty}$ une famille indexée par I de suites strictement croissantes non bornées de nombres réels. $C([0, 1])$ et $C(P)$ désignent respectivement les fonctions réelles continues sur [0, 1] et P. Les x_i désignent les variables et on appelle polynôme généralisé une combinaison linéaire finie d'expressions de la forme $x_{i_1}^{\beta_1} \cdots x_{i_n}^{\beta_n}$ où $i_1, \ldots, i_n$ sont des éléments en nombre fini de I et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont égaux à 0 ou sont respectivement des termes des suites $(\alpha_{i_1}^k) \cdots (\alpha_{i_n}^k)$.

3. THÉORÈME. *Pour que le sous-espace vectoriel des polynômes généralisés soit dense dans* $C(P)$, *il faut et il suffit que toutes les séries* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\alpha_i^k$ *soient divergentes.*

Nous aurons besoin, pour prouver ce résultat, du lemme suivant:

Reçu par les rédacteurs le 18 mars 1971; version revisée reçue le 24 novembre 1971.

LEMME (Dieudonné). *Le sous-espace vectoriel de $C(P)$ engendré par les produits finis de la forme $f_1(x_{i_1})\cdot f_2(x_{i_2})\cdots f_n(x_{i_n})$, où les f_i appartiennent à $C([0,1])$, est dense dans $C(P)$.*

C'est un corollaire immédiat du théorème de Stone (voir [5]).

Démonstration du théorème. Pour la condition nécessaire, supposons que l'une des séries converge, par exemple $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\alpha_a^k$ où $a\in I$. Alors le sous-espace vectoriel engendré par $1, x_a^{\alpha_a^1}, x_a^{\alpha_a^2}, \ldots$ n'est pas dense dans $C([0,1])$, donc il existe $h\in C([0,1])$ qui n'est pas approximable par des polynômes généralisés en x_a. Posons $f(x)=h(x_a)$ pour $x\in P$. Quel que soit $\varepsilon>0$ il existe un polynôme généralisé $p(x)$ tel que $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$ quel que soit $x\in P$. En faisant $x_i=0$ pour $i\neq a$, on obtient $|h(x_a)-p^*(x_a)|<\varepsilon$ où $p^*(x_a)$ est un polynôme généralisé en x_a, ce qui est contradictoire. Pour la condition suffisante, supposons que $f\in C(P)$ et que $\varepsilon>0$. D'après le lemme, il existe un nombre fini de $i_1,\ldots,i_n\in I$ et d'éléments de $C([0,1])$ notés $f_1^k\cdots f_n^k$ où k varie de 1 à n tels que:

$$\left|f(x)-\sum_k f_1^k(x_{i_1})\cdots f_n^k(x_{i_n})\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $x\in P$.

D'après le théorème de Müntz, pour chaque f_l^k il existe un polynôme généralisé en x_{i_l} noté $p_l^k(x_{i_l})$ tel que:

$$|f_l^k(x_{i_l})-p_l^k(x_{i_l})|\leq\frac{\varepsilon}{2n^2\left(\operatorname*{Max}_{k,l}\|f_l^k\|+1\right)^{n-1}}$$

d'où:

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon \quad \text{où} \quad p(x)=\sum_k p_1^k(x_{i_1})\cdots p_n^k(x_{i_n}).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. N. I. Achiezer, *Theory of approximation*, Ungar, New York (1956), 43–46.

2. William Feller, *On Müntz' theorem and completely monotone functions*, Amer. Math. Monthly, **75** (1968), 342–350.

3. Casper Goffman and George Pedrick, *First course in functional analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965), 181–182.

4. Ch. H. Müntz, *Über den Approximationssatz von Weierstrass*, Math. Abhandlungen H. A. Schwarz zu seinem 50. Doktorjubiläum gewidmet Berlin (1914), 303–312.

5. Marshall H. Stone, *A generalized Weierstrass approximation theorem*, Mathematical Association of America, M.A.A. Studies in Mathematics, Vol. **1**, 30–87.

UNIVERSITÉ LAVAL,
QUÉBEC, QUÉBEC