COMPOSITIO MATHEMATICA

Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire

Yang Cao

Compositio Math. **154** (2018), 773–819.

doi:10.1112/S0010437X17007709

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY
EST. 1865

Compositio Math. 154 (2018) 773–819
doi:10.1112/S0010437X17007709

Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire

Yang Cao

Abstract

Let G be a connected linear algebraic group over a number field k. Let $U \hookrightarrow X$ be a G-equivariant open embedding of a G-homogeneous space U with connected stabilizers into a smooth G-variety X. We prove that X satisfies strong approximation with Brauer–Manin condition off a set S of places of k under either of the following hypotheses:

(i) S is the set of archimedean places;

(ii) S is a non-empty finite set and $\bar{k}^\times = \bar{k}[X]^\times$.

The proof builds upon the case $X = U$, which has been the object of several works.

Résumé

Soit G un groupe linéaire connexe sur un corps de nombres k. Soit $U \hookrightarrow X$ une inclusion G-équivariante d'un G-espace homogène U à stabilisateurs connexes dans une G-variété lisse X. On montre que X satisfait l'approximation forte avec condition de Brauer–Manin hors d'un ensemble S de places de k dans chacun des cas suivants :

(i) S est l'ensemble des places archimédiennes ;

(ii) S est un ensemble fini non vide quelconque, et $\bar{k}^\times = \bar{k}[X]^\times$.

La démonstration utilise le cas $X = U$, qui a fait l'objet de divers travaux.

Table des matières

Received 16 January 2017, accepted in final form 10 October 2017, published online 8 March 2018.
2010 Mathematics Subject Classification 11G35, 14G05, 14G25, 20G35 (primary).
Keywords: approximation forte, cohomologie étale, obstruction de Brauer–Manin, espace homogène.

1. Introduction

Soit k un corps de nombres. On note Ω_k l'ensemble des places de k et ∞_k l'ensemble des places archimédiennes de k. Notons $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k et $\mathcal{O}_S$ l'anneau des S-entiers de k pour un sous-ensemble fini S de Ω_k contenant ∞_k. Pour chaque $v \in \Omega_k$, on note k_v le complété de k en v et $\mathcal{O}_v \subset k_v$ l'anneau des entiers ($\mathcal{O}_v = k_v$ pour $v \in \infty_k$). Soit $\mathbf{A}_k$ l'anneau des adèles de k. Pour un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$, soit $\mathbf{A}_k^S$ l'anneau des adèles hors de S et $k_S := \prod_{v \in S} k_v$. Par exemple, soit $\mathbf{A}_k^\infty$ l'anneau des adèles finis et $k_\infty := \prod_{v \in \infty_k} k_v$.

On rappelle les définitions de [CX09], [CX13, § 2], [BD13] et [CX15].

Soit X une k-variété algébrique et $\mathrm{Br}(X)$ son groupe de Brauer. Pour B sous-ensemble de $\mathrm{Br}(X)$, on définit

$$X(\mathbf{A}_k)^B = \left\{(x_v)_{v\in\Omega_k} \in X(\mathbf{A}_k) : \sum_{v\in\Omega_k} \mathrm{inv}_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ \forall \xi \in B\right\}.$$

Comme l'a remarqué Manin, la théorie du corps de classes donne $X(k) \subseteq X(\mathbf{A}_k)^B$.

Définissons

$$X(\mathbf{A}_k)_\bullet = \pi_0(X(k_\infty)) \times X(\mathbf{A}_k^\infty) \tag{1.1}$$

la projection, où $\pi_0(X(k_\infty))$ est l'ensemble des composantes connexes de $X(k_\infty)$.

Puisque, pour tout $v \in \infty_k$, chaque élément de $\mathrm{Br}(X)$ prend une valeur constante sur chaque composante connexe de $\pi_0(X(k_v))$, pour tout sous-ensemble $B \subset \mathrm{Br}(X)$ on peut définir :

$$X(\mathbf{A}_k)_\bullet^B = \left\{(x_v)_{v\in\Omega_k} \in X(\mathbf{A}_k)_\bullet : \sum_{v\in\Omega_k} \mathrm{inv}_v(\xi(x_v)) = 0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ \forall \xi \in B\right\}.$$

Définition 1.1. [CX09, CX13] Soient k un corps de nombres, X une k-variété et $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini. Notons $Pr^S : X(\mathbf{A}_k) \to X(\mathbf{A}_k^S)$ la projection.

(1) Si $X(k)$ est dense dans $Pr^S(X(\mathbf{A}_k))$, on dit que X satisfait *l'approximation forte* hors de S.
(2) Si $X(k)$ est dense dans $Pr^S(X(\mathbf{A}_k)^B)$ pour un sous-ensemble B de $\mathrm{Br}(X)$, on dit que X satisfait *l'approximation forte par rapport à* B hors de S. On dit aussi alors que X satisfait l'approximation forte de Brauer–Manin par rapport à B hors de S.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Si $S = \infty_k$, on peut s'intéresser à une question un peu plus précise tenant compte des composantes connexes réelles : $X(k)$ est-il dense dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^B$ pour un sous-groupe $B \subset \mathrm{Br}(X)$?

Pour les espaces homogènes de groupes algébriques connexes, ces questions ont fait ces dernières années l'objet d'une série de travaux [CX09, Har08, BD13] prolongeant des travaux classiques.

Lorsqu'on cherche à étendre la classe des variétés satisfaisant les propriétés ci-dessus, il est naturel de poser les questions 1.2 et 1.3 suivantes.

Question 1.2. Soient X une k-variété lisse géométriquement intègre et U un ouvert de X. Si $U(k)$ est dense dans $U(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}(U)}$, sous quelles conditions peut-on établir que $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}(X)}$?

Le cas qui nous intéresse est celui où G est un groupe linéaire connexe et U est un G-espace homogène. En général, l'inclusion $\bar{k}^\times \subset \bar{k}[U]^\times$ n'est pas un isomorphisme et, dans ce cas, il existe des exemples pour lesquels U ne satisfait pas l'approximation forte par rapport à $\mathrm{Br}(U)$ hors d'un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$ non vide donné (par exemple $U \cong \mathbb{G}_m$, $k = \mathbb{Q}$ et $S = \{v_0\}$ avec v_0 une place non archimédienne).

Question 1.3. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide. Soit G un groupe linéaire connexe. Soient X une G-variété lisse géométriquement intègre et U un G-ouvert de X équipé d'un G-morphisme $X \to Z$ dans un G-espace homogène Z. Si $\bar{k}[X]^\times = \bar{k}^\times$ et toute fibre de U au-dessus d'un k-point de Z satisfait l'approximation forte hors de S, sous quelles conditions peut-on établir l'approximation forte pour X par rapport à $\mathrm{Br}(X)$ hors de S ?

Le principal résultat de cet article est le théorème suivant.

Théorème 1.4 (Cf. Théorème 7.6). *Soit G un groupe linéaire connexe sur un corps de nombres k, et soit X une G-variété lisse géométriquement intègre sur k. Supposons qu'il existe un G-ouvert $U \subset X$ tel que $U \cong G/G_0$, où $G_0 \subset G$ est un sous-groupe fermé connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide. Supposons que $G'(k_S)$ est non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc} (cf. (1.4)).*

(1) *Si $S \subset \infty_k$, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}(X)}$.*
(2) *Si $\bar{k}^\times = \bar{k}[X]^\times$, alors X satisfait l'approximation forte de Brauer–Manin par rapport à $\mathrm{Br}(X)$ hors de S.*

Ce théorème est un cas spécial d'un résultat plus général mais d'énoncé technique (Théorème 7.6).

Le théorème 1.4(1) avait déjà été établi dans les cas suivants :

(i) X est une variété torique, c'est-à-dire que G est un tore (Xu et l'auteur [CX13]) ;
(ii) X est une variété groupique, c'est-à-dire que G est un groupe linéaire connexe et que $G_0 = 1$ (Xu et l'auteur [CX15]) ;
(iii) X est comme dans le théorème, avec G_0 résoluble connexe (résultat tout récent de Wei [Wei16]).

Au § 4, on donne une démonstration totalement nouvelle du théorème 1.4(1), laquelle est plus simple que celles des trois travaux ci-dessus.

Le théorème 1.4(2) avait déjà été établi dans les cas suivants :

(iv) X est une variété torique (Wei [Wei14]) ;
(v) X est une variété groupique (Xu et l'auteur [CX15]).

Les démonstrations du théorème 1.4, comme celle de [CX15], reposent d'une part sur des constructions géométriques sur un corps quelconque, d'autre part sur les théorèmes d'approximation forte avec condition de Brauer–Manin pour les espaces homogènes établis dans [CX09, Har08, BD13]. Les constructions géométriques du présent article s'inspirent de celles de [CX15] et la partie arithmétique du présent article utilise une généralisation de [CDX16] (cf. § 5).

Dans les quatre articles cités, on a la conclusion plus précise : dans les énoncés, on peut remplacer $\mathrm{Br}(X)$ par le sous-groupe 'algébrique' $\mathrm{Br}_1(X) \subset \mathrm{Br}(X)$, dont la définition est rappelée ci-dessous. Dans le cadre général où nous nous plaçons, il faut utiliser tout le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$. L'idée clé est la notion de sous-groupe de Brauer invariant (cf. § 3), qui généralise [BD13, § 1.2].

Soit G un k-groupe linéaire connexe. Le plan de l'article est le suivant :

$$\left(\begin{tikzcd} & \S\,2.3 \arrow[d, Rightarrow] \arrow[rrd, Rightarrow] & \subset & \S\,2 \arrow[rr, Rightarrow] & & \S\,6 \\ \S\,4 & \S\,3 \arrow[l, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[rrrru, Rightarrow] & & \S\,5 & \supset & \S\,5.1 \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}\right) \Rightarrow \S\,7$$

La section 2 est consacrée à divers préliminaires géométriques, notamment sur les G-variétés et leurs torseurs sous un tore ou un groupe de type multiplicatif. Au § 2.3, on étudie les torseurs sous un groupe de type multiplicatif sur une G-variété. On montre que tout tel torseur peut être muni canoniquement d'une action d'un groupe linéaire H qui s'envoie sur G (Théorème 2.7). Pour cela, on utilise un théorème de Colliot-Thélène [Col08, Thm. 5.6] sur les torseurs au-dessus d'un groupe linéaire connexe.

Au § 3, on définit la notion de sous-groupe de Brauer G-invariant $\mathrm{Br}_G(X)$ d'une G-variété lisse (cf. Définition 3.1). On donne des caractérisations équivalentes sur les sous-groupes de $\mathrm{Br}_G(X)$ (Proposition 3.4). Ensuite, on définit la notion d'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 3.8) et on généralise la suite exacte de Sansuc (cf. (3.6)). On étudie la propriété de $\mathrm{Br}_G(X)$ par rapport au passage à la fibre d'un G-morphisme vers un tore (Proposition 3.13). On généralise la notion de G-espace homogène à stabilisateur géométrique connexe et on définit la notion de pseudo G-espace homogène (Définition 3.15) qui sera utilisée aux §§ 4 et 6.

La section 4 est consacrée à l'approximation forte hors des places archimédiennes. On établit le théorème 4.2 sur l'approximation d'un point adélique de X satisfaisant une condition de Brauer–Manin par un tel point situé sur U. Comme conséquence, on répond à la question 1.2 (Corollaire 4.5) dans ce cas. Ceci donne le théorème 1.4(1).

Au § 5, en utilisant la notion de sous-groupe G-invariant du groupe de Brauer, on combine la suite exacte (3.6) et la méthode de [CDX16], et on généralise [CDX16, Thm. 1.2]. On établit un théorème de descente pour un torseur sous un groupe linéaire connexe quelconque (Théorème 5.9). Comme conséquence, on établit une formule sur les points adéliques d'un certain G-espace homogène satisfaisant une condition de Brauer–Manin (Corollaire 5.13).

Au § 6, pour une G-variété X munie d'un G-ouvert U équipé d'un G-morphisme vers une G-variété Z, on considère l'approximation d'un point adélique de X satisfaisant une condition de Brauer–Manin par un tel point situé dans la fibre au-dessus d'un point rationnel de Z (Question 6.1). Pour répondre à la question 6.1, on généralise [CX15, Prop. 3.6] et on établit au § 6.1 un théorème plus fin sur l'approximation forte d'un espace affine (Théorème 6.2). Ensuite, on combine ce théorème et l'étude du sous-groupe de Brauer G-invariant (§ 3) avec la méthode de fibration de Colliot-Thélène et Harari [CH16] et les constructions géométriques de [CX15], et on répond à la question 6.1 dans le cas où Z est un certain tore (Théorèmes 6.7 et 6.9). Dans le cas où Z est un pseudo G-espace homogène, on résoud la question 6.1 (Théorème 6.11) à l'aide de tous les résultats ci-dessus (sauf ceux du § 4).

Au § 7, en utilisant la descente (§ 5), on établit d'abord un résultat (Proposition 7.4) sur l'approximation forte pour les G-espaces homogènes à stabilisateur géométrique connexe, ce qui généralise un résultat de Borovoi et Demarche [BD13, Thm. 1.4]. Ensuite, on combine ce résultat avec les résultats des § 4 et § 6, et on établit le théorème général (Théorème 7.6) sur l'approximation forte d'une G-variété munie d'un G-ouvert fibré sur un certain G-espace homogène. Le théorème 1.4 est un cas particulier du théorème 7.6.

Conventions et notations. Soit k un corps quelconque de caractéristique 0. On note $\overline{k}$ une clôture algébrique et $\Gamma_k := \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

Tous les groupes de cohomologie sont des groupes de cohomologie étale. Soit X un schéma intègre. On note η_X le point générique de X.

Une k-variété X est un k-schéma séparé de type fini. Pour X une telle variété, on note $k[X]$ son anneau des fonctions globales, $k[X]^\times$ son groupe des fonctions inversibles, $\mathrm{Pic}(X) := H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Picard et $\mathrm{Br}(X) := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ son groupe de Brauer. Notons

$$\mathrm{Br}_1(X) := \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_{\bar{k}})] \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}_a(X) := \mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k).$$

Le groupe $\mathrm{Br}_1(X)$ est le sous-groupe 'algébrique' du groupe de Brauer de X. Si X est intègre, on note $k(X)$ son corps des fonctions rationnelles.

Pour tout sous-groupe B de $\mathrm{Br}(X)$ (ou de $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k))$), notons

$$B^D := \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

le groupe des homomorphismes. On munit B de la topologie discrète et B^D de la topologie compacte-ouverte.

On note X_{sing} le lieu singulier de X, et pour un sous-ensemble fermé $D \subset X$, on note D_{sing} le lieu singulier de D comme sous-variété fermée réduite.

Un k-groupe algébrique G est une k-variété qui est un k-schéma en groupes. On note e_G l'unité de G et G^* le groupe des caractères de $G_{\bar{k}}$. C'est un module galoisien de type fini. Si G est connexe, on note

$$\mathrm{Br}_e(G) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_1(G) \xrightarrow{e_G^*} \mathrm{Br}(k)) \cong \mathrm{Br}_a(G). \tag{1.3}$$

Soit G un k-groupe linéaire connexe. On note G^{tor} son quotient torique maximal, G^u son radical unipotent, $G^{\text{red}} := G/G^u$ son quotient réductif maximal, $G^{\text{ssu}} := \mathrm{Ker}(G \to G^{\text{tor}})$, $G^{\text{ss}} := G^{\text{ssu}}/G^u$ et G^{sc} le revêtement simplement connexe du groupe semi-simple G^{ss}. Alors on a $G^* = (G^{\text{tor}})^*$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& G^u \arrow[r, hook] & G^{\text{ssu}} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \arrow[d, two heads] & \\
& G^{\text{sc}} \arrow[r, two heads] & G^{\text{ss}} \arrow[r, hook] & G^{\text{red}} \arrow[r, two heads] & G^{\text{tor}}
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Soit G un k-groupe algébrique. Une *G-variété* (X, ρ) (ou X) est une k-variété X munie d'une action à gauche $G \times_k X \xrightarrow{\rho} X$. Un ouvert $U \subset X$ est un *G-ouvert* si U est invariant

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

sous l'action de G. Un k-morphisme de G-variétés est appelé *G-morphisme* s'il est compatible avec l'action de G. Sauf mention explicite du contraire, un G-torseur est un G-torseur à gauche.

Soit G un k-groupe algébrique connexe et X une G-variété lisse géométriquement intègre. Notons $\mathrm{Br}_G(X)$ *le sous-groupe de Brauer G-invariant* (cf. Définition 3.1). Dans le cas où $X \cong G/G_0$ avec G linéaire et $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe, Borovoi et Demarche ont défini $\mathrm{Br}_1(X, G) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(G_{\bar{k}}))$ [BD13, § 1.2] En fait, on a (Proposition 3.9) : $\mathrm{Br}_G(X) \cong \mathrm{Br}_1(X, G)$.

Soit T un tore. *Une variété torique* $(T \hookrightarrow X)$ est une T-variété lisse intègre X munie d'une immersion ouverte fixée $T \hookrightarrow X$ de T-variétés. Pour une k-algèbre finie séparable K, on a une variété torique canonique : $(\mathrm{Res}_{K/k}\, \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{Res}_{K/k}\, \mathbb{A}^1)$.

Soit k un corps de nombres. Soit X une k-variété. On note $X(\mathbf{A}_k)$ l'ensemble des points adéliques de X et on note $X(\mathbf{A}_k)_\bullet$ comme en (1.1). Soit G un k-groupe algébrique. On note $G(k_\infty)^+$ la composante connexe de l'identité de $G(k_\infty) := \prod_{v \in \infty_k} G(k_v)$.

2. Préliminaires sur les G-variétés et les torseurs

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété. Dans [CX15], le résultat de structure géométrique est [CX15, Prop. 3.12]. On en donne une généralisation (Propositions 2.2 et 2.3). Dans [CS87b, Lem. 1.6.2], Colliot-Thélène et Sansuc ont étudié la structure des torseurs $Y \to X$ sous un tore et obtenu la suite exacte (2.2). On précise ici les morphismes de la suite exacte (2.2) (Proposition 2.5). Colliot-Thélène [Col08, Thm. 5.6] a étudié la structure des torseurs $Y \to X$ sous un groupe de type mutiplicatif lorque la base X est un groupe linéaire connexe. On considère ici le cas plus général des torseurs sur une variété X munie d'une action d'un groupe G. On établit un théorème général (Théorème 2.7) sur la structure de ces torseurs.

2.1 Préliminaires sur les G-variétés

On rappelle un résultat pour les variétés toriques lisses [CX13, Prop. 2.10].

LEMME 2.1. *Soient T un tore et $(T \hookrightarrow Z)$ une variété torique lisse. Soit $Z_1 := Z \backslash [(Z \backslash T)_{\mathrm{sing}}]$. Alors $(T \hookrightarrow Z_1)$ est une variété torique,* $\mathrm{codim}(Z \backslash Z_1, Z) \geqslant 2$ *et chaque $T_{\bar{k}}$-orbite de $(Z_1 \backslash T)_{\bar{k}}$ est de codimension 1 et son stabilisateur géométrique est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,\bar{k}}$.*

Démonstration. Puisque $(Z \backslash T)_{\mathrm{sing}}$ est T-invariant et $\dim((Z \backslash T)_{\mathrm{sing}}) < \dim(Z \backslash T)$, la variété $(T \hookrightarrow Z_1)$ est une variété torique et $\mathrm{codim}(Z \backslash Z_1, Z) \geqslant 2$.

Supposons que $k = \bar{k}$. Dans ce cas, toutes les variétés toriques lisses de dimension d ont un recouvrement par des variétés toriques $(\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{G}_m^i \times \mathbb{A}^{n-i})_i$ (cf. [CX13, Lem. 2.1]), et donc Z_1 admet un recouvrement par des variétés toriques $\mathbb{G}_m^{\dim(Z)-1} \times \mathbb{A}^1$ et $\mathbb{G}_m^{\dim(Z)}$. Le résultat en découle. □

PROPOSITION 2.2. *Soient $T \subset Z_1 \subset Z$ comme dans le lemme 2.1. Soit G un groupe linéaire connexe muni d'un homomorphisme surjectif $G \xrightarrow{\varphi} T$ de noyau connexe. Soit X une G-variété lisse géométriquement intègre munie d'un G-morphisme dominant $X \xrightarrow{f} Z$. Soit U un G-ouvert de X tel que $f(U) \subset T$. On a :*

(1) *le morphisme $f^{-1}(Z_1) \xrightarrow{f|_{Z_1}} Z_1$ est plat ;*

(2) *si f induit un isomorphisme $\mathrm{Div}_{Z_{\bar{k}}\backslash T_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}}) \xrightarrow{f^*_{\mathrm{Div}}} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$, alors il existe un G-ouvert X_1 de X tel que $f(X_1) \subset Z_1$, $X_1 \cap f^{-1}(T) = U$, $\mathrm{codim}(X\backslash X_1, X) \geqslant 2$ et $X_1 \xrightarrow{f|_{X_1}} Z_1$ soit lisse, surjectif à fibres géométriquement intègres.*

Démonstration. Par le lemme 2.1, Z_1 est T-invariant, $\mathrm{codim}(Z\backslash Z_1, Z) \geqslant 2$ et $(Z_1\backslash T)_{\bar{k}} = \coprod_i F_i$, où F_i est $T_{\bar{k}}$-orbite de codimension 1. Donc $f^{-1}(Z_1)$ et $\overline{f^{-1}(T)\backslash U} \subset X$ sont G-invariants.

Pour (1), on peut supposer que $X = f^{-1}(Z_1)$ et $k = \bar{k}$. Puisque Z_1 est lisse, X est intègre et f est dominant, il existe un ouvert $V \subset Z_1$ tel que $\mathrm{codim}(Z_1\backslash V, Z_1) \geqslant 2$ et $f^{-1}(V) \to V$ soit plat. Donc pour chaque i, $V \cap F_i \neq \emptyset$. En utilisant l'action de G, on voit que $f|_{Z_1}$ est plat.

Pour (2), puisque f^*_{Div} est un isomorphisme, on a

$$\mathrm{codim}(\overline{f^{-1}(T)\backslash U}, X) \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{codim}(f^{-1}(Z\backslash Z_1), X) \geqslant 2.$$

On note $X_2 := f^{-1}(Z_1)\backslash\overline{f^{-1}(T)\backslash U}$ et $X_3 := X_2\backslash(X_2\backslash U)_{\mathrm{sing}}$. Alors $(X_3\backslash U) = D\coprod E$ avec $\mathrm{codim}(E, X_3) \geqslant 2$ et toutes les composantes connexes de D sont de dimension $\dim(X) - 1$. On note $X_1 := X_3\backslash E$. Alors X_1 est G-invariant, $f(X_1) \subset Z_1$, $X_1 \cap f^{-1}(T) = U$, $\mathrm{codim}(X\backslash X_1, X) \geqslant 2$ et chaque composante connexe de $(X_1\backslash U)_{\bar{k}}$ est lisse, intègre de dimension $\dim(X) - 1$.

Puisque f^*_{Div} est un isomorphisme, $(X_1\backslash U)_{\bar{k}} \cong \coprod_i D_i$ avec $D_i = f^{-1}(F_i) \cap X_1$. Alors chaque D_i est une $G_{\bar{k}}$-variété lisse intègre de dimension $\dim(X) - 1$. Puisque $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est connexe, le stabilisateur de F_i comme $G_{\bar{k}}$-variété est connexe. Par [CX15, Prop. 2.2], les morphismes $U \to T$ et $D_i \to F_i$ sont lisses surjectifs à fibres géométriquement intègres. Le résultat en découle. □

Proposition 2.3. *Soient T et T_0 deux tores avec T_0 quasi-trivial. Soient X une variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un ouvert muni d'un morphisme $U \xrightarrow{f} T_0 \times T$. Supposons que la composition*

$$\Lambda :\ T_0^* \xrightarrow{p_1^*} T_0^* \times T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[U]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_X} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$$

est un isomorphisme de modules galoisiens.

(1) *Alors il existe un homomorphisme $T_0 \xrightarrow{\phi} T$ et une variété torique $(T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l)$ tels que :*

  (a) *il existe une k-algèbre finie séparable K et un isomorphisme de variétés toriques :*

$$(T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l) \cong (\mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{A}^1_K); \tag{2.1}$$

  (b) *si l'on note*

$$T_0 \times T \xrightarrow{\widetilde{\phi}} T_0 \times T :\ (t_0, t) \mapsto (t_0, t\cdot\phi(t_0)^{-1}),$$

  alors le morphisme $\widetilde{\phi} \circ f$ peut être étendu à un unique morphisme $X \xrightarrow{f'} \mathbb{A}^l \times T$;

  (c) *on a un isomorphisme $f'^* : \mathrm{Div}_{(\mathbb{A}^l\times T)_{\bar{k}}\backslash(T_0\times T)_{\bar{k}}}((\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$.*

(2) *Soit G un groupe linéaire muni d'un homomorphisme $G \xrightarrow{\varphi} T_0 \times T$. Supposons que X est une G-variété, $U \subset X$ est un G-ouvert et f est un G-morphisme. Alors le morphisme f' est un G-morphisme, où l'action de G sur $\mathbb{A}^l \times T$ est induite par $\widetilde{\phi} \circ \varphi$.*

Démonstration. Soient $\{D_i\}_{i=1}^l$ les composantes irréductibles de $(X\backslash U)_{\bar{k}}$ dont la dimension est $\dim(X) - 1$. Alors $\mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \cong \bigoplus_i \mathbb{Z}\cdot[D_i]$. Puisque Λ est un isomorphisme, il existe une base

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

$\{x_i\}$ de T_0^* telle que $\Lambda(x_i) = D_i$. Puisque $\bar{k}[T_0]^\times = \bar{k}^\times \oplus T_0^*$, on peut supposer que $x_i \in \bar{k}[T_0]^\times$ et $\{x_i\}_{i=1}^l$ est globalement $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-invariant. Soit K la k-algèbre finie séparable qui correspond au $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-ensemble $\{x_i\}_{i=1}^l$. Alors $T_0 \cong \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_{m,K}$, et l'immersion ouverte

$$T_{0,\bar{k}} \cong \mathrm{Spec}\,\bar{k}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_l, x_l^{-1}] \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\bar{k}[x_1, \ldots, x_l] \cong \mathbb{A}^l_{\bar{k}} \cong (\mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{A}^1_K)_{\bar{k}}$$

est exactement l'immersion ouverte $(\mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_{m,K} \hookrightarrow \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{A}^1_K)_{\bar{k}}$. Puisque $\mathbb{A}^l \cong \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{A}^1_K$, on obtient canoniquement une variété torique $T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l$.

Notons $T_{\bar{k}} \cong \mathrm{Spec}\,\bar{k}[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}]$ et donc

$$(\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}} \cong \mathrm{Spec}\,\bar{k}[x_1, \ldots, x_l, t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}].$$

Soit $T_0 \xrightarrow{\phi} T$ l'homomorphisme correspondant à la composition

$$\phi^* : T^* \xrightarrow{p_2^*} T_0^* \times T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[U]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_X} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \underset{\cong}{\xrightarrow{\Lambda^{-1}}} T_0^*.$$

Puisque l'homomorphisme $T_0^* \times T^* \xrightarrow{\widetilde{\phi}^*} T_0^* \times T^*$ est défini par $(t_0, t) \mapsto (t_0 - \phi^*(t), t)$, on a

$$(\mathrm{div}_X \circ f^* \circ \widetilde{\phi}^*)(x_i) = (\mathrm{div}_X \circ f^*)(x_i) = \Lambda(x_i) = D_i$$

et

$$(\mathrm{div}_X \circ f^* \circ \widetilde{\phi}^*)(t_i) = ((\mathrm{div}_X \circ f^*) - (\mathrm{div}_X \circ f^* \circ p_1^* \circ \phi^*))(t_i) = ((\mathrm{div}_X \circ f^*) - (\Lambda \circ \phi^*))(t_i) = 0.$$

Puisque X est lisse, et donc normale, on a

$$(\widetilde{\phi} \circ f)^*(\bar{k}[\mathbb{A}^l \times T]) \subset \bar{k}[X] \quad \text{et donc } (\widetilde{\phi} \circ f)^*(k[\mathbb{A}^l \times T]) \subset k[X].$$

Alors $\widetilde{\phi} \circ f$ s'étend en un morphisme $X \xrightarrow{f'} \mathbb{A}^l \times T$. Un tel morphisme f' est unique [Har77, II. Exer. 4.2].

Pour (c), puisque dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T_0^* \arrow[r, "p_1^*"] \arrow[d, "="] & T_0^* \times T^* \arrow[r, "="] \arrow[d] & \bar{k}[T_0 \times T]^\times/\bar{k}^\times \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "(\widetilde{\phi}\circ f)^*"] & \mathrm{Div}_{(\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}} \setminus (T_0 \times T)_{\bar{k}}}((\mathbb{A}^l \times T)_{\bar{k}}) \arrow[d, "(f')^*"] \\
T_0^* \arrow[r, "p_1^*"] & T_0^* \times T^* \arrow[r, "(\widetilde{\phi}\circ f)^*"] & \bar{k}[U]^\times/\bar{k}^\times \arrow[r, "\mathrm{div}_X"] & \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})
\end{tikzcd}$$

les compositions horizontales sont des isomorphismes, $(f')^*$ est un isomorphisme.

Pour (2), puisque le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \times U \arrow[r, hook] & G \times X \arrow[r, "(\widetilde{\phi}\circ\varphi, f')"] \arrow[d, "\rho_X"] & (T_0 \times T) \times (\mathbb{A}^l \times T) \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "f'"] & \mathbb{A}^l \times T
\end{tikzcd}$$

est commutatif en $G \times U$, ce diagramme est commutatif et f' est un G-morphisme. $\square$

2.2 Trivialisation d'un torseur

Les torseurs sous un tore ou sous un groupe de type multiplicatif sont étudiés par Colliot-Thélène et Sansuc [CS87b]. Soit T un tore. Soient X une variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un ouvert. Par [CS87b, Lem. 1.6.2], on a une suite exacte canonique :

$$H^0(U,T) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \xrightarrow{\Psi} H^1(X,T) \longrightarrow H^1(U,T), \tag{2.2}$$

et pour chaque $\chi \in H^0(U,T) = \mathrm{Mor}(U,T)$, on a $\Phi(\chi) : T^* \xrightarrow{\chi^*} \bar{k}[U]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_X} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$.

Pour un T-torseur $Y \xrightarrow{p} X$ tel que $Y|_U$ soit trivial, on note $V := Y \times_X U$ et $\mathrm{Triv}_U(V,T)$ l'ensemble des trivialisations $\tau : V \xrightarrow{\sim} T \times U$ (un T-isomorphisme au-dessus de U). On a une application canonique

$$\mathrm{Triv}_U(V,T) \xrightarrow{\Upsilon} \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \tag{2.3}$$

définie par : pour chaque $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$, le morphisme $\Upsilon(\tau)$ est la composition :

$$T^* \xrightarrow{p_1^*} \bar{k}[T\times U]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\tau^*} \bar{k}[V]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_Y} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}}\setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}}) \xrightarrow{(p^*)^{-1}} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}),$$

où $\mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}}\setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}})$ est un isomorphisme par [Col08, Lem. B.1]. On a aussi une application canonique

$$H^0(U,T) \times \mathrm{Triv}_U(V,T) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{Triv}_U(V,T) : (\chi,\tau) \mapsto \widehat{\chi}\circ\tau \tag{2.4}$$

où $T\times U \xrightarrow{\widehat{\chi}} T \times U : (t,u) \mapsto (t+\chi(u),u)$.

Lemme 2.4. *L'application Θ induit une action transitive de $H^0(U,T)$ sur $\mathrm{Triv}_U(V,T)$, et pour chaque $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$, $\chi \in H^0(U,T)$, on a $\Upsilon(\Theta(\chi,\tau)) = \Phi(\chi) + \Upsilon(\tau)$.*

Démonstration. Pour $\chi_1,\chi_2 \in H^0(U,T)$, on a $\widehat{\chi_1+\chi_2} = \widehat{\chi_2}\circ\widehat{\chi_1}$, et donc Θ est une action.

Notons $T \times U \xrightarrow{p_1} T$. Pour deux trivialisations $\tau_1,\tau_2 \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$, le morphisme $\tau_2\circ\tau_1^{-1}$ est un T-morphisme au-dessus de U, i.e. pour chaque $t \in T$ et $u \in U$, on a

$$(\tau_2\circ\tau_1^{-1})(t,u) = ((p_1\circ\tau_2\circ\tau_1^{-1})(t,u),u) = (t + (p_1\circ\tau_2\circ\tau_1^{-1})(e_T,u),u).$$

Notons $\chi := (p_1\circ\tau_2\circ\tau_1^{-1})(e_T,-) \in H^0(U,T)$, alors $\tau_2 = \widehat{\chi}\circ\tau_1$ et donc Θ est transitive.

Notons $T\times U \xrightarrow{p_2} U$. Pour tout $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$ et tout $\chi \in H^0(U,T)$, on a

$$p_1\circ\Theta(\chi,\tau) = p_1\circ\widehat{\chi}\circ\tau = (p_1+\chi\circ p_2)\circ\tau = p_1\circ\tau + \chi\circ p_2\circ\tau = p_1\circ\tau+\chi\circ p|_U$$

dans $\mathrm{Mor}(V,T)$. Puisque les deux morphismes composés

$$\bar{k}[U]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{p|_U^*} \bar{k}[V]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_Y} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}}\setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}}) \quad \text{et} \quad \bar{k}[U]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_X} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}}\setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}})$$

coïncident, on a $\mathrm{div}_Y\circ(\chi\circ p|_U)^* = p^*\circ\mathrm{div}_X\circ\chi^*$ et le résultat en découle. □

Proposition 2.5. *Avec les notations des (2.2) et (2.3), pour un $\phi \in \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}))$, soit $Y \to X$ un torseur correspondant à $\Psi(\phi)$ et soit $V := Y\times_X U$. Alors, après avoir bien choisi le signe de Ψ, il existe une trivialisation $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$ telle que $\Upsilon(\tau) = \phi$ et que, pour chaque $\tau' \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$, on ait $\Psi(\Upsilon(\tau')) = [Y]$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.4, l'énoncé est équivalent à l'existence d'une trivialisation $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$ telle que $\Psi(\Upsilon(\tau)) = [Y]$.

Étape (1). Supposons que $k = \bar{k}$ et $T = \mathbb{G}_m$. Dans ce cas, $T^* \cong \mathbb{Z}$. La suite exacte (2.2) est obtenue en appliquant $H^i(X,-) = Ext^i_{X_{\text{ét}}}(\mathbb{Z},-)$ à la suite exacte de faisceaux (cf. [CS87b, Lem. 1.6.2])

$$0 \to \mathbb{G}_{m,X} \to j_*\mathbb{G}_{m,U} \to \mathbf{Div}_{X\backslash U}(X) \to 0$$

où $U \xrightarrow{j} X$. Donc, après avoir choisi $1_{T^*} \in T^*$, le morphisme

$$\mathrm{Div}_{X\backslash U}(X) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X\backslash U}(X)) \xrightarrow{\Psi} H^1(X,T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$$

est le morphisme canonique $\mathrm{Div}_{X\backslash U}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$. Par [Col08, Lem. B.1], pour chaque trivialisation τ, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T^* \arrow[r, "\tau^*\circ\, p_1^*"] \arrow[dr, "="'] & k[V]^\times/k^\times \arrow[r, "\mathrm{div}_Y"] \arrow[d] & \mathrm{Div}_{Y\backslash V}(Y) & \mathrm{Div}_{X\backslash U}(X) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d] \\
 & T^* \arrow[rr, "(-1)\cdot\ \mathrm{type}"] & & \mathrm{Pic}(X)
\end{tikzcd}$$

Puisque $\mathit{type}(1_{T^*}) = [Y]$, le résultat en découle.

Étape (2). Supposons $k = \bar{k}$. Notons $n = \dim(T)$. Alors $T \cong \mathbb{G}_m^n$, $T^* \cong \mathbb{Z}^n$, $H^1(X,T) \cong \mathrm{Pic}(X)^{\oplus n}$ et $\mathrm{Hom}(T^*, \mathrm{Div}_{X\backslash U}(X)) \cong \mathrm{Div}_{X\backslash U}(X)^{\oplus n}$. On se réduit ainsi à l'étape (1).

Étape (3). Supposons que T est quasi-trivial et X est projective. Dans ce cas, le morphisme $H^1(X,T) \to H^1(X_{\bar{k}},T)$ est injectif (une conséquence de [CS87b, (2.0.2)]). Par l'étape (2), pour chaque $\tau \in \mathrm{Triv}_U(V,T)$, on a $\Psi(\Upsilon(\tau))|_{\bar{k}} = [Y_{\bar{k}}]$, et donc $\Psi(\Upsilon(\tau)) = [Y]$.

Étape (4). En général, soit X^c une compactification lisse de X et soit T_0 un tore avec un isomorphisme $T_0^* \xrightarrow{\iota} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$. Notons $\sigma^* := \iota^{-1}\circ\phi$ et $T_0 \xrightarrow{\sigma} T$ le morphisme correspondant de tores. L'égalité $\mathrm{Div}_{X^c_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X^c_{\bar{k}}) \cong \mathrm{Div}_{X^c_{\bar{k}}\backslash X_{\bar{k}}}(X^c_{\bar{k}}) \oplus \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ donne des morphismes

$$\iota_c : T_0^* \xrightarrow{\iota} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \hookrightarrow \mathrm{Div}_{X^c_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X^c_{\bar{k}}) \quad \text{et} \quad \pi : \mathrm{Div}_{X^c_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X^c_{\bar{k}}) \to \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$$

tels que $\pi\circ\iota_c = \iota$. Par la suite exacte (2.2), on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_k(T_0^*, \mathrm{Div}_{X^c_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X^c_{\bar{k}})) \arrow[r, "\pi\circ-"] \arrow[d, "\Psi_c"] & \mathrm{Hom}_k(T_0^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \arrow[r, "-\circ\sigma^*"] \arrow[d, "\Psi_0"] & \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \arrow[d, "\Psi"] \\
H^1(X^c, T_0) \arrow[r, "(-)|_X"] & H^1(X, T_0) \arrow[r, "\sigma_*"] & H^1(X,T)
\end{tikzcd}$$

Alors $\Psi_c(\iota_c)$ donne un T_0-torseur Y_0^c sur X^c tel que $\pi\circ\iota_c\circ\sigma^* = \phi$, $\sigma_*[Y_0^c|_X] = [Y] \in H^1(X,T)$ et que $V_0 := Y_0^c|_U \cong T_0 \times U$. Ceci donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Triv}_U(V_0,T_0) \arrow[r, "="] \arrow[d, "\Upsilon_c"] & \mathrm{Triv}_U(V_0,T_0) \arrow[r, "\sigma_*"] \arrow[d, "\Upsilon_0"] & \mathrm{Triv}_U(V,T) \arrow[d, "\Upsilon"] \\
\mathrm{Hom}_k(T_0^*, \mathrm{Div}_{X^c_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X^c_{\bar{k}})) \arrow[r, "\pi\circ-"] & \mathrm{Hom}_k(T_0^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})) \arrow[r, "-\circ\sigma^*"] & \mathrm{Hom}_k(T^*, \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}}\backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}))
\end{tikzcd}$$

et le résultat découle de l'étape (3). □

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

2.3 L'action d'un groupe sur un torseur

Soit S un groupe de type multiplicatif et soit G un groupe linéaire connexe. Colliot-Thélène a montré que tout S-torseur H sur G avec $H(k) \neq \emptyset$ peut être muni d'une structure de groupe telle que $H \to G$ soit un homomorphisme de groupes, s'il possède un point rationnel au-dessus de e_G (cf. [Col08, Thm. 5.6]). On donne une généralisation de ce résultat (Théorème 2.7).

On commence par une généralisation de [Col08, Lem. 5.5].

Lemme 2.6. *Soient X_1, X_2 deux variétés lisses géométriquement intègres. Soit S un groupe de type multiplicatif. Supposons que X_1 est géométriquement rationnelle et $X_1(k) \neq \emptyset$. Alors pour chaque $e \in X_1(k)$ et $i = 0$ ou 1, on a un isomorphisme canonique :*

$$H^i_e(X_1, S) \oplus H^i(X_2, S) \xrightarrow{\sim} H^i(X_1 \times X_2, S)$$

où $H^i_e(X_1, S) := \mathrm{Ker}(H^i(X_1, S) \xrightarrow{e^*} H^i(k, S))$.

Démonstration. Si $S = \mathbb{G}_m$, l'énoncé découle de [San81, Lem. 6.5 et Lem. 6.6]. Si S est quasi-trivial, i.e. il existe une k-algèbre finie étale K tel que $S = \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_m$, l'énoncé découle du fait $H^i(-, S) \cong H^i((-)_K, \mathbb{G}_m)$.

En général, on note $H^i_1(S) := H^i_e(X_1, S) \oplus H^i(X_2, S)$ et $H^i_2(S) := H^i(X_1 \times X_2, S)$ pour $i = 0$ ou 1. Il existe un tore T, un tore quasi-trivial T_0 et une suite exacte :

$$0 \to S \to T_0 \to T \to 0.$$

Elle induit le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_1(S) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^0_S"] & H^0_1(T_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^0_1(T) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^0_T"] & H^1_1(S) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^1_S"] & H^1_1(T_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^1_1(T) \arrow[d, "\phi^1_T"] \\
0 \arrow[r] & H^0_2(S) \arrow[r] & H^0_2(T_0) \arrow[r] & H^0_2(T) \arrow[r] & H^1_2(S) \arrow[r] & H^1_2(T_0) \arrow[r] & H^1_2(T)
\end{tikzcd}$$

Alors ϕ^0_S est injectif pour tout groupe de type multaplicatif S. Donc ϕ^0_T est injectif. Par le lemme des cinq, ϕ^0_S est isomorphe pour tout groupe de type multiplicatif S. Par la même méthode, ϕ^0_T et ϕ^1_S sont isomorphes. □

Théorème 2.7. *Soient G un groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Soient S un groupe de type multiplicatif et $Y \xrightarrow{p} X$ un S-torseur. Alors il existe un groupe linéaire H et un homomorphisme $H \xrightarrow{\psi} G$ tels que ψ soit surjectif de noyau S central et que l'action ρ_S de S sur Y s'étende une action ρ_H de H sur Y qui fait de p un H-morphisme.*

De plus :

(1) *le groupe H est unique, i.e. si $H_1 \xrightarrow{\psi_1} G$ satisfait les conditions ci-dessus, alors il existe un isomorphisme de k-groupes $\vartheta : H_1 \xrightarrow{\sim} H$ tel que l'on ait un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d, "="] & H_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\vartheta"] & G \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & S \arrow[r] & H \arrow[r, "\psi"] & G \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

(2) *si $\rho^*[Y] = p_2^*[Y]$ dans $H^1(G \times X, S)$, alors $H \cong S \times G$;*

(3) *pour chaque choix d'une action* ρ_H, *chaque homomorphisme* $G \xrightarrow{\phi} S$ *induit une nouvelle action* $H \times Y \xrightarrow{\rho_{H,\phi}} Y$ *satisfaisant les conditions ci-dessus, où*

$$\rho_{H,\phi}(h,y) = (\phi \circ \psi)(h) \cdot \rho_H(h,y) \quad \textit{pour chaque } h \in H,\ y \in Y,$$

et toutes les actions satisfaisant les conditions ci-dessus sont obtenues de cette façon.

Démonstration. On suit la démonstration de Colliot-Thélène [Col08, Thm. 5.6]. D'après le lemme 2.6, pour chaque élément $\alpha \in H^1(X,S)$, puisque $\rho^*(\alpha)|_{e_G \times X} = \alpha$, il existe un unique $\beta \in H^1_{e_G}(G,S)$ tel que $\rho^*(\alpha) = p_2^*(\alpha) + p_1^*(\beta)$, où $p_1,\ p_2$ sont les projections. Si $\alpha = [Y]$, on note $\beta = (H \xrightarrow{\psi} G)$. Par [Col08, Thm. 5.6 et Cor. 5.7], il existe une structure unique de k-groupe linéaire sur H (à (2.5) près) telle que ψ soit un homomorphisme de noyau S central.

Notons $S \xrightarrow{i} H$ l'immersion. L'égalité $\rho^*[Y] = p_1^*[H] + p_2^*[Y]$ donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
S \times Y \arrow[r, "i \times \mathrm{id}_Y"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & H \times Y \arrow[r, "\rho_+"'] \arrow[d, "\psi \times p"] \arrow[rr, bend left, "\rho_H"] & \rho^* Y \arrow[r, "\rho_Y"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "p"] \\
e_G \times X \arrow[r] & G \times X \arrow[r, "="] & G \times X \arrow[r, "\rho"] & X
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

tel que ρ_+ induise un isomorphisme $H \times^S Y \xrightarrow{\sim} \rho^* Y$ et $\rho_H := \rho_Y \circ \rho_+$ soit un $S \times S$-morphisme, où l'action $S \times S \curvearrowright Y : (s_1, s_2, y) \mapsto \rho_S(s_1 \cdot s_2, y)$. Donc $\rho_H|_{e_S \times Y} \in \mathrm{Hom}_X(Y,Y)$ est un S-morphisme, et donc un isomorphisme. Remplaçant ρ_Y par $(\rho_H|_{e_S \times Y})^{-1} \circ \rho_Y$, on peut supposer que $\rho_H|_{e_S \times Y}$ est l'identité, et donc $\rho_S = \rho_H \circ (i \times \mathrm{id}_Y)$.

Montrons que ρ_H est une action. Notons m_H la multiplication sur H. Puisque ρ est une action, les morphismes $\rho_1 := \rho_H \circ (m_H \times \mathrm{id}_Y)$ et $\rho_2 := \rho_H \circ (\mathrm{id}_H \times \rho_H)$ induisent un morphisme

$$\Psi : H \times H \times Y \xrightarrow{(\rho_1,\rho_2)} Y \times_X Y \xrightarrow{\sim} Y \times S \xrightarrow{p_2} S, \quad \text{i.e.} \quad \rho_H(h_1 \cdot h_2, y) = \Psi(h_1,h_2,y) \cdot \rho_H(h_1, \rho_H(h_2,y))$$

pour chaque $h_1, h_2 \in H$ et $y \in Y$. Puisque ρ_H est un $S \times S$-morphisme et S est central dans H, il existe un morphisme $G \times G \times X \xrightarrow{\Psi_1} S$ tel que $\Psi = \Psi_1 \circ (\psi \times \psi \times p)$. Par le lemme de Rosenlicht (voir [San81, Lem. 6.5]), il existe des homomorphismes $\chi_1, \chi_2 : G \to S$ et un morphisme $X \xrightarrow{\chi_0} S$ tels que

$$\Psi_1(g_1, g_2, x) = \chi_1(g_1) \cdot \chi_2(g_2) \cdot \chi_0(x)$$

pour chaque $g_1, g_2 \in G$ et $x \in X$. Puisque $\rho_H(e_H, y) = y$ pour chaque $y \in Y$, on a

$$\chi_1(g) = \chi_2(g) = \chi_0(x) = e_S$$

pour tout $x \in X$ et tout $g \in G$. Donc ρ_H est une action.

Pour (1), s'il existe un groupe linéaire H qui satisfait l'énoncé du théorème, alors H et l'action ρ_H sur Y induisent le diagramme (2.6) tel que $\rho_H := \rho_Y \circ \rho_+$ et $H \times^S Y \xrightarrow{\sim} \rho^* Y$. Alors dans $H^1(G \times X, S)$, on a $p_1^*[H] + p_2^*[Y] = \rho^*[Y]$, ce qui détermine uniquement H par l'argument ci-dessus.

Pour (2), si $\rho^*[Y] = p_2^*[Y]$, on a $[H] = 0$ et, d'après (1), on a $H \cong S \times G$.

Pour (3), il est clair que $\rho_{H,\phi}|_{S \times Y} = \rho_S$ et $p \circ \rho_{H,\phi} = \rho \circ (\psi \times p)$. Par ailleurs, soit ρ'_H une action satisfaisant les conditions. Alors on a un morphisme

$$\Phi : H \times Y \xrightarrow{(\rho_H, \rho'_H)} Y \times_X Y \xrightarrow{\sim} Y \times S \xrightarrow{p_2} S \quad \text{i.e.} \quad \rho'_H(h,y) = \Phi(y,h) \cdot \rho_H(h,y)$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

pour chaque $h \in H$ et $y \in Y$. Puisque $\rho'_H|_{S\times Y} = \rho_S$, il existe $G\times X \xrightarrow{\Phi_1} S$ tel que $\Phi = \Phi_1 \circ (\psi \times p)$. Par le lemme de Rosenlicht (voir [San81, Lem. 6.5]), il existe un homomorphisme $G \xrightarrow{\phi} S$ et un morphisme $X \xrightarrow{\chi} S$ tels que $\Phi_1(g,x) = \phi(g)\cdot\chi(x)$ pour chaque $g \in G$ et $x \in X$. Puisque $\rho'_H(e_H, y) = y$ pour chaque $y \in Y$, on a $\chi(x) = e_S$ pour tout $x \in X$. Donc $\rho'_H = \rho_{H,\phi}$. □

Corollaire 2.8. *Soient G un k-groupe linéaire connexe et X_1, X_2 deux G-variétés lisses géométriquement intègres munies d'un G-morphisme $X_1 \to X_2$. Soit S un groupe de type multiplicatif. Pour $i = 1, 2$, soient $Y_i \to X_i$ un S-torseur et H_i le groupe linéaire donné par le théorème 2.7. Si $Y_1 \cong Y_2 \times_{X_2} X_1$ comme S-torseurs, alors $H_1 \cong H_2$ et, après avoir changé l'action de H_1 sur Y_1 ou l'action de H_2 sur Y_2, on peut imposer que $Y_1 \cong Y_2 \times_{X_2} X_1 \to Y_2$ soit un H_1-morphisme.*

Démonstration. L'action de H_2 sur Y_2 induit canoniquement une action de H_2 sur $Y_2 \times_{X_2} X_1$ telle que $Y_2 \times_{X_2} X_1 \to X_1$ soit un H_2-morphisme. Par l'unicité dans le théorème 2.7, $H_1 \cong H_2$. Le résultat découle du fait que la différence de deux actions est un homomorphisme $G \to S$, qui ne dépend pas de X_i. □

Corollaire 2.9. *Sous les hypothèses du théorème 2.7, si le S-torseur $[Y]$ est trivial sur un G-ouvert U de X, alors $H \cong S \times G$.*

Démonstration. En appliquant le théorème 2.7(2) à U et le corollaire 2.8 à $U \to X$, on obtient le résultat. □

Corollaire 2.10. *Sous les hypothèses du théorème 2.7, supposons que $X \cong G/G_0$, où $G_0 \subset G$ est un sous-groupe fermé connexe. Si $Y(k) \neq \emptyset$, alors il existe un sous-groupe connexe fermé H_0 de H tel que $Y \cong H/H_0$ et $H_0 \cong G_0$.*

Démonstration. Soient $y \in Y(k)$, $x := p(y)$ et $G \xrightarrow{\pi} X$ le morphisme induit par x. Alors $Y_G := Y \times_X G$ a un k-point sur e_G. Par [Col08, Thm. 5.6], Y_G est un groupe satisfaisant les conditions du théorème 2.7. Par le corollaire 2.8, $Y_G \cong H$ et $H \xrightarrow{\pi_Y} Y$ est un H-morphisme. Donc $H_0 := \pi_Y^{-1}(y) \cong \pi^{-1}(x) \cong G_0$. □

3. Groupe de Brauer invariant

Dans toute cette section, k est un corps quelconque de caractéristique 0. Sauf mention explicite, une variété est une k-variété et les morphismes sont les k-morphismes. Soit G un groupe linéaire et soit X une G-variété lisse. On définit la notion de sous-groupe G-invariant de $\mathrm{Br}(X)$ (Définition 3.1). Ensuite on établit 'l'algébricité' de $\mathrm{Br}_G(X)$ (Proposition 3.7). On définit la notion d'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 3.8) et on obtient un diagramme commutatif canonique de suites exactes de Sansuc (Théorème 3.10).

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1. Soient G un groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. *Le sous-groupe de Brauer G-invariant* de X est le sous-groupe

$$\mathrm{Br}_G(X) := \{b \in \mathrm{Br}(X) : (\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in p_1^*\,\mathrm{Br}(G)\} \tag{3.1}$$

de $\mathrm{Br}(X)$, où $G \times X \xrightarrow{p_1} G$, $G \times X \xrightarrow{p_2} X$ sont les projections.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Dans la proposition 3.4, pour un sous-groupe $B \subset \mathrm{Br}(X)$, on montre que $B \subset \mathrm{Br}_G(X)$ si et seulement si B est 'G-invariant'.

Proposition 3.2. *Sous les hypothèses de la Définition 3.1, alors :*

(1) *pour toute extension de corps K/k, l'homomorphisme $\pi^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_K)$ induit par $\pi : X_K \to X$ vérifie $\pi^*(\mathrm{Br}_G(X)) \subset \mathrm{Br}_{G_K}(X_K)$;*

(2) *pour tout groupe linéaire connexe H, tout homomorphisme $H \xrightarrow{\psi} G$, toute H-variété Y et tout H-morphisme $p : Y \to X$ (compatible avec ψ) on a $p^*(\mathrm{Br}_G(X)) \subset \mathrm{Br}_H(Y)$;*

(3) *pour tout G-ouvert dense $U \subset X$, on a $\mathrm{Br}_G(X) = \mathrm{Br}_G(U) \cap \mathrm{Br}(X)$;*

(4) *on a $\mathrm{Br}_1(X) \subset \mathrm{Br}_G(X)$;*

(5) *pour toute G-variété Y munie d'un G-morphisme $Y \xrightarrow{p} X$, si p est un torseur sous un groupe linéaire connexe H, on a $(p^*)^{-1}\,\mathrm{Br}_G(Y) = \mathrm{Br}_G(X)$, où $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}(Y)$;*

(6) *sous les hypothèses de (5), on a*

$$\mathrm{Br}_1(X, Y) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y_{\bar{k}})) \subset \mathrm{Br}_G(X).$$

Démonstration. Les énoncés (1), (2) et (3) découlent de la définition.

Pour (4), par [San81, Lem. 6.6], $\mathrm{Br}_1(G \times X) = \mathrm{Br}_a(G) \oplus \mathrm{Br}_1(X) = p_1^* \mathrm{Br}_1(G) + p_2^* \mathrm{Br}_1(X)$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}_1(X)$, on a $(\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha))|_{e_G \times X} = 0$ et donc $(\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha)) \subset p_1^* \mathrm{Br}_1(G)$.

Pour (5), puisque $G \times Y \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times p} G \times X$ est aussi un H-torseur, par la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10], on a le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(H) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}(X) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "p_2^*"] & \mathrm{Br}(Y) \arrow[d, "p_{2,Y}^*"] \\
\mathrm{Pic}(H) \arrow[r] & \mathrm{Br}(G \times X) \arrow[r, "(\mathrm{id}_G \times p)^*"] & \mathrm{Br}(G \times Y)
\end{tikzcd}$$

Donc, pour tout $\alpha \in (p^*)^{-1}\,\mathrm{Br}_G(Y)$, on a

$$\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha) \in p_1^* \mathrm{Br}(G) + \mathrm{Im}\,\mathrm{Pic}(H) \subset p_1^* \mathrm{Br}(G) + p_2^* \mathrm{Br}(X).$$

Puisque $(\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha))|_{e_G \times X} = 0$, on peut voir que $\rho^*(\alpha) - p_2^*(\alpha) \in p_1^* \mathrm{Br}(G)$.

Par (4) et (5), $\mathrm{Br}_1(X, Y) \subset \mathrm{Br}_G(X)$. □

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 3.3. *Soient X, Y deux variétés lisses intègres et $Y \xrightarrow{p} X$ un morphisme fidèlement plat à fibres géométriquement intègres. Soit $B \subset \mathrm{Br}(k(X))$ (resp. $B \subset \mathrm{Br}(U)$ avec $U \subset X$ un ouvert) un sous-groupe. Alors*

$$p^*(B \cap \mathrm{Br}(X)) = (p^* B) \cap \mathrm{Br}(Y).$$

Démonstration. Pour tout $x \in X$, la fibre Y_x est intègre et $H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1(k(Y_x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est injectif. En appliquant la suite exacte naturelle [Col95, (3.9)] à X et à Y, on obtient le résultat. □

Proposition 3.4. *Sous les hypothèses de la Définition 3.1, pour un sous-groupe $B \subset \mathrm{Br}(X)$, les énoncés ci-dessous sont équivalents :*

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

(1) *$B \subset \mathrm{Br}_G(X)$;*

(2) *$\rho^* B + p_1^* \mathrm{Br}(G) = p_2^* B + p_1^* \mathrm{Br}(G)$;*

(3) *pour toute extension de corps K/k et tout $g \in G(K)$, l'action $\rho_g : X_K \xrightarrow{g\cdot(-)} X_K$ induit un morphisme $\mathrm{Br}(X_K) \xrightarrow{\rho_g^*} \mathrm{Br}(X_K)$ tel que*

$$\rho_g^* \pi^* B + \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(K) = \pi^* B + \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(K), \tag{3.2}$$

où $X_K \xrightarrow{\pi} X$;

(4) *pour tout $b \in B$, toute extension de corps K/k et tout $g \in G(K)$, on a*

$$(\rho_g^* \pi^*(b) - \pi^*(b)) \in \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(K),$$

où π et ρ_g^* sont définis dans (3) ;

(5) *pour toute extension de corps K/k telle que k soit algébriquement clos dans K, et tout $g \in G(K)$, on a (3.2), où π et ρ_g^* sont définis dans (3).*

Démonstration. Les implications (4) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (5) sont claires.

Pour (2) $\Rightarrow$ (1), on note $i_e : X \xrightarrow{e_G \times \mathrm{id}_X} G \times X$ l'immersion fermée. Pour $b \in B$, il existe $b' \in B$ et $a \in \mathrm{Br}(G)$ tels que $\rho^*(b) = p_2^*(b') + p_1^*(a)$. Puisque $\rho \circ i_e = p_2 \circ i_e = \mathrm{id}_X$ et que $p_1 \circ i_e$ se factorise par $\mathrm{Spec}\, k$, on a $b - b' \in \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(k)$ et donc

$$(\rho^*(b) - p_2^*(b)) \in (p_1^* \mathrm{Br}(G) + \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(k)) = p_1^* \mathrm{Br}(G).$$

Pour (1) $\Rightarrow$ (4), on note $i_g : X_K \xrightarrow{g \times \mathrm{id}_X} G \times X$ le morphisme et $A := \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(K)$. Alors $\pi \circ \rho_g = \rho \circ i_g$ et $\pi = p_2 \circ i_g$. Puisque $i_g^*(p_1^* \mathrm{Br}(G)) \subset A$, on a

$$\rho_g^* \pi^*(b) + A = i_g^*(p_1^* \mathrm{Br}(G) + \rho^*(b)) + A = i_g^*(p_1^* \mathrm{Br}(G) + p_2^*(b)) + A = \pi^*(b) + A.$$

Pour (5) $\Rightarrow$ (2), notons $X_{\eta_G} \xrightarrow{\pi} X$ la projection et $X_{\eta_G} \xrightarrow{i_\eta} G \times X$ l'immersion canonique. Alors $\mathrm{Br}(G \times X) \to \mathrm{Br}(X_{\eta_G})$ est injectif. Par le lemme 3.3, $p_1^* \mathrm{Br}(\eta_G) \cap \mathrm{Br}(G \times X) = p_1^* \mathrm{Br}(G)$. Donc il suffit de montrer que :

$$(i_\eta^* \rho^*) B + \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(\eta_G) = (i_\eta^* p_2^*) B + \mathrm{Im}\, \mathrm{Br}(\eta_G).$$

Le résultat découle de $p_2 \circ i_\eta = \pi$ et $\rho \circ i_\eta = \pi \circ \rho_{\eta_G}$. □

Soient X une variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un ouvert non vide. Supposons que $D := (X \backslash U)$ est lisse de codimension 1. Par le théorème de pureté pour la cohomologie étale à support dans un fermé lisse (cf. [Mil80, § VI.5]), on a une suite exacte :

$$H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^2(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^1(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^3(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)).$$

Puisque $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(U)$ est surjectif et $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(U)$ est injectif, d'après la suite exacte de Kummer, on a la suite exacte (cf. Grothendieck [Gro68])

$$0 \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(U) \xrightarrow{\partial} H^1(D, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^3(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)). \tag{3.3}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Soit G un groupe linéaire connexe. Si X est munie d'une G-action $\rho : G\times X \to X$ respectant U, on a un diagramme de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\theta^*"] & \mathrm{Br}(U) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\theta_U^*"] & H^1(D,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "\theta_D^*"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(G\times X) \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & \mathrm{Br}(G\times U) \arrow[r] & H^1(G\times D,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

où $G\times X \xrightarrow{\theta} X$ est soit p_2 soit ρ. On a le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on a :*

(1) $p_{2,D}^*|_{\partial(\mathrm{Br}_G(U))} = \rho_D^*|_{\partial(\mathrm{Br}_G(U))}$;

(2) *pour tout $b\in \mathrm{Br}_G(U)$, il existe un revêtement fini étale galoisien abélien $D' \xrightarrow{\pi} D$ tel que D' soit une G-variété, π soit un G-morphisme et que $\pi^*(\partial(b)) = 0 \in H^1(D',\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Puisque $p_{1,U}^*\,\mathrm{Br}(G)\subset \mathrm{Im}(\mathrm{Res})$, l'énoncé (1) découle de la proposition 3.4(2). Pour $b\in \mathrm{Br}_G(U)$, soit $n\in\mathbb{Z}$ l'ordre de $\partial(b)$. Alors $\partial(b)\in H^1(D,\mathbb{Z}/n)$. Soit $D'\xrightarrow{\pi} D$ un $\mathbb{Z}/n$-torseur tel que $[D'] = \partial(b)$. Par (1), $p_{2,D}^*[D'] = \rho_D^*[D']\in H^1(G\times D,\mathbb{Z}/n)$. D'après le théorème 2.7(2), D' est une G-variété. □

Lemme 3.6. *Soient G un groupe linéaire connexe et P un G-torseur. Alors $\mathrm{Br}_G(P) = \mathrm{Br}_1(P)$.*

Démonstration. D'après la proposition 3.2(1) et (4), il suffit de montrer que $\mathrm{Br}_G(P_{\bar{k}}) = 0$. On peut supposer $k = \bar{k}$ et $P\cong G$.

Si G est un tore de dimension n, alors $G\cong \mathbb{G}_m^n$ est un ouvert de $\mathbb{A}^n$ canoniquement. Soit $X := \mathbb{A}^n\backslash[(\mathbb{A}^n\backslash G)_{\mathrm{sing}}]$. Alors $\mathrm{codim}(\mathbb{A}^n\backslash X,\mathbb{A}^n)\geqslant 2$, $\mathrm{Br}(X) = 0$, G est un ouvert de X et $X\backslash G = \bigsqcup_{i=1}^n D_i$, chaque D_i étant un G-espace homogène de stabilisateur $\mathbb{G}_m$. D'après [CX15, Prop. 2.2], pour tout revêtement fini étale galoisien $D_i' \xrightarrow{\pi_i} D_i$ tel que D_i' soit une G-variété intègre et que π_i soit un G-morphisme, le morphisme π_i est un isomorphisme. D'après le lemme 3.5(2) et (3.3), $\mathrm{Br}_G(G)\subset \mathrm{Br}(X) = 0$.

Si G est réductif, soit T le tore maximal de G. Par la décomposition de Bruhat, il existe un ouvert U de G tel que $U\cong \mathbb{A}^n\times T\times\mathbb{A}^n$, où $2n = \dim(U)-\dim(T)$ (voir la démonstration de [Col07, Prop. 4.2]). Donc $\mathrm{Br}(G)\to\mathrm{Br}(T)$ est injectif. Le résultat découle de la proposition 3.2(2).

En général, par [CDX16, Lem. 2.1], le morphisme $\mathrm{Br}(G^{\mathrm{red}})\to \mathrm{Br}(G)$ est un isomorphisme. Le résultat découle de la proposition 3.2(2). □

Proposition 3.7. *Soient G un groupe linéaire connexe et (X,ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Pour tout $b\in\mathrm{Br}_G(X)$, on a $(\rho^*(b)-p_2^*(b))\in p_1^*\,\mathrm{Br}_e(G)$.*

Démonstration. Pour la définition de $\mathrm{Br}_e(G)$, voir (1.3). Notons $X\xrightarrow{e_G\times \mathrm{id}_X} G\times X$. Puisque $p_2\circ(e_G\times\mathrm{id}_X) = \rho\circ(e_G\times\mathrm{id}_X)$, il suffit de montrer que, pour tout $b\in\mathrm{Br}_G(X)$, on a $(\rho^*(b)-p_2^*(b))\in p_1^*\,\mathrm{Br}_1(G)$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

On peut supposer $k = \bar{k}$. Un point $x \in X(k)$ induit un morphisme $G \xrightarrow{i_x} X$. Notons m la multiplication sur G. Alors on a le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(X) \arrow[r, "p_2^* - \rho^*"] \arrow[d, "i_x^*"] & \mathrm{Br}(G \times X) \arrow[d, "(\mathrm{id}_G \times i_x)^*"] & \mathrm{Br}(G) \arrow[l, "p_1^*"'] \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Br}(G) \arrow[r, "p_2^* - m^*"'] & \mathrm{Br}(G \times G) & \mathrm{Br}(G) \arrow[l, "p_1^*"]
\end{tikzcd}$$

Le résultat découle du lemme 3.6, de la proposition 3.2(2) et de l'injectivité de p_1^*. $\square$

3.2 L'homomorphisme de Sansuc

Soient G un groupe algébrique connexe et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. Notons $G \times X \xrightarrow{p_1} G$, $G \times X \xrightarrow{p_2} X$ les deux projections. Soit $\mathrm{Br}_G(X)$ le sous-groupe de Brauer G-invariant de X (Définition 3.1). Pour la définition de $\mathrm{Br}_e(G)$, voir (1.3).

Par [San81, Lem. 6.6], on a $\mathrm{Br}_a(G \times X) = \mathrm{Br}_a(G) \oplus \mathrm{Br}_a(X)$, et donc $p_1^*|_{\mathrm{Br}_e(G)}$ est injectif. Par la proposition 3.7, il existe un unique homomorphisme $\mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(G)$ tel que

$$p_1^* \circ \lambda = \rho^* - p_2^* : \mathrm{Br}_G(X) \to \mathrm{Br}(G \times X). \tag{3.4}$$

Définition 3.8. Soient G un groupe linéaire connexe et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre. L'unique homomorphisme $\mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(G)$ satisfaisant (3.4) est appelé *l'homomorphisme de Sansuc*.

Proposition 3.9. *Sous les hypothèses de la définition 3.8, on a :*

(1) *pour toute extension de corps K/k, et tous $x \in X(K)$, $g \in G(K)$, $\alpha \in \mathrm{Br}_G(X)$, on a*

$$(g \cdot x)^*(\alpha) = g^*(\lambda(\alpha)) + x^*(\alpha) \in \mathrm{Br}(K);$$

(2) *si $X(k) \neq \emptyset$, alors, pour tout $x \in X(k)$, on a*

$$\lambda = \rho_x^* - x^*, \tag{3.5}$$

où $G \xrightarrow{\rho_x} X : g \mapsto g \cdot x$, $\mathrm{Spec}\, k \xrightarrow{x} X$ est le point x et $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{x^*} \mathrm{Br}(k) \subset \mathrm{Br}(G)$.

(3) *si $X \cong G/G_0$ avec $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe, alors*

$$\mathrm{Br}_G(X) \cong \mathrm{Br}_1(X, G) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(G_{\bar{k}})).$$

Démonstration. Pour (1), on a

$$(g \cdot x)^*(\alpha) = (g, x)^*(\rho^*(\alpha)) = (g, x)^*(p_2^*(\alpha) + p_1^*(\lambda(\alpha))) = g^*(\lambda(\alpha)) + x^*(\alpha) \in \mathrm{Br}(K).$$

Dans le cas (2), pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}_G(X)$, on obtient $(\rho^* - p_2^*)(\alpha)|_{G \times x} = (\rho_x^* - x^*)(\alpha)$.

L'énoncé (3) résulte de la proposition 3.2(2) (5) et du lemme 3.6. $\square$

Si $X \xrightarrow{f} Z$ est un G-torseur, par définition, l'homomorphisme de Sansuc $\lambda|_{\mathrm{Br}_1(X)}$ est exactement le morphisme dans la suite exacte de Sansuc à isomorphisme canonique $\mathrm{Br}_e(G) \cong \mathrm{Br}_a(G)$ près (cf. [BD13, Thm. 2.8]).

THÉORÈME 3.10. *Soient G un groupe linéaire connexe, Z une variété lisse géométriquement intègre et $X \xrightarrow{f} Z$ un G-torseur. Notons $G \times X \xrightarrow{\rho} X$ l'action de G. Alors l'homomorphisme de Sansuc λ induit le diagramme suivant commutatif de suites exactes, fonctoriel en (X, Z, f, G).*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(G) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}(Z) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}_G(X) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Br}_e(G) \cong \mathrm{Br}_a(G) \arrow[d, hook, "p_1^*"] \\ \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(G) \arrow[r] & \mathrm{Br}(Z) \arrow[r] & \mathrm{Br}(X) \arrow[r, "\rho^* - p_2^*"] & \mathrm{Br}(G \times X) \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Démonstration. D'après Borovoi et Demarche [BD13, Thm. 2.8], on a une suite exacte

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Br}(Z) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\rho^* - p_2^*} \mathrm{Br}(G \times X)$$

fonctoriel en (X, Z, f, G), telle que $(\rho^* - p_2^*)(\mathrm{Br}_1(X)) \subset p_1^* \mathrm{Br}_e(G)$. Le résultat découle de la proposition 3.7. $\square$

COROLLAIRE 3.11. *Soient $1 \to N \to H \xrightarrow{\psi} G \to 1$ une suite exacte de groupes linéaires connexes et (X, ρ) une G-variété lisse géométriquement intègre.*

(1) *On a* $\mathrm{Br}_G(X) = \mathrm{Br}_H(X)$.

(2) *S'il existe une H-variété Y et un H-morphisme $Y \xrightarrow{p} X$ tels que $Y \to X$ soit un N-torseur, alors $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}(Y)$ satisfait $(p^*)^{-1} \mathrm{Br}_H(Y) = \mathrm{Br}_G(X)$ et on a une suite exacte (où λ est l'homomorphisme de Sansuc), fonctorielle en (X, Y, p, N) :*

$$\mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(N) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}_H(Y) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(N).$$

Démonstration. Puisque $H \times X \xrightarrow{\psi_X} G \times X$ est un N-torseur, par le diagramme (3.6), on a le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(N) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}(G) \arrow[r] \arrow[d, "p_1^*"] & \mathrm{Br}_N(H) \arrow[r] \arrow[d, "p_1^*"] & \mathrm{Br}_e(N) \arrow[d, "="] \\ \mathrm{Pic}(N) \arrow[r] & \mathrm{Br}(G \times X) \arrow[r, "\psi_X^*"] & \mathrm{Br}_N(H \times X) \arrow[r] & \mathrm{Br}_e(N) \end{tikzcd}$$

Donc $(\psi_X^*)^{-1}(p_1^* \mathrm{Br}_N(H)) = p_1^* \mathrm{Br}(G)$. Puisque $\mathrm{Br}_e(H) \subset \mathrm{Br}_1(H) \subset \mathrm{Br}_N(H)$ (Proposition 3.2(4)), la proposition 3.7 donne (1).

Appliquons la proposition 3.2(5) au N-torseur $p : Y \to X$ (avec l'action de H). On a (en utilisant (1))

$$\chi(\mathrm{Pic}(N)) \subset (p^*)^{-1}(0) \subset (p^*)^{-1}(\mathrm{Br}_H(Y)) = \mathrm{Br}_H(X) = \mathrm{Br}_G(X).$$

Une application du diagramme (3.6) au N-torseur $Y \to X$ donne (2). $\square$

Comme conséquence, par le lemme 3.6, on a une suite exacte [San81, Cor. 6.11] :

$$\mathrm{Pic}(N) \to \mathrm{Br}_1(G) \to \mathrm{Br}_1(H) \to \mathrm{Br}_e(N). \tag{3.7}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Lemme 3.12. *Soient G, N deux groupes linéaires connexes et X une G-variété lisse géométriquement intègre. Soient $H := N \times G$ et P une H-variété telle que P soit un N-torseur sur k. Soient $Y := P \times X$ et $Y \xrightarrow{p_1} P$, $Y \xrightarrow{p_2} X$ les deux projections. Si $P(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \bar{k}^\times) = 0$, on a un isomorphisme :*

$$(p_1^*, p_2^*) : \mathrm{Br}_a(P) \oplus \mathrm{Br}_G(X)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_H(Y)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k).$$

De plus, cet isomorphisme induit un isomorphisme : $(p_1^*, p_2^*) : \mathrm{Br}_a(P) \oplus \mathrm{Br}_a(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_a(Y)$.

Démonstration. Par la proposition 3.2(1) et le lemme 3.6, on a $\mathrm{Br}_H(P) = \mathrm{Br}_1(P)$. D'après le corollaire 3.11(2) et l'isomorphisme $\mathrm{Br}_e(N) \cong \mathrm{Br}_a(N)$, on a le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(P) \arrow[r, "\vartheta_1"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(N) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}_1(P) \arrow[r, "\vartheta_2"] \arrow[d, "p_1^*"] & \mathrm{Br}_a(N) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Pic}(Y) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(N) \arrow[r] & \mathrm{Br}_G(X) \arrow[r, "p_2^*"] & \mathrm{Br}_H(Y) \arrow[r] & \mathrm{Br}_a(N)
\end{tikzcd}$$

Puisque $P(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \bar{k}^\times) = 0$, par [San81, Lem. 6.7 et 6.8], ϑ_1 et ϑ_2 sont surjectifs. Alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(P) \oplus \mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} \mathrm{Br}_H(Y) \to 0. \tag{3.8}$$

Puisque le morphisme $\mathrm{Br}(X_{\bar{k}}) \to \mathrm{Br}((P \times X)_{\bar{k}}) \cong \mathrm{Br}(Y_{\bar{k}})$ est injectif, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(P) \oplus \mathrm{Br}_1(X) \xrightarrow{(p_1^*, p_2^*)} \mathrm{Br}_1(Y) \to 0.$$

Le résultat en découle. □

Proposition 3.13. *Soient T un tore et $1 \to G_0 \to G \xrightarrow{\psi} T \to 1$ une suite exacte de groupes linéaires connexes. Soient X une G-variété lisse, géométriquement intègre et $X \xrightarrow{f} T$ un G-morphisme. Notons $\mathrm{Br}_a(G) \xrightarrow{\vartheta} \mathrm{Br}_a(G_0)$ l'homomorphisme induit par $G_0 \subset G$. Alors, pour tout $t \in T(k)$, la fibre X_t est G_0-invariante et on a un isomorphisme naturel $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \cong \mathrm{Pic}(X_{t,\bar{k}})$ et deux suites exactes naturelles*

$$0 \to T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[X]^\times/\bar{k}^\times \to \bar{k}[X_t]^\times/\bar{k}^\times \to 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Br}_e(T) \to \mathrm{Br}_G(X) \to \mathrm{Br}_{G_0}(X_t) \to \mathrm{coker}(\vartheta).$$

Démonstration. D'après [CX15, Prop. 2.2], X_t est lisse, géométriquement intègre. Puisque T est commutatif, X_t est G_0-invariant. Notons :

$$X_t \xrightarrow{i} G \times X_t : x \mapsto (e_G, x) \quad \text{et} \quad G \times X_t \xrightarrow{\rho} X : (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

Alors $\rho \circ i$ est l'immersion $X_t \subset X$. On fixe des actions

$$G \times G_0 \curvearrowright G \times X_t : (g, g_0) \times (g', x) \mapsto (gg'g_0^{-1}, g_0 \cdot x) \quad \text{et} \quad G \times G_0 \curvearrowright G : (g, g_0) \times g' \mapsto gg'g_0^{-1}.$$

Par définition, $X \cong G \times^{G_0} X_t$ et on a un diagramme commutatif de $G \times G_0$-morphismes

$$\begin{tikzcd}
X_t & G \times X_t \arrow[l, "p_2"'] \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\rho"] & G \arrow[d, "t \cdot \psi(-)"] \\
 & X \arrow[r, "f"] & T
\end{tikzcd}$$

tel que les colonnes soient des G_0-torseurs.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

D'après [San81, Lem. 6.5 et Lem. 6.6], on a

$$\bar{k}[G \times X_t]^\times/\bar{k}^\times \cong \bar{k}[G]^\times/\bar{k}^\times \oplus \bar{k}[X_t]^\times/\bar{k}^\times \quad \text{et} \quad \mathrm{Pic}(G_{\bar{k}} \times X_{t,\bar{k}}) \cong \mathrm{Pic}(G_{\bar{k}}) \oplus \mathrm{Pic}(X_{t,\bar{k}}).$$

Par la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10 et Cor. 6.11], on a le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^* \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \frac{\bar{k}[G]^\times}{\bar{k}^\times} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{\bar{k}[G_0]^\times}{\bar{k}^\times} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(T_{\bar{k}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(G_{\bar{k}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(G_{0,\bar{k}}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\bar{k}[X]^\times}{\bar{k}^\times} \arrow[r] & \frac{\bar{k}[G\times X_t]^\times}{\bar{k}^\times} \arrow[r] & \frac{\bar{k}[G_0]^\times}{\bar{k}^\times} \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X_{\bar{k}}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}((G \times X_t)_{\bar{k}}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(G_{0,\bar{k}}) &
\end{tikzcd}$$

Puisque $\mathrm{Pic}(T_{\bar{k}}) = 0$, une application du lemme du serpent donne l'isomorphisme et la première suite exacte de l'énoncé.

D'après (3.8), on a un isomorphisme : $\mathrm{Br}_e(G) \oplus \mathrm{Br}_{G_0}(X_t) \xrightarrow{(p_1^*,p_2^*)} \mathrm{Br}_{G\times G_0}(G \times X_t)$. Le corollaire 3.11 donne le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(G_0) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}_1(T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}_1(G) \arrow[r, "\lambda_G"] \arrow[d, "p_1^*"] & \mathrm{Br}_e(G_0) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Pic}(G_0) \arrow[r] & \mathrm{Br}_G(X) \arrow[r, "\rho^*"] & \mathrm{Br}_{G\times G_0}(G \times X_t) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"] & \mathrm{Br}_e(G_0) \\
 & & \mathrm{Br}(X_t)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k)) &
\end{tikzcd}$$

D'après la proposition 3.9(2), $\mathrm{Coker}(\vartheta) \cong \mathrm{Coker}(\lambda_G)$. Puisque $p_2 \circ i = \mathrm{id}$ et $i^* \circ p_1^* = 0$, on a $\mathrm{Br}_{G_0}(X_t) = \mathrm{Im}(i^*) \cong \mathrm{coker}(p_1^*)$. Une chasse au diagramme donne l'énoncé. □

Corollaire 3.14. *Sous les hypothèses de la proposition 3.13, soient $U \subset X$ un G-ouvert et $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ un sous-groupe. Alors, pour tout $t \in T(k)$, de fibre $U_t \subset X_t \xhookrightarrow{i_t} X$, on a :*

$$i_t^*(B \cap \mathrm{Br}(X)) = (i_t^*(B) \cap \mathrm{Br}(X_t)).$$

Démonstration. D'après la proposition 3.13, on a le diagramme suivant de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}_e(T) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}_G(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Br}_{G_0}(X_t) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{coker}(\vartheta) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Br}_e(T) \arrow[r] & \mathrm{Br}_G(U) \arrow[r, "i_t^*"] & \mathrm{Br}_{G_0}(U_t) \arrow[r] & \mathrm{coker}(\vartheta)
\end{tikzcd}$$

Une chasse au diagramme donne l'énoncé. □

3.3 Pseudo espace homogène

Soit G un groupe linéaire connexe. Pour les besoins de cet article, on introduit la notion de pseudo G-espace homogène. Elle généralise la notion de G-espace homogène avec un k-point à stabilisateur géométrique connexe (cf. exemple 3.16(1)).

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Définition 3.15. Soit G un groupe linéaire connexe. Une G-variété Z est appelée *pseudo G-espace homogène* si Z est lisse, géométriquement intègre, $\mathrm{Pic}(Z_{\bar{k}})$ est de type fini, $Z(k) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Ker}(\lambda)/\mathrm{Br}(k), \mathrm{Br}_{G_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}})$ sont finis, où $\lambda : \mathrm{Br}_G(Z) \to \mathrm{Br}_e(G)$ est l'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 3.8).

Fixons $z \in Z(k)$ et notons $\rho_z : G \to Z : g \mapsto g \cdot z$. D'après (3.5), le groupe $\mathrm{Ker}(\lambda)/\mathrm{Br}(k)$ est fini si et seulement si $\mathrm{Ker}(\rho_z^*) \cap \mathrm{Br}_G(Z)$ est fini, où $\mathrm{Br}(Z) \xrightarrow{\rho_z^*} \mathrm{Br}(G)$.

Example 3.16. Soit G un groupe linéaire connexe.

(1) Soit $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe. Alors G/G_0 est un pseudo G-espace homogène.
(2) Soient W une variété lisse géométriquement intègre et $Z \to W$ un G-torseur. Si $\mathrm{Pic}(W)$ est de type fini, $\mathrm{Br}(W)/\mathrm{Br}(k), \mathrm{Br}(W_{\bar{k}})$ sont finis et $Z(k) \neq \emptyset$, alors Z est un pseudo G-espace homogène.

Démonstration. L'énoncé (1) résulte de [BD13, Thm. 2.8] et de la proposition 3.9(3). L'énoncé (2) résulte du corollaire 3.11(2). □

Proposition 3.17. *Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G-espace homogène. Soient T un tore, $Z' \to Z$ un T-torseur et H le groupe linéaire connexe déterminé dans le théorème 2.7. Si $Z'(k) \neq \emptyset$, alors Z' est un pseudo H-espace homogène.*

Démonstration. Fixons $z' \in Z'(k)$ et $z \in Z(k)$ l'image de z. Notons $\rho_{z'} : H \to Z' : h \mapsto h \cdot z'$ et $\rho_z : G \to Z : g \mapsto g \cdot z$. D'après la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10], $\mathrm{Pic}(Z'_{\bar{k}})$ est de type fini. Par le corollaire 3.11(2) et (3.7), on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(T) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}_G(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_z^*"] & \mathrm{Br}_H(Z') \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{z'}^*"] & \mathrm{Br}_e(T) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Pic}(T) \arrow[r] & \mathrm{Br}_1(G) \arrow[r] & \mathrm{Br}_1(H) \arrow[r] & \mathrm{Br}_e(T)
\end{tikzcd}$$

et un isomorphisme $\mathrm{Br}_{G_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}}) \to \mathrm{Br}_{H_{\bar{k}}}(Z'_{\bar{k}})$. Ainsi $\mathrm{Br}_{H_{\bar{k}}}(Z'_{\bar{k}})$ est fini. Puisque $\mathrm{Ker}(\rho_z^*)$ est fini, le groupe $\mathrm{Ker}(\rho_{z'}^*)$ est fini et Z' est un pseudo H-espace homogène. □

Proposition 3.18. *Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G-espace homogène. Alors $\mathrm{Br}_G(Z)/\mathrm{Br}_1(Z)$ est fini.*

Démonstration. Ceci vaut car $\mathrm{Br}_G(Z)/\mathrm{Br}_1(Z)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Br}_{G_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}})$. □

Pour un corps de nombres, le lemme suivant est bien connu.

Lemme 3.19. *Supposons que k est un corps de nombres. Soit M un Γ_k-module de type fini avec $M \neq 0$. On a :*

(i) *si M est sans torsion, alors $H^2(k, M)$ est infini ;*
(ii) *M est sans torsion ssi $H^1(k, M)$ est fini.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Si M est fini, par l'approximation très faible de M (cf. le cas $G = 1$ de [Har07, Thm. 1]), il existe un sous-ensemble fini $S_0 \subset \Omega$ tel que, pour tout sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$ avec $S \cap S_0 = \emptyset$, l'homomorphisme $H^1(k, M) \to \bigoplus_{v \in S} H^1(k_v, M)$ soit surjectif. Il existe un nombre infini de $v \in \Omega_k$ tel que l'action de Γ_{k_v} sur M soit triviale. Dans ce cas, $H^1(k_v, M) \neq 0$. Donc $H^1(k, M)$ est infini.

En général, la suite exacte $0 \to M_{\mathrm{tor}} \to M \to M_{\mathrm{free}} \to 0$ induit une suite exacte

$$M_{\mathrm{free}}^{\Gamma_k} \xrightarrow{\vartheta} H^1(k, M_{\mathrm{tor}}) \to H^1(k, M),$$

où $M_{\mathrm{tor}} \subset M$ est le sous-module torsion maximal et $M_{\mathrm{free}} := M/M_{\mathrm{tor}}$. Ainsi M_{free} est de type fini et donc $\mathrm{Im}(\vartheta)$ est fini. Si $H^1(k, M)$ est fini, M est donc sans torsion. Par ailleurs, si M est sans torsion, $H^1(k, M)$ est fini. Ceci donne (ii).

Si M est sans torsion, la suite exacte $0 \to M \xrightarrow{n\cdot} M \to M/n \to 0$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$) induit une suite exacte : $H^1(k, M) \to H^1(k, M/n) \to H^2(k, M) \xrightarrow{n\cdot} H^2(k, M)$. Alors $H^1(k, M/n)$ est infini et (ii) implique (i). □

Lemme 3.20. *Supposons que k est un corps de nombres. Soit $\phi : M \to N$ un homomorphisme de Γ_k-modules de type fini sans torsion. Si $\mathrm{Ker}(H^2(k, M) \xrightarrow{\phi_*} H^2(k, N))$ est fini, alors ϕ est injectif et $\mathrm{coker}(\phi)$ est sans torsion.*

Démonstration. Notons $I := \mathrm{Im}(\phi)$, $K := \mathrm{Ker}(\phi)$ et $C := \mathrm{coker}(\phi)$. Alors I et K sont de type fini sans torsion et on a deux suites exactes :

$$H^1(k, I) \to H^2(k, K) \to H^2(k, M) \xrightarrow{\theta_1} H^2(k, I)$$

et

$$H^1(k, N) \to H^1(k, C) \to H^2(k, I) \xrightarrow{\theta_2} H^2(k, N).$$

Ainsi $H^1(k, I)$, $H^1(k, N)$ et $\mathrm{Ker}(\theta_1)$ sont finis. Alors $H^2(k, K)$ est fini et donc $K = 0$ (Lemme 3.19). Ainsi $\mathrm{Ker}(\theta_2)$ est fini. Alors $H^1(k, C)$ est fini et donc C est sans torsion (Lemme 3.19). □

Lemme 3.21. *Supposons que k est un corps de nombres. Soient G un groupe linéaire connexe, T un tore et $G \xrightarrow{\psi} T$ un homomorphisme. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *le groupe $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_1(T) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Br}_1(G))$ est fini ;*
(ii) *le morphisme ψ est surjectif de noyau connexe ;*
(iii) *la G-variété T est un pseudo G-espace homogène.*

Démonstration. D'après l'exemple 3.16(1), on a (ii) $\Rightarrow$ (iii). Par la phrase après la définition 3.15, on a (iii) $\Rightarrow$ (i). Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), puisque ψ se factorise par G^{tor}, on peut remplacer G par G^{tor} et supposer que G est un tore. Dans ce cas, puisque $\mathrm{Br}_a(T) \cong H^2(k, T^*)$, le noyau de $H^2(k, T^*) \xrightarrow{\psi^*} H^2(k, G^*)$ est fini. Le lemme 3.20 ci-dessus donne (ii). □

Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G-espace homogène (cf. Définition 3.15). Soient $(Z^{\mathrm{tor}})^* := \bar{k}[Z]^\times/\bar{k}^\times$ un Γ_k-module libre de type fini et Z^{tor} le tore correspondant. Pour tout $z \in Z(k)$, on a un morphisme canonique $Z \xrightarrow{\pi_z} Z^{\mathrm{tor}}$ tel que $\pi_z(z) = e_{Z^{\mathrm{tor}}}$ (Rosenlicht). Soit ψ_z la composition $G \to G \cdot z \hookrightarrow Z \xrightarrow{\pi_z} Z^{\mathrm{tor}}$.

Proposition 3.22. *Le morphisme ψ_z ne dépend pas du choix de z, et c'est un homomorphisme tel que Z^{tor} soit une G-variété et π_z soit un G-morphisme.*

De plus, si k est un corps de nombres, la G-variété Z^{tor} est un pseudo G-espace homogène.

Démonstration. Notons $\rho : G \times Z \to Z$ l'action de G. Par le lemme de Rosenlicht, ψ_z est un homomorphisme. D'après le lemme 2.6, on a un isomorphisme canonique

$$H^0_{e_G}(G, Z^{\mathrm{tor}}) \oplus H^0(Z, Z^{\mathrm{tor}}) \underset{\theta}{\overset{p_1^* \cdot p_2^*}{\rightleftarrows}} H^0(G \times Z, Z^{\mathrm{tor}}) : (\psi_z, \pi_z) \longmapsto \psi_z \cdot \pi_z$$

tel que $\theta(\pi_z \circ \rho) = ((\pi_z \circ \rho)|_{G \times z}, (\pi_z \circ \rho)|_{e_G \times Z}) = (\psi_z, \pi_z)$. Alors $\pi_z \circ \rho = \psi_z \cdot \pi_z$ et π_z est un G-morphisme.

Pour tout $z' \in Z(k)$, on a $\pi_{z'} = \pi_z(z')^{-1} \cdot \pi_z$ et donc $\theta(\pi_{z'} \circ \rho) = (\psi_z, \pi_z(z')^{-1} \cdot \pi_z)$. Ainsi $\psi_{z'} = \psi_z$.

La suite spectrale de Hochschild–Serre donne une suite exacte

$$\mathrm{Pic}(Z) \to \mathrm{Pic}(Z_{\bar{k}})^{\Gamma_k} \to \mathrm{Br}_1(Z^{\mathrm{tor}}) \xrightarrow{\pi_z^*|_{\mathrm{Br}_1}} \mathrm{Br}(Z).$$

Puisque $\mathrm{Pic}(Z_{\bar{k}})$ est de type fini et $\mathrm{Br}_1(Z^{\mathrm{tor}})$ est de torsion, le groupe $\mathrm{Ker}(\pi_z^*|_{\mathrm{Br}_1})$ est fini. Puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_G(Z) \xrightarrow{\rho_z^*} \mathrm{Br}(G))$ est fini, le groupe $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}_1(Z^{\mathrm{tor}}) \xrightarrow{\psi_z^*|_{\mathrm{Br}_1}} \mathrm{Br}(G))$ est fini. Si k est un corps de nombres, une application du lemme 3.21 donne l'énoncé. □

Définition 3.23. Dans la proposition 3.22, une fois qu'on a choisi $z \in Z(k)$, le morphisme $Z \xrightarrow{\pi} Z^{\mathrm{tor}}$ est appelé *le quotient torique maximal*. Il ne dépend du choix de z qu'à translation près. Si k est un corps de nombres, le morphisme $G \to Z^{\mathrm{tor}}$ dans la proposition 3.22 est surjectif de noyau G_0 connexe. Le groupe G_0 est appelé *le stabilisateur de G sur Z^{tor}*.

4. L'approximation forte hors des places archimédiennes et la question 1.2

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite, une variété est une k-variété. Soit G un groupe linéaire connexe. Pour répondre à la question 1.2, on établit le théorème 4.2. Comme conséquence, on montre le théorème 1.4(1).

Rappelons la notion de sous-groupe de Brauer invariant (cf. Définition 3.1).

Lemme 4.1. *Soit G un groupe linéaire connexe. Alors l'homomorphisme induit par l'accouplement de Brauer–Manin $G(\mathbf{A}_k)_\bullet \xrightarrow{\theta_G} \mathrm{Br}_a(G)^D$ est ouvert, où $(-)^D := \mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (1.2)).*

Démonstration. Dans $G(\mathbf{A}_k)_\bullet$, les sous-groupes ouverts compacts forment une base topologique de e_G. Pour tout tel sous-groupe C, l'image $\theta_G(C) \subset \mathrm{Br}_a(G)^D$ est compacte, et donc fermée. Il suffit alors de montrer que cette image est d'indice fini. Par la finitude du nombre de classes de G [PR94, Thm. 5.1], il existe un tel sous-groupe C_0 tel que le double quotient $C_0 \backslash G(\mathbf{A}_k)_\bullet / G(k)$ soit finie. Puisque $\text{Ш}^1(G)$ est fini, d'après [Dem11, Thm. 5.1], $\theta_G(C_0)$ est d'indice fini. Pour tout tel sous-groupe C, le quotient $C_0/(C \cap C_0)$ est fini, car C_0 est compact. Donc $\theta_G(C)$ est d'indice fini. □

Théorème 4.2. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une G-variété lisse géométriquement intègre et $U \subset X$ un G-ouvert. Soient $A \subset \mathrm{Br}(X)$ un sous-groupe fini et $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (3.1)) un sous-groupe. Supposons que $(B \cap \mathrm{Ker}(\lambda))/(B \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k))$ est fini, où $\mathrm{Br}_G(U) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(G)$ est l'homomorphisme de Sansuc (Définition 3.8). Alors, pour tout ouvert $W \subset X(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $W^{(A+B)\cap \mathrm{Br}(X)} \neq \emptyset$, on a $W \cap U(\mathbf{A}_k)^{A+B} \neq \emptyset$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On peut supposer que $\operatorname{Im}\operatorname{Br}(k) \subset B$. Après avoir rétréci W, on peut supposer que tout élément de A s'annule sur W et $W \cong W_\infty \times W_f$ avec $W_\infty \subset X(k_\infty)$, $W_f \subset X(\mathbf{A}_k^\infty)$ tel que W_f soit compact.

Pour tout $w \in W_f$, il existe un ouvert $W_w \subset W_f$ contenant w et un ouvert $C_w \subset G(\mathbf{A}^\infty)$ tel que $C_w \cdot W_w \subset W_f$. Puisque W_f est compact, il existe un sous-ensemble fini $I \subset W_f$ tel que $\bigcup_{w\in I} W_w = W_f$. Soit C_f le sous-groupe de $G(\mathbf{A}^\infty)$ engendré par $\bigcap_{w\in I} C_w$. Alors $C_f \cdot W_f \subset W_f$ et C_f est ouvert dans $G(\mathbf{A}^\infty)$. Soit $C := (e_G)_\infty \times C_f \subset G(\mathbf{A}_k)$. Alors $C \cdot W = W$ et l'image de C dans $G(\mathbf{A}_k)_\bullet$ est ouvert.

Notons $G(\mathbf{A}_k) \xrightarrow{\theta_G} \operatorname{Br}_a(G)^D$ et $U(\mathbf{A}_k) \xrightarrow{\theta_U} B^D$ les applications induites par l'accouplement de Brauer–Manin, où $(-)^D := \operatorname{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (1.2)). D'après le lemme 4.1, $\theta_G(C) \subset \operatorname{Br}_a(G)^D$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini. Puisque $(B \cap \operatorname{Ker}(\lambda))/(\operatorname{Im}\operatorname{Br}(k))$ est fini, $(\lambda^D \circ \theta_G)(C) \subset (B/\operatorname{Im}\operatorname{Br}(k))^D$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini, où l'homomorphisme

$$\lambda : B \subset \operatorname{Br}_G(U) \to \operatorname{Br}_e(G) = \operatorname{Br}_a(G) \quad \text{induit } \lambda^D := \operatorname{Hom}(\lambda, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : \operatorname{Br}_a(G)^D \to (B/\operatorname{Im}\operatorname{Br}(k))^D.$$

Donc il existe un sous-groupe fini $B_1 \subset B$ tel que

$$\operatorname{Ker}((B/\operatorname{Im}\operatorname{Br}(k))^D \xrightarrow{\vartheta} (B_1)^D) \subset (\lambda^D \circ \theta_G)(C), \tag{4.1}$$

où ϑ est induit par $B_1 \subset B \to B/\operatorname{Im}\operatorname{Br}(k)$.

D'après le lemme formel d'Harari [Har94, Cor. 2.6.1], $W \cap U(\mathbf{A}_k)^{B_1} \neq \emptyset$. On a le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
G(\mathbf{A}_k) \arrow[d, "\theta_G"] & U(\mathbf{A}_k) \arrow[d, "\theta_U"] & \\
\operatorname{Br}_a(G)^D \arrow[r, "\lambda^D"] & (B/\operatorname{Im}\operatorname{Br}(k))^D \arrow[r, "\vartheta"] & (B_1)^D
\end{tikzcd}$$

Soit $u \in W \cap U(\mathbf{A}_k)^{B_1}$, alors $\vartheta(\theta_U(u)) = 0$ et, d'après (4.1), il existe $g \in C$ tel que $g^{-1} \cdot u \in W$ et $(\lambda^D \circ \theta_G)(g) = \theta_U(u)$. D'après la proposition 3.9(1), on a $\theta_U(g^{-1} \cdot u) = 0$. □

Remarque 4.3. Dans le théorème 4.2, si $G = 1$, alors ce théorème est équivalent au lemme formel d'Harari [Har94, Cor. 2.6.1].

Comme conséquence directe, on a le suivant.

Corollaire 4.4. *Avec les hypothèses et notations du théorème 4.2, pour tout sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k$, s'il existe un ouvert X_1 de X tel que $U \subset X_1$ et X_1 satisfasse l'approximation forte par rapport à $\operatorname{Br}(X_1) \cap (A+B)$ hors de S, alors X satisfait l'approximation forte par rapport à $\operatorname{Br}(X) \cap (A+B)$ hors de S.*

Corollaire 4.5. *Avec les hypothèses et notations du théorème 4.2, s'il existe un ouvert X_1 de X tel que $U \subset X_1$ et $X_1(k)$ soit dense dans $X_1(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\operatorname{Br}(X_1)\cap(A+B)}$, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\operatorname{Br}(X)\cap(A+B)}$.*

Soit G un groupe linéaire connexe. Pour la notion de pseudo G-espace homogène, voir la Définition 3.15.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Théorème 4.6. *Soient G un groupe linéaire connexe et Z un pseudo G-espace homogène. Soient X une G-variété lisse, géométriquement intègre et $U \subset X$ un G-ouvert muni d'un G-morphisme $U \xrightarrow{f} Z$. Soient $A \subset \mathrm{Br}(X)$ et $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (3.1)) deux sous-groupes finis. Alors, pour tout ouvert $W \subset X(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $W^{\mathrm{Br}(X)\cap(A+B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$:*

(1) *on a $W \cap U(\mathbf{A}_k)^{A+B+f^*\mathrm{Br}_G(Z)} \neq \emptyset$;*

(2) *si $G(k_\infty)^+ \cdot Z(k)$ est dense dans $Z(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Z)}$, il existe $z \in Z(k)$ de fibre U_z tel que*

$$(G(k_\infty)^+ \cdot W) \cap U_z(\mathbf{A}_k)^{A+B} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Notons $\mathrm{Br}_G(Z) \xrightarrow{\lambda_Z} \mathrm{Br}_a(G)$, $\mathrm{Br}_G(U) \xrightarrow{\lambda_U} \mathrm{Br}_a(G)$ les homomorphismes de Sansuc (cf. Définition 3.8). Puisque $\mathrm{Ker}(\lambda_Z)/(\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k))$ est fini et $\lambda_Z = \lambda_U \circ f^*$, le quotient $(\mathrm{Ker}(\lambda_U) \cap (B + f^*\mathrm{Br}_G(Z)))/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k)$ est fini. Une application du théorème 4.2 donne (1).

D'après [Con12, Thm. 4.5], l'application $U(\mathbf{A}_k) \to Z(\mathbf{A}_k)$ est ouverte et on obtient (2). □

Démonstration du théorème 1.4(1). D'après un théorème de Kneser et Platonov (cf. [PR94, Thm. 7.12]), $G^{\mathrm{sc}}(k)$ est dense dans $G^{\mathrm{sc}}(\mathbf{A}_k^{\infty_k})$. Par la proposition 3.9(3) et l'approximation forte pour les espaces homogènes à stabilisateur géométrique connexe (Borovoi et Demarche [BD13, Thm. 1.4]), $U(k)$ est dense dans $U(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}_G(U)}$. Une application du théorème 4.6(2) au quintuple

$$(G, U \subset X, U \xrightarrow{f=\mathrm{id}_U} U, 0 \subset \mathrm{Br}(X), 0 \subset \mathrm{Br}_G(U))$$

donne l'énoncé. □

5. La descente par rapport au groupe de Brauer invariant

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété. La méthode de descente des points adéliques est établie par Colliot and Thélène et Sansuc dans [CS87b]. Dans [CDX16], Demarche, Xu et l'auteur étudient la méthode de descente des points adéliques orthogonaux à certains groupes de Brauer dans le cas des torseurs sous un tore. On suit leur méthode et considère ici le cas plus général des torseurs sous un groupe linéaire connexe (Théorème 5.9).

Pour la notion de sous-groupe de Brauer invariant, voir la définition 3.1.

5.1 Un cas spécial ($\text{Ш}^1(G) = 1$)

Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G-torseur (à gauche). Pour tout $\sigma \in Z^1(k, G)$, soient P_σ le G-torseur à droite correspondant et G_σ le tordu par 1-cocycle σ. Alors P_σ est un G_σ-torseur à gauche. Soit $Y_\sigma \xrightarrow{p_\sigma} X$ le tordu de Y, i.e. $Y_\sigma = P_\sigma \times^G Y$. Alors Y_σ est un G_σ-torseur à gauche sur X. Soit $\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ le sous-groupe de Brauer G_σ-invariant de Y_σ (Définition 3.1).

Lemme 5.1. *Supposons que $\text{Ш}^1(G) = 1$. Alors pour tout sous-groupe $B \subset \mathrm{Br}_G(Y)$, on a :*

$$p(Y(\mathbf{A}_k)^{p^*((p^*)^{-1}B)}) = p(Y(\mathbf{A}_k)^B),$$

où $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}(Y)$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Puisque $p^*((p^*)^{-1}B) \subset B$, on a $p(Y(\mathbf{A}_k)^B) \subset p(Y(\mathbf{A}_k)^{p^*((p^*)^{-1}B)})$.

Par le théorème 3.10, on a le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
(p^*)^{-1}B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}_a(G) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Br}(X) \arrow[r] & \mathrm{Br}_G(Y) \arrow[r, "\lambda"] & \mathrm{Br}_a(G)
\end{tikzcd}$$

Il induit un diagramme commutatif avec suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
G(\mathbf{A}_k) \arrow[d, "a_G"] & Y(\mathbf{A}_k) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "a_Y"] & X(\mathbf{A}_k) \arrow[d, "a_X"] \\
\mathrm{Br}_a(G)^D \arrow[r, "\lambda^D"] & B^D \arrow[r, "p^{*D}"] & ((p^*)^{-1}B)^D
\end{tikzcd}$$

où $(-)^D := \mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (1.2)) et a_G, a_Y, a_X sont induits par l'accouplement de Brauer–Manin. Par la proposition 3.9, pour tout $y \in Y(\mathbf{A}_k)$ et tout $g \in G(\mathbf{A}_k)$, on a

$$a_Y(g \cdot y) = (\lambda^D \circ a_G)(g) + a_Y(y).$$

Puisque $Ш^1(G) = 1$, par la suite exacte de Poitou-Tate de G (Demarche [Dem11, Thm. 5.1]), a_G est surjectif. Pour tout $y \in Y(\mathbf{A}_k)^{p^*((p^*)^{-1}B)}$, on a $x := p(y) \in X(\mathbf{A}_k)^{(p^*)^{-1}B}$. Alors $(p^{*D} \circ a_Y)(y) = a_X(x) = 0$ et il existe $g \in G(\mathbf{A}_k)$ tel que $(\lambda^D \circ a_G)(g) = a_Y(y)$. Donc $a_Y(g^{-1} \cdot y) = 0$ et $p(g^{-1} \cdot y) = x$. □

Proposition 5.2. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G-torseur. Soit $A \subset \mathrm{Br}(X)$ un sous-groupe et, pour chaque $\sigma \in H^1(k,G)$, soit $B_\sigma \subset \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ un sous-groupe. Supposons que $Ш^1(G) = 1$ et que, pour tout $\sigma \in H^1(k,G)$, on a $(p_\sigma^*)^{-1}(B_\sigma) \subset A$, où $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p_\sigma^*} \mathrm{Br}(Y_\sigma)$. Alors on a :*

$$X(\mathbf{A}_k)^A = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B_\sigma + p_\sigma^* A}).$$

Démonstration. Le résultat découle de [CDX16, Thm. 1.1] et du lemme 5.1. □

Corollaire 5.3. *Soit T un tore quasi-trivial. Soient X une variété lisse, géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un T-torseur. Soient $U \subset X$ un ouvert et $V = p^{-1}(U)$. Alors pour tous sous-groupes $A \subset \mathrm{Br}(U)$, $B \subset \mathrm{Br}_T(V)$, si $(p^*)^{-1}(B) \subset A$, où $\mathrm{Br}(U) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}(V)$, on a*

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X) \cap A} = p(Y(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(Y) \cap (B + p^* A)}).$$

Démonstration. Par le lemme 3.3, on a $(p^*)^{-1}(\mathrm{Br}(Y) \cap (p^*A + B)) = \mathrm{Br}(X) \cap A$. D'après la proposition 3.2, on a $(\mathrm{Br}(Y) \cap (p^*A + B)) \subset \mathrm{Br}_T(Y)$. L'énoncé résulte de la proposition 5.2. □

5.2 Applications des résolutions coflasques

Par [CS87a], un Γ_k-module M de type fini est appelé *coflasque* si M est sans torsion et, pour tout sous-groupe fermé $\Gamma \subset \Gamma_k$, on a $H^1(\Gamma, M) = 0$. Un k-tore T est appelé *coflasque* si T^* est coflasque. Alors $H^1(k, T^*) = 0$ et, pour tout $v \in \Omega_k$, on a $H^1(k_v, T^*) = 0$. On renvoie à [CS87a, Prop. 1.3] pour les résolutions par tores coflasque et tores quasi-triviaux.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Lemme 5.4. *Soit T un tore. Alors $H^3(k,T^*) \cong \prod_{v\in\infty_k} H^3(k_v,T^*) \cong \prod_{v\in\infty_k} H^1(k_v,T^*)$.*

Démonstration. Pour tout $v \in \infty_k$, puisque $\Gamma_{k_v} \cong \mathbb{Z}/2$, on a $H^3(k_v,T^*) = H^1(k_v,T^*)$. Par la ligne 3 de la démonstration de [HS05, Prop. 5.9], on a $H^3(k,T^*) = \prod_{v\in\infty_k} H^3(k_v,T^*)$. Le résultat en découle. □

Lemme 5.5. *Soit*

$$1 \to G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \to 1$$

une suite exacte de groupes linéaires connexes avec T un tore.

(1) *Si $H^3(k,T^*) = 0$, alors l'homomorphisme $\mathrm{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Br}_a(G)$ est surjectif.*
(2) *Si G est réductif, alors l'homomorphisme $\partial : T(k) \to H^1(k,G)$ induit par cette suite exacte vérifie $\mathrm{Im}(\partial) \subset \mathrm{Im}(H^1(k,Z(G)) \to H^1(k,G))$, où $Z(G)$ est le centre de G.*

Démonstration. Par la suite exacte de Sansuc [San81, Cor. 6.11], on a une suite exacte de Γ_k-modules

$$0 \to T^* \to H^* \to G^* \to 0$$

et un isomorphisme de Γ_k-modules $\mathrm{Pic}(H_{\bar{k}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(G_{\bar{k}})$. Par [CX09, Lem. 2.1] (modulo $H^2(k,\bar{k}^\times) \cong \mathrm{Br}(k)$), on a le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
H^2(k,H^*) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & \mathrm{Br}_a(H) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k,\mathrm{Pic}(H_{\bar{k}})) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^3(k,\bar{k}^\times \oplus H^*) \arrow[d, "\psi_2"] \\
H^2(k,G^*) \arrow[r] & \mathrm{Br}_a(G) \arrow[r] & H^1(k,\mathrm{Pic}(G_{\bar{k}})) \arrow[r] & H^3(k,\bar{k}^\times \oplus G^*)
\end{tikzcd}$$

Si $H^3(k,T^*) = 0$, alors ψ_1 est surjectif et ψ_2 est injectif. Ceci donne (1).

Pour (2), puisque G est réductif, H est réductif et l'homomorphisme $Z(H) \to H^{\mathrm{tor}}$ est surjectif. Donc la composition $Z(H) \to H \to T$ est surjective. Soit $S := Z(H) \cap G \subset Z(G)$. Ceci induit le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & S \arrow[r] \arrow[d] & Z(H) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & G \arrow[r] & H \arrow[r] & T \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\mathrm{Im}(\partial) \subset \mathrm{Im}(H^1(k,S) \to H^1(k,G))$ et on a (2). □

Proposition 5.6. *Soit G un groupe réductif connexe. Alors il existe un groupe réductif connexe H, un tore T et une suite exacte :*

$$1 \to G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \to 1$$

tels que $Ш^1(H) = 0$, $H^3(k,T^*) = 0$ et $\mathrm{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Br}_a(G)$ soit surjectif.

De plus, si G est un tore, on peut imposer que H soit un tore quasi-trivial.

Démonstration. Puisque G est réductif, il existe une suite exacte $0 \to S \to G \to G^{\mathrm{ad}} \to 0$ telle que S soit le centre de G et G^{ad} soit le groupe adjoint de G. Alors S est un groupe de type multiplicatif. Par [CS87a, Prop. 1.3], il existe un tore quasi-trivial T_0 et un homomorphisme

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

injectif $S \xrightarrow{\chi} T_0$ tels que $T := T_0/S$ soit un tore coflasque. Alors, pour tout $v \in \infty_k$, on a $H^1(k_v, T^*) = 0$. Par le lemme 5.4, on a $H^3(k, T^*) = 0$.

Soit $H := G \times^S T_0$. Alors H est un groupe linéaire et on a deux suites exactes

$$1 \to G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \to 1 \quad \text{et} \quad 1 \to T_0 \to H \to G^{\mathrm{ad}} \to 1.$$

Par le lemme 5.5(1), le morphisme $\mathrm{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Br}_a(G)$ est surjectif. Par [San81, Cor. 5.4], on a $Ш^1(G^{\mathrm{ad}}) = 0$. Puisque T_0 est quasi-trivial, on a $Ш^1(H) = 0$. □

Proposition 5.7. *Soit X une variété lisse géométriquement intègre. Supposons que $X(k) \neq \emptyset$ et que $\mathrm{Pic}(X_{\bar{k}})$ est de type fini. Alors il existe un tore quasi-trivial T et un T-torseur $Y \to X$ tels que $\mathrm{Pic}(Y_{\bar{k}}) = 0$ et $H^3(k, \bar{k}[Y]^\times/\bar{k}^\times) = 0$.*

Démonstration. Il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $\mathrm{Pic}(U_{\bar{k}}) = 0$. Soient T_0 un tore tel que $T_0^* := \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \setminus U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ et $Y_0 \to X$ le T_0-torseur induit par l'homomorphisme Ψ de la suite exacte (2.2). Par la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10], $\mathrm{Pic}(Y_{0,\bar{k}}) = 0$. Soit T_1 le tore tel que $T_1^* \cong \bar{k}[Y_0]^\times/\bar{k}^\times$. Puisque $X(k) \neq \emptyset$ et que T_0 est quasi-trivial, on a $Y_0(k) \neq \emptyset$. À un point de $Y_0(k)$ on associe un morphisme $Y_0 \xrightarrow{\pi} T_1$ (envoyant ce point sur e_{T_1}) tel que $T_1^* \xrightarrow{\pi^*} \bar{k}[Y_0]^\times/\bar{k}^\times$ soit un isomorphisme.

D'après [CS87a, Prop. 1.3], il existe une suite exacte $0 \to T_2 \to T_3 \to T_1 \to 0$ telle que T_2 soit quasi-trivial et que T_3 soit coflasque. Soit $Y := Y_0 \times_{T_1} T_3$ un T_2 torseur sur Y_0. Par la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10], $\mathrm{Pic}(Y_{\bar{k}}) = 0$, $\bar{k}[Y]^\times/\bar{k}^\times = T_3^*$ et, d'après le lemme 5.4, on a $H^3(k, \bar{k}[Y]^\times/\bar{k}^\times) = 0$.

Soit $T := T_0 \times T_2$. Puisque T_0, T_2 sont quasi-triviaux, on a $H^1(T_0, T_2) = 0$ et, d'après [Col08, Cor. 5.7], toute extension centrale de T_0 par T_2 est isomorphe à $T_0 \times T_2$. D'après le théorème 2.7, il existe une action de T sur Y compatible avec les actions T_2 sur Y et T_0 sur Y_0. Alors Y est un T-torseur sur X. □

5.3 Le cas général

Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G-torseur (à gauche). Pour tout $\sigma \in Z^1(k, G)$, soient P_σ le G-torseur à droite correspondant et G_σ le tordu par le 1-cocycle σ. Alors P_σ est un G_σ-torseur à gauche. Soit $Y_\sigma \xrightarrow{p_\sigma} X$ le tordu de Y, i.e. $Y_\sigma = P_\sigma \times^G Y$. Alors Y_σ est un G_σ-torseur à gauche sur X. Soit $\mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ le sous-groupe de Brauer G_σ-invariant de Y_σ (Définition 3.1).

Notons $\theta_Y^\sigma : P_\sigma \times Y \to Y_\sigma$. Le lemme 3.12 donne un isomorphisme canonique :

$$(p_1^*, p_2^*) : \ \mathrm{Br}_a(P_\sigma) \oplus \mathrm{Br}_G(Y)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k).$$

Ceci induit un morphisme canonique

$$\Theta_Y^\sigma : \ \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{(\theta_Y^\sigma)^*} \mathrm{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_G(Y)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k).$$

Soit $Q_{\sigma^{-1}}$ le torseur inverse de P_σ (cf. [Sko01, p. 20, Exemple 2]). Alors $Q_{\sigma^{-1}}$ est un G_σ-torseur à droite et aussi un G-torseur à gauche. Notons $\sigma^{-1} := [Q_{\sigma^{-1}}] \in H^1(k, G_\sigma)$. Pour tout G_σ-torseur à gauche $Y' \to X$, soit $Y'_{\sigma^{-1}} := Y' \times^{G_\sigma} Q_{\sigma^{-1}}$ (un G-torseur à gauche sur X).

Lemme 5.8. *On a $Y \cong (Y_\sigma)_{\sigma^{-1}}$ et l'homomorphisme Θ_Y^σ est un isomorphisme d'inverse $\Theta_{Y_\sigma}^{(\sigma^{-1})}$.*

Démonstration. On a $(Y_\sigma)_{\sigma^{-1}} = P_\sigma \times^{G_\sigma} P_\sigma \times^G Y \cong G \times^G Y \cong Y$. On a un isomorphisme canonique $P_\sigma \times Y \xrightarrow{p_1 \times \theta_Y^\sigma} P_\sigma \times Y_\sigma$ d'inverse $p_1 \times \theta_{Y_\sigma}^{(\sigma^{-1})}$. Par le lemme 3.12, on a :

$$\mathrm{Br}_a(P_\sigma) \oplus \mathrm{Br}_G(Y)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k)$$

et

$$\mathrm{Br}_a(P_\sigma) \oplus \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k) \cong \mathrm{Br}_{G_\sigma \times G}(P_\sigma \times Y_\sigma)/\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k).$$

Le résultat en découle. □

Pour un sous-groupe $B_\sigma \subset \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ contenant $\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k)$, on note $\widetilde{\Theta_Y^\sigma}(B_\sigma) \subset \mathrm{Br}_G(Y)$ l'image inverse de $\Theta_Y^\sigma(B_\sigma)$. Alors $\widetilde{\Theta_{Y_\sigma}^{(\sigma^{-1})}}(\widetilde{\Theta_Y^\sigma}(B_\sigma)) = B_\sigma$.

Théorème 5.9. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G-torseur. Soit $A \subset \mathrm{Br}(X)$ un sous-groupe et, pour chaque $\sigma \in H^1(k,G)$, soit $B_\sigma \subset \mathrm{Br}_{G_\sigma}(Y_\sigma)$ un sous-groupe contenant $\mathrm{Im}\,\mathrm{Br}(k)$. Supposons que, pour tout $\sigma \in H^1(k,G)$, on a*

$$(p_\sigma^*)^{-1}\Bigg(\sum_{\sigma' \in Ш^1(G_\sigma)} \widetilde{\Theta_{Y_\sigma}^{\sigma'}}(B_{\sigma+\sigma'})\Bigg) \subset A$$

où $\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p_\sigma^*} \mathrm{Br}(Y_\sigma)$ et $Y_{\sigma+\sigma'} := (Y_\sigma)_{\sigma'}$. Alors on a :

$$X(\mathbf{A}_k)^A = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B_\sigma + p_\sigma^* A}).$$

Démonstration. La démonstration ci-dessous suit celle de [CDX16, Thm. 4.1].

Par [CDX16, Thm. 1.1], il suffit de montrer que, pour tout $\sigma \in H^1(k,G)$, on a :

$$p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{p_\sigma^* A}) \subset \bigcup_{\sigma' \in Ш^1(G_\sigma)} p_{\sigma+\sigma'}(Y_{\sigma+\sigma'}(\mathbf{A}_k)^{B_{\sigma+\sigma'} + p_{\sigma+\sigma'}^* A}).$$

On peut supposer que $\sigma = 0$. Pour tout v, puisque $H^1(k_v, G^u) = 0$, le morphisme $Y(k_v) \to (G^{\mathrm{red}} \times^G Y)(k_v)$ est surjectif. Puisque $Ш^1(G) \cong Ш^1(G^{\mathrm{red}})$ [San81, Prop. 4.1] et que l'on a $\mathrm{Br}(Y) \cong \mathrm{Br}(G^{\mathrm{red}} \times^G Y)$ [CDX16, Lem. 2.1], on peut supposer que G est réductif.

Par la proposition 5.6, il existe un groupe linéaire connexe H, un tore T et une suite exacte :

$$1 \to G \xrightarrow{\psi} H \xrightarrow{\phi} T \to 1$$

tels que $Ш^1(H) = 0$, $H^3(k, T^*) = 0$ et $\mathrm{Br}_a(H) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Br}_a(G)$ soit surjectif. Par [Ser65, Prop. 36 du Chapitre 1], on a une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \to G(k) \to H(k) \to T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k,G) \to H^1(k,H),$$

telle que, pour tout $t \in T$, on ait $\partial(t) := [\phi^{-1}(t)]$. Alors $Ш^1(G) \subset \mathrm{Im}(\partial)$ et, pour tout $t \in T(k)$, on a $G_{\partial(t)} \cong G$ (Lemme 5.5(2)).

Soient $Y_H := H \times^G Y$ et $Y \xrightarrow{i} Y_H$ le morphisme canonique. Alors $Y_H \xrightarrow{p_H} X$ est un H-torseur sur X et $T \times^H Y_H \cong T \times X$. Alors on a un morphisme canonique $Y_H \xrightarrow{\mu} T$ tel que, pour tout $t \in T(k)$, on a $\mu^{-1}(t) \cong \phi^{-1}(t) \times^G Y \cong Y_{\partial(t)}$. Notons $\mu^{-1}(t) \xrightarrow{i_t} Y_H$. Par la définition de $\Theta_Y^{\partial(t)}$,

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

on a : $\Theta_Y^{\partial(t)} \circ i_t^* = i^*$. Par la proposition 3.13, le lemme 5.8 et la surjectivité de ψ^*, les morphismes $\mathrm{Br}_H(Y_H) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Br}_G(Y)$ et $\mathrm{Br}_H(Y_H) \xrightarrow{i_t^*} \mathrm{Br}_G(\mu^{-1}(t))$ sont surjectifs.

Notons
$$B := \mathrm{Br}_H(Y_H) \cap (i^*)^{-1}\Big(\sum_{\sigma \in \text{Ш}^1(G)} \widetilde{\Theta_Y^\sigma}(B_\sigma)\Big) \subset \mathrm{Br}_H(Y_H).$$

Alors $(p_H^*)^{-1}(B) \subset A$ et $B_{\partial(t)} \subset i_t^* B$. Puisque $\mu \circ i$ se factorise par $\operatorname{Spec} k$, on a $\mu^* \mathrm{Br}_1(T) \subset B$.

Pour un $y \in Y(\mathbf{A}_k)^{p^*A}$, par le lemme 5.1, il existe $y_1 \in Y_H(\mathbf{A}_k)^{B+p_H^*A}$ tel que $p_H(y_1) = p(y)$. Alors il existe $h \in H(\mathbf{A}_k)$ tel que $y_1 = h \cdot y$. Donc $\mu(y_1) \in \phi(H(\mathbf{A}_k)) \cap T(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T)}$.

Par [CDX16, Prop. 3.3], on a :
$$T(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(T)} = T(k) \cdot \phi(H(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(H)}).$$

Donc il existe $h_1 \in H(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(H)}$ tel que
$$t := \mu(h_1 \cdot y_1) \in T(k) \cap \phi(H(\mathbf{A}_k)).$$

Donc $\partial(t) \subset \text{Ш}^1(G)$. Puisque $\mathrm{Br}_H(H) = \mathrm{Br}_1(H)$ (Lemme 3.6), par la proposition 3.9(1),
$$y_2 := h_1 \cdot y_1 \in Y_H(\mathbf{A}_k)^{B+p_H^*A} \quad \text{et donc } y_2 \in \mu^{-1}(t)(\mathbf{A}_k)^{B_{\partial(t)}+p_{\partial(t)}^*A}.$$

Le résultat découle de $p_{\partial(t)}(y_2) = p_H(y_2) = p(y)$. □

Corollaire 5.10. *Sous les hypothèses du théorème 5.9, soit*
$$X(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, G) : \ z \mapsto [p^{-1}(z)]$$
le morphisme canonique. Supposons que pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, la variété Y_σ satisfait le principe de Hasse par rapport à $B_\sigma + p_\sigma^* A$. Alors
$$X(\mathbf{A}_k)^A = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Im}(\partial)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B_\sigma + p_\sigma^* A}).$$

Démonstration. Pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, si $Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{B_\sigma + p_\sigma^* A} \neq \emptyset$, alors on a $Y_\sigma(k) \neq \emptyset$ et donc $\sigma \in \mathrm{Im}(\partial)$. Le résultat en découle. □

Corollaire 5.11. *Soient G un groupe linéaire connexe, X une variété lisse géométriquement intègre et $Y \xrightarrow{p} X$ un G-torseur. Soit $\mathrm{Br}_1(X, Y) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y_{\bar{k}}))$. Alors on a :*
$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(X,Y)} = \bigcup_{\sigma \in H^1(k,G)} p_\sigma(Y_\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(Y_\sigma)}).$$

Démonstration. Pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, puisque le morphisme $\mathrm{Br}(Y_{\bar{k}}) \to \mathrm{Br}((P_\sigma \times Y)_{\bar{k}})$ est injectif, on a $\mathrm{Br}_1(X, Y_\sigma) \subset \mathrm{Br}_1(X, Y)$. Donc $\mathrm{Br}_1(X, Y_\sigma) = \mathrm{Br}_1(X, Y) = (p^*)^{-1} \mathrm{Br}_1(Y)$.

Pour tout $\sigma \in H^1(k, G)$, par le lemme 3.12 et le lemme 5.8, le morphisme Θ_Y^σ induit un isomorphisme $\mathrm{Br}_a(Y_\sigma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_a(Y)$. Donc $\widetilde{\Theta_Y^\sigma}(\mathrm{Br}_1(Y_\sigma)) = \mathrm{Br}_1(Y)$. Le résultat découle du théorème 5.9. □

Remarque 5.12. La démonstration du théorème 5.9 n'utilise pas l'approximation forte pour les espaces homogènes à stabilisateur géométrique connexe (Borovoi et Demarche [BD13, Thm. 1.4]), mais elle utilise [BD13, Thm. 2.8].

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Corollaire 5.13. *Soient G un groupe linéaire connexe, $G_0 \subset G$ un sous groupe fermé connexe et $Z := G_0\backslash G$. Notons $G \xrightarrow{\pi} Z$ la projection. Alors on a*

$$Z(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_G(Z)} = \pi(G(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1(G)}) \cdot Z(k).$$

Démonstration. Puisque $G \xrightarrow{\pi} Z$ est un G_0-torseur à gauche, pour tout $P_\sigma \in H^1(k, G_0)$ (un G_0-torseur à droite), le tordu $P_\sigma \times^{G_0} G$ est un G torseur à droite. Donc $P_\sigma \times^{G_0} G$ satisfait le principe de Hasse par rapport à $\mathrm{Br}_1(P_\sigma \times^{G_0} G)$ (Sansuc, cf. [Sko01, Thm. 5.2.1]). Le résultat découle du corollaire 5.10. □

C'est clair que le corollaire 5.13 vaut aussi pour $Z := G/G_0$.

6. La méthode de fibration et la question 1.3

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété. Pour traiter la question 1.3, on est amené à étudier la question :

Question 6.1. Soit G un groupe linéaire. Soient X et Z deux G-variétés lisses géométriquement intègres. Soient $U \subset X$ un G-ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G-morphisme. Soient $B \subset \mathrm{Br}(U)$ un sous-groupe fini, $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide et $W \subset X(\mathbf{A}_k)$ un ouvert. Sous quelles conditions peut-on montrer que, si $W^{\mathrm{Br}(U)\cap(B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, alors il existe $z \in Z(k)$ de fibre U_z tel que $((G(k_S) \cdot W) \cap U_z(\mathbf{A}_k))^B \neq \emptyset$?

Dans [CH16], Colliot-Thélène et Harari étudient la méthode de fibration au dessus de $\mathbb{A}^1$. On suit leur méthode et répond à la question 6.1 d'abord dans le cas où Z est un tore quasi-trivial et f s'étend à un morphisme de X vers une Z-variété torique standard (Théorème 6.7). Ensuite, en utilisant ce résultat, on résoud cette question dans le cas où Z est un tore (Théorème 6.9). En utilisant la descente (§ 5.1), on établit le théorème 6.11 dans le cas plus général où Z est un pseudo G-espace homogène. Ceci sera utilisé dans la § 7 pour traiter le cas d'un G-espace homogène Z à stabilisateur géométrique connexe.

6.1 L'approximation forte raffinée pour l'espace affine

Pour un ouvert U d'un espace affine $\mathbb{A}^n$ satisfaisant $\mathrm{codim}(\mathbb{A}^n\backslash U, \mathbb{A}^n) \geqslant 2$, l'approximation forte hors d'une place v_0 a été établie par Fei Xu et l'auteur dans [CX13, Prop. 3.6], et raffinée lorsque la place v_0 est archimédienne dans [CX15, Prop. 4.6 et Cor. 4.7], où l'on montre que $U(k) \cap T(k_{v_0})^+ \subset \mathbb{A}^n(k_{v_0})$ est dense dans $U(\mathbf{A}_k^{v_0})$ pour une variété torique ($T \hookrightarrow \mathbb{A}^n$) comme (6.1) ci-dessous. On généralise maintenant ce résultat au cas où v_0 est une place quelconque.

Théorème 6.2. *Soient K une k-algèbre finie séparable de degré n et*

$$(T \hookrightarrow \mathbb{A}^n) := (\mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{Res}_{K/k}\,\mathbb{A}^1) \tag{6.1}$$

la variété torique correspondante. Soit $U \subset \mathbb{A}^n$ un ouvert tel que $\mathrm{codim}(\mathbb{A}^n\backslash U, \mathbb{A}^n) \geqslant 2$. Soient v_0 une place et $D_{v_0} \subset T(k_{v_0})$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. Alors, pour tout ouvert $W \subset U(\mathbf{A}^{v_0})$ non vide et tout ouvert $W_0 \subset \mathbb{A}^n(k_{v_0})$ non vide D_{v_0}-invariant, on a

$$U(k) \cap (W_0 \times W) \neq \emptyset.$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Étape (0). Par approximation faible pour le tore quasi-trivial T, il existe un $\alpha \in T(k) \cap W_0$. Ainsi on a $D_{v_0} \subset \alpha^{-1} \cdot W_0$. En remplaçant U par $\alpha^{-1}U$ et W par $\alpha^{-1}W$, on peut supposer que $W_0 = D_{v_0}$. Si v_0 est complexe, on a $D_{v_0} = T(k_{v_0})$ et l'énoncé découle de [CX13, Prop. 3.6]. On suppose que v_0 n'est pas complexe.

Étape (1). Supposons que $v_0 \in \infty_k$ et $T = \mathbb{G}_m^n$. Puisque $D_{v_0} \subset T(k_{v_0})$ est ouvert et donc fermé, le sous-groupe D_{v_0} contient la composante connexe de l'identité de $T(k_{v_0})$. Ainsi l'énoncé est équivalent à [CX15, Prop. 4.6].

Étape (2). Supposons que $v_0 \notin \infty_k$, $n = 1$ et $T = \mathbb{G}_m$. On a $U = \mathbb{A}^1$. Par définition, Il existe un sous-ensemble fini $S \subset \Omega_k \backslash \{v_0\}$ contenant ∞_k, un élément $a_v \in k_v$ pour chaque $v \in S$ et $0 < \epsilon < 1$ tels que

$$\prod_{v \in S} \{x \in k_v : |x - a_v| < \epsilon\} \times \prod_{v \notin S \cup \{v_0\}} \mathcal{O}_v \subset W.$$

On fixe une uniformisante π_{v_0} de k_{v_0}. Pour le sous-groupe d'indice fini $D_{v_0} \subset k_{v_0}^\times$, il existe un entier $N > 0$ tel que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} (1 + \pi_{v_0}^N \mathcal{O}_{v_0}) \cdot \pi_{v_0}^{iN} \subset D_{v_0}.$$

Par approximation forte sur $\mathbb{A}^1$, il existe $\alpha, \beta \in k^\times$ tels que

$$\alpha \in k_{v_0} \times \prod_{v \in S} \left\{x \in k_v : |x - a_v| < \frac{1}{2}\epsilon\right\} \times \prod_{v \notin S \cup \{v_0\}} \mathcal{O}_v$$

et

$$\beta \in k_{v_0} \times \prod_{v \in S} \left\{x \in k_v : |x| < \frac{1}{2}\epsilon\right\} \times \prod_{v \notin S \cup \{v_0\}} \mathcal{O}_v.$$

D'après la formule du produit, $l := -v_0(\beta) > 0$ et donc $\pi_{v_0}^l \beta \in \mathcal{O}_{v_0}^\times$. Alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ assez grand tel que

$$(\beta \pi_{v_0}^l)^m \in (1 + \pi_{v_0}^N \mathcal{O}_{v_0}) \quad \text{et} \quad v_0(\alpha \beta^{-m}) > N.$$

Ainsi

$$\alpha + \beta^{mN} = \pi_{v_0}^{-mlN} (\beta \pi_{v_0}^l)^{mN} (1 + \alpha \beta^{-mN}) \in (1 + \pi_{v_0}^N \mathcal{O}_{v_0}) \pi_{v_0}^{-mlN} \subset D_{v_0}.$$

Ceci implique que $\alpha + \beta^{mN} \in D_{v_0} \times W$.

Étape (3). Supposons que $v_0 \notin \infty_k$, $T \cong \mathbb{G}_m^n$ et, sous cet isomorphisme, $D_{v_0} \cong \prod_{i=1}^n D_i$ avec $D_i \subset k_{v_0}^\times$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. On établit le résultat en utilisant la projection $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ sur le premier facteur. L'argument donné pour v_0 réel dans [CX15, Prop. 4.6] vaut pour tout v_0 en remplaçant $\mathbb{R}$ par D_1.

Étape (4). En général, d'après (1) et (3), il reste à montrer qu'il existe des sous-groupes ouverts $\{D_i\}_{i=1}^n$ de $k_{v_0}^\times$ d'indice fini et un isomorphisme

$$\psi : \operatorname{Res}_{K/k} \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \quad \text{tels que } \prod_{i=1}^n D_i \subset \psi(D_{v_0}).$$

Si v_0 est réel, ceci est établi dans la démonstration de [CX15, Cor. 4.7]. On peut alors supposer que $v_0 \notin \infty_k$ et $K = k(\theta)$ soit un corps.

Soit $\{w_j\}_j$ les places de K au-dessus de v_0 et, pour tout j, soient π_j une uniformisante de K_{w_j} et $\mathcal{O}_j$ l'anneau des entiers de K_{w_j} Pour π_{v_0} une uniformisante de k_{v_0} et pour chaque j,

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

soit $e_j := w_j(\pi_{v_0}) \leqslant n$. Puisque D_{v_0} est un sous-groupe ouvert de $T(k_{v_0}) \cong \prod_j K_{w_j}^\times$, il existe un entier $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que

$$\prod_j \biggl[\bigcup_{l\in\mathbb{Z}} (1+\pi_j^N \mathcal{O}_j)\pi_j^{lN}\biggr] \subset D_{v_0}. \tag{6.2}$$

Après avoir remplacé θ par $\theta + \pi_{v_0}^{-cN}$ avec $c \gg 0$ suffisamment divisible, on peut supposer que

$$w_j(\theta) = -e_j cN, \quad \theta\pi_j^{e_j cN} \in (1+\pi_j^N\mathcal{O}_j) \quad \text{et} \quad (\pi_{v_0}\pi_j^{-e_j})^c \in (1+\pi_j^N\mathcal{O}_j). \tag{6.3}$$

Soit $M := cn^2N$. Alors, pour tout j et tous entiers m, m' avec $0 \leqslant m < m' \leqslant n-1$, on a

$$|m'-m||w_j(\theta)| < ne_j cN \leqslant M \quad \text{et donc } 0 < (w_j(\theta^m) - w_j(\theta^{m'})) < M.$$

Donc, pour tous $\alpha, \alpha' \in k_{v_0}^\times$ satisfaisant $M|v_0(\alpha)$ et $M|v_0(\alpha')$, on a

$$w_j(\alpha\theta^m) \neq w_j(\alpha'\theta^{m'}) \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_j(\alpha') > w_j(\alpha) & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) < w_j(\alpha'\theta^{m'}), \\ w_j(\alpha) \geqslant w_j(\alpha') & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) > w_j(\alpha'\theta^{m'}). \end{cases} \tag{6.4}$$

Donc

$$\begin{cases} w_j(\alpha'\theta^{m'}) - w_j(\alpha\theta^m) > M - (m'-m)(-w_j(\theta)) & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) < w_j(\alpha'\theta^{m'}), \\ w_j(\alpha\theta^m) - w_j(\alpha'\theta^{m'}) > (m'-m)(-w_j(\theta)) & \text{si } w_j(\alpha\theta^m) > w_j(\alpha'\theta^{m'}). \end{cases} \tag{6.5}$$

L'élément θ induit un isomorphisme $\psi : \mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^n$, qui est défini par

$$\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1(A) = \sum_{i=0}^{n-1} A\theta^i \xrightarrow{\psi} \mathbb{A}^n(A) = A^n : \quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$$

pour toute k-algèbre A. Soit

$$D := \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} (1+\pi_{v_0}^N\mathcal{O}_{v_0})\pi_{v_0}^{lM} \subset k_{v_0}^\times$$

un sous-groupe ouvert d'indice fini. D'après (6.3), on a $D \subset \bigcup_{l\in\mathbb{Z}}(1+\pi_j^N\mathcal{O}_j)\pi_j^{lN}$. Pour tout j et tout $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in D^n$, il existe un $0 \leqslant i_j \leqslant n-1$ tel que

$$w_j(x_{i_j}\theta^{i_j}) = \min_{0\leqslant i\leqslant n-1}\{w_j(x_i\theta^i)\} = w_j\biggl(\sum_{i=0}^{n-1} x_i\theta^i\biggr),$$

où la deuxième égalité découle par (6.4). Pour $i \neq i_j$, d'après (6.5), on a

$$w_j(x_i\theta^i) - w_j(x_{i_j}\theta^{i_j}) \geqslant \begin{cases} (i-i_j)e_j cN \geqslant N & \text{si } i > i_j, \\ M - (i_j - i)e_j cN \geqslant N & \text{si } i < i_j. \end{cases}$$

Alors

$$\psi^{-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i\theta^i \in x_{i_j}\theta^{i_j}(1+\pi_j^N\mathcal{O}_j) \subset \bigcup_{l\in\mathbb{Z}}(1+\pi_j^N\mathcal{O}_j)\pi_j^{lN}.$$

D'après (6.2), on a $D^n \subset \psi(D_{v_0})$. $\square$

On rappelle la définition des variétés toriques standards [CX13, Déf. 2.12].

Définition 6.3. Soit K une k-algèbre finie séparable. La variété torique standard par rapport à K/k est la sous-variété torique $(\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m \hookrightarrow Z)$ de $(\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1)$ avec

$$Z := \mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1\backslash[(\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1\backslash\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{G}_m)_{\mathrm{sing}}].$$

Corollaire 6.4. *Soit $(T \hookrightarrow Z)$ une variété torique standard. Soient v_0 une place de k et $D_{v_0} \subset T(k_{v_0})$ un sous-groupe ouvert d'indice fini. Pour tout fermé $F \subset Z$ de codimension $\geqslant 2$ et tout ouvert non vide $W \subset (Z\backslash F)(\mathbf{A}_k)$, si $(D_{v_0}\cdot W)\cap(Z\backslash F)(\mathbf{A}_k) = W$, alors on a $T(k)\cap W \neq \emptyset$.*

Démonstration. Puisque $\mathrm{codim}(\mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1\backslash Z, \mathrm{Res}_{K/k}\mathbb{A}^1) \geqslant 2$, une application du théorème 6.2 donne le résultat. $\square$

6.2 Fibration sur une variété torique standard

On a besoin d'une généralisation du théorème de Tchebotarev 'géométrique' (Ekedahl [Eke90, Lem. 1.2]) :

Lemme 6.5. *Soient X, Y, Z des schémas intègres de type fini sur $\mathcal{O}_k$, et $Y \xrightarrow{p} X$, $X \xrightarrow{f} Z$ deux $\mathcal{O}_k$-morphismes. Supposons que f et $f\circ p$ sont lisses à fibres géométriquement intègres et p est fini étale galoisenne de groupe de Galois Γ. Soit C une classe de conjugaison de Γ et $c := |C|/|\Gamma|$. Pour chaque place $v \in \Omega_k$ et chaque $z \in Z(k(v))$, soit $N_C(z)$ le nombre de $x \in X_z(k(v))$ tel que le Frobenius Fr_x de x soit dans C. Alors*

$$\frac{N_C(z)}{|X_z(k(v))|} - c = O(|k(v)|^{-1/2})$$

où la constante dans $O(-)$ ne dépend ni de v ni de z.

Démonstration. Le résultat découle de la démonstration standard de [Eke90, Lem. 1.2] avec la formule des traces de Lefschetz

$$\sum_{x\in X_z(k(v))}\chi(\mathrm{Fr}_x) = \sum_{0\leqslant i\leqslant 2\dim(X_z)}(-1)^i\,\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}^*, H^i_c(X_{\bar z}, V_\chi)),$$

où V_χ est défini dans la démonstration de [Eke90, Lem. 1.2]. Puisque $R^if_!V_\chi$ est constructible et $H^i_c(X_{\bar z}, V_\chi) = (R^if_!V_\chi)_{\bar z}$, les dimensions des $H^i_c(X_{\bar z}, V_\chi)$ sont bornées uniformément. De plus, la valeur absolue de la valeur propre de Fr^* en $H^i_c(X_{\bar z}, V_\chi)$ est inférieure ou égale à $|k(v)|^{i/2}$. Le reste de la démonstration est la même que celle de [Eke90, Lem. 1.2]. $\square$

Lemme 6.6. *Soient Z un ouvert de $\mathbb{A}^n$ satisfaisant $\mathrm{codim}(\mathbb{A}^n\backslash Z, \mathbb{A}^n) \geqslant 2$ et V un ouvert de Z. Soient $\{C_i\}_{i\in I}$ les composantes connexes de $Z\backslash V$ et k_i la fermeture intégrale de k dans $k(C_i)$. Alors la suite exacte (3.3) induit un isomorphisme*

$$\partial : \mathrm{Br}_a(V) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i H^1(k_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \tag{6.6}$$

Démonstration. On peut supposer que $Z\backslash V$ est lisse. Puisque $\mathrm{codim}(\mathbb{A}^n\backslash Z, \mathbb{A}^n) \geqslant 2$, on a $\mathrm{Br}(Z) \cong \mathrm{Br}(k)$ et $H^i(Z_{\bar k}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = 0$ pour $i = 1, 2$. Puisque $V(k) \neq \emptyset$, le morphisme

$$H^3(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \to H^3(V, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \oplus H^3(Z_{\bar k}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

est donc injectif (suite spectrale de Hochschild–Serre). La suite exacte (3.3) induit un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Br}(Z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_i H^1(C_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(Z,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(V,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1) \\
\mathrm{Br}(Z_{\bar{k}})=0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(V_{\bar{k}}) \arrow[r] & \bigoplus_i H^1(C_{i,\bar{k}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] & H^3(Z_{\bar{k}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) &
\end{tikzcd}$$

d'où le résultat. □

Théorème 6.7. *Soient $(T \hookrightarrow Z)$ une variété torique standard, G un groupe linéaire connexe et $G \xrightarrow{\varphi} T$ un homomorphisme surjectif de noyau connexe. Soient X une G-variété lisse, géométriquement intègre et $X \xrightarrow{f} Z$ un G-morphisme lisse surjectif à fibres géométriquement intègres. Notons $U := X \times_Z T$. Soit $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (3.1)) un sous-groupe fini. Soient $v_0 \in \Omega_k$ une place et $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$ un sous-groupe d'indice fini. Alors, pour tout fermé $F \subset X$ de codimension $\geqslant 2$ et tout ouvert W de $(X\backslash F)(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $W^{\mathrm{Br}(X)\cap(B+f|_U^*\mathrm{Br}_e(T))} \neq \emptyset$, il existe $t \in T(k)$ de fibre $F_t \subset X_t$, tel que*

$$\mathrm{codim}(F_t,X_t) \geqslant 2 \quad et \quad (X_t\backslash F_t)(\mathbf{A}_k)^B \cap (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \neq \emptyset.$$

Démonstration. Puisque f est lisse, il existe un fermé $F_1 \subset Z$ tel que $f(X\backslash F) = Z\backslash F_1$.

Soient $\{C_i\}_{i\in I}$ les composantes connexes de $Z\backslash T$ et $D_i := X \times_Z C_i$ les composantes connexes de $X\backslash U$. Par hypothèse, les variétés C_i et D_i sont lisses intègres. D'après (3.3), on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Br}(X)\cap(B+f|_U^*\mathrm{Br}_e(T)) \to (B+f|_U^*\mathrm{Br}_e(T)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_i H^1(D_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Par le lemme 3.5, pour tout i, il existe un revêtement fini étale galoisien abélien $D_i' \xrightarrow{\pi_i} D_i$ tel que D_i' soit une G-variété intègre, π_i soit un G-morphisme et $\partial(b) \in H^1(D_i'/D_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Soient k_i la fermeture intégrale de k dans $k(C_i)$ et k_i' la fermeture intégrale de k dans $k(D_i')$. Par hypothèse, la fermeture intégrale k dans $k(D_i)$ est k_i. D'après [CX15, Prop. 2.2], le morphisme $D_i' \to C_i \times_{k_i} k_i'$ est lisse à fibres géométriquement intègres.

Soit $B_X := \mathrm{Br}(X)\cap(B+f|_U^*\mathrm{Br}_e(T))$. D'après le lemme 3.3, $(f|_U^*\mathrm{Br}_e(T))\cap\mathrm{Br}(X) = 0$ et donc B_X est fini. D'après la proposition 3.2(2) et (3), on a $B_X \subset \mathrm{Br}_G(X)$. D'après le lemme 6.6 pour T et la suite exacte (3.3), on a le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[r, "\partial_B"] \arrow[d] & \bigoplus_i H^1(D_i'/D_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & B_X \arrow[r] & (B+f|_U^*\mathrm{Br}_e(T)) \arrow[r, "\partial_0"] & \bigoplus_i H^1(D_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Br}_e(T)\cong\mathrm{Br}_a(T) \arrow[u, "f|_U^*"] \arrow[r, "\cong"] & \bigoplus_i H^1(k_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Alors $\mathrm{Im}(\partial_0) \subset \bigoplus_i H^1((D'_i \times_{k'_i} \bar{k})/D_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ceci induit le diagramme suivant commutatif de suites exactes.

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \bigoplus_i H^1(D'_i/(D_i \times_{k_i} k'_i), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & (B_X + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) \arrow[r] & (B + f|_U^* \mathrm{Br}_e(T)) \arrow[r, "\bar{\partial}"] & \bigoplus_i H^1((D'_i \times_{k'_i} \bar{k})/(D_i \times_{k_i} \bar{k}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd} \tag{6.7}$$

Soit $\mathrm{Br}_G(X) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Br}_e(G)$ l'homomorphisme de Sansuc (cf. Définition 3.8). Après avoir rétréci le sous-groupe d'indice fini $G(k_{v_0})^0$, on peut supposer que tout élément de $\lambda(B_X)$ s'annule sur $G(k_{v_0})^0$. Par la proposition 3.9, pour tout $x \in X(\mathbf{A}_k)$, on a que tout élément de B_X est constant sur $G(k_{v_0})^0 \cdot x$.

Soient $l := \dim(Z)$, $\Gamma_i := \mathrm{Gal}(D'_i/k'_i D_i)$ et $W_1 := (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap (X \backslash F)(\mathbf{A}_k)$.

Puisque T est quasi-trivial, il existe des extensions de corps L_j/k telles que $T \cong \mathrm{Res}_{\prod_j L_j/k} \mathbb{G}_m$. En fait, $\prod_j L_j \cong \prod_i k_i$, mais on ne l'utilise pas. Soit Ω_0 l'ensemble des places $v \in \Omega_k$ totalement décomposées dans la fermeture galoisienne de k'_i/k pour tout i et de L_j/k pour tout j. Alors Ω_0 est infini et pour tout $v \in \Omega_0$, on a $T_{k_v} \cong \mathbb{G}^l_{m,k_v}$. Par la définition 6.3, on a

$$Z_{k_v} \cong \mathrm{Spec}\, k_v[t_1, \ldots, t_l] \Big\backslash \bigcup_{n \neq m} V(t_n, t_m) \quad \text{et} \quad T_{k_v} \cong \mathrm{Spec}\, k_v[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_l, t_l^{-1}].$$

Soit S un sous-ensemble fini de Ω_k tel que $v_0 \cup \infty_k \subset S$. On agrandit S de façon à avoir les propriétés suivantes :

(a) Le k-morphisme f s'étend en un $\mathcal{O}_S$-morphisme lisse à fibres géométriquement intègres $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ de $\mathcal{O}_S$-schémas lisses, tel que pour tout point fermé $z \in \mathcal{Z} \backslash \mathcal{F}_1$, la fibre $f^{-1}(z)$ possède un $k(z)$-point $x \notin \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est l'adhérence de F dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{F}_1$ est l'adhérence de F_1 dans $\mathcal{Z}$. Ceci est possible par les estimées de Lang-Weil [Sko90, Thm. 1, étape 3]. Par le lemme de Hensel, pour tout $v \notin S$, l'application $(\mathcal{X} \backslash \mathcal{F})(\mathcal{O}_v) \to (\mathcal{Z} \backslash \mathcal{F}_1)(\mathcal{O}_v)$ est donc surjective.

(b) Les extensions k_i/k et k'_i/k_i induisent des revêtements finis étales $\mathcal{O}_{k_i,S}/\mathcal{O}_S$ et $\mathcal{O}_{k'_i,S}/\mathcal{O}_{k_i,S}$.

(c) Le sous-schéma $\mathcal{C}_i := \overline{C_i} \subset \mathcal{Z}$ est lisse à fibres géométriquement intègres sur $\mathcal{O}_{k_i,S}$. Soient $\mathcal{D}_i := \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X}$, $\mathcal{T} := \mathcal{Z} \backslash \bigcup_i \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{U} := \mathcal{T} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X}$.

(d) Les éléments de B_X appartiennent à $\mathrm{Br}(\mathcal{X})$ et les éléments de B appartiennent à $\mathrm{Br}(\mathcal{U})$.

(e) Le revêtement $D'_i \xrightarrow{\pi_i} D_i$ s'étend en un $\mathcal{O}_S$-revêtement fini étale galoisien abélien $\mathcal{D}'_i \to \mathcal{D}_i$ tel que $\mathcal{D}'_i$ soit un schéma sur $\mathcal{O}_{k'_i,S}$, les résidus des éléments de B soient dans $H^1(\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $\mathcal{D}'_i \to \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{O}_{k_i,S}} \mathcal{O}_{k'_i,S}$ soit lisse à fibres géométriquement intègres.

(f) Il existe un ouvert $W_2 \subset W_1 \subset (X \backslash F)(\mathbf{A}_k)$ tel que

$$W_2^{B_X} = W_2 \neq \emptyset, \quad W_2 = (G(k_{v_0})^0 \cdot W_2) \cap (X \backslash F)(\mathbf{A}_k) \quad \text{et} \quad W_2 = W_{v_0} \times W_{S \backslash v_0} \times \prod_{v \notin S} (\mathcal{X} \backslash \mathcal{F})(\mathcal{O}_v)$$

avec $W_{S \backslash v_0} \subset \prod_{v \in S \backslash \{v_0\}} (X \backslash F)(k_v)$ un ouvert et $W_{v_0} \subset (X \backslash F)(k_{v_0})$ un ouvert.

(g) Pour tout $v\in\Omega_0\backslash(\Omega_0\cap S)$, on note $\mathcal{C}_{i,v}:=\mathcal{C}_i\times_{\mathcal{O}_{k_i,S}}\mathcal{O}_v$, $\mathcal{D}_{i,v}:=\mathcal{D}_i\times_{\mathcal{O}_{k_i,S}}\mathcal{O}_v$ et $\mathcal{D}'_{i,v}:=\mathcal{D}'_i\times_{\mathcal{O}_{k'_i,S}}\mathcal{O}_v$. On a un diagramme commutatif de schémas intègres :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}'_{i,v} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{D}_{i,v} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{C}_{i,v} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{O}_v \arrow[d] \\
\mathcal{D}'_i \arrow[r] & \mathcal{D}_i\times_{\mathcal{O}_{k_i,S}}\mathcal{O}_{k'_i,S} \arrow[r] & \mathcal{C}_i\times_{\mathcal{O}_{k_i,S}}\mathcal{O}_{k'_i,S} \arrow[r] & \operatorname{Spec}\mathcal{O}_{k'_i,S}
\end{tikzcd} \tag{6.8}$$

De plus, on a $\Gamma_i\cong\mathrm{Gal}(\mathcal{D}'_i/(\mathcal{D}_i\times_{\mathcal{O}_{k_i,S}}\mathcal{O}_{k'_i,S}))\cong\mathrm{Gal}(\mathcal{D}'_{i,v}/\mathcal{D}_{i,v})$.

(h) Pour tout $v\in\Omega_0\backslash(\Omega_0\cap S)$, tout $\sigma\in\Gamma_i$ et tout $c\in\mathcal{C}_{i,v}(k(v))$ avec $c\notin\mathcal{F}_1$, la fibre $(\mathcal{D}_{i,v})_c$ possède un $k(v)$-point d avec $d\notin\mathcal{F}$ dont le Frobenius est σ. Ceci est possible en appliquant le lemme 6.5 à (6.8).

(i) Pour tout $v\in\Omega_0\backslash(\Omega_0\cap S)$, on note $(-)_{\mathcal{O}_v}:=(-)\times_{\mathcal{O}_{k,S}}\mathcal{O}_v$ et on a

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{O}_v}\cong\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v[t_1,\dots,t_l]\Big\backslash\bigcup_{n\neq m}V(t_n,t_m),\quad \mathcal{T}_{\mathcal{O}_v}\cong\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v[t_1,t_1^{-1},\dots,t_l,t_l^{-1}]$$

et il existe une partition $\{1,\dots,l\}=\coprod_i I_i$ telle que $\mathcal{C}_{i,\mathcal{O}_v}=\bigcup_{n\in I_i}V(t_n)\subset\mathcal{Z}$ et que $V(t_n)\cong\mathcal{C}_{i,v}$.

Pour chaque i, on choisit une place $v_i\in\Omega_0\backslash(\Omega_0\cap S)$ et un $n_i\in I_i$ tels que pour $i\neq j$, on ait $v_i\neq v_j$. Soient $\mathcal{C}_{i,n_i}:=V(t_{n_i})\subset\mathcal{C}_{i,\mathcal{O}_{v_i}}$, $\mathcal{D}_{i,n_i}:=\mathcal{C}_{i,n_i}\times_{\mathcal{Z}}\mathcal{X}$ et

$$E_i:=\{(t_1,\dots,t_l)\in\mathcal{O}_{v_i}^l : t_{n_i}\in m_{v_i}\backslash m_{v_i}^2 \text{ et } t_n\in\mathcal{O}_{v_i}^\times \text{ pour } n\neq n_i\}$$

un ouvert de $\mathcal{Z}(\mathcal{O}_{v_i})$. Alors $\mathcal{C}_{i,n_i}\cong\mathcal{C}_{i,v_i}$, $\mathcal{D}_{i,n_i}\cong\mathcal{D}_{i,v_i}$ et $\mathcal{D}'_i\times_{\mathcal{D}}\mathcal{D}_{i,n_i}\cong\coprod_{[k'_i:k_i]}\mathcal{D}'_{i,v_i}$. Donc le Frobenius en un point de $\mathcal{D}_{i,n_i}(k(v_i))$ pour le revêtement $\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i$ est dans Γ_i.

Pour tout $b\in B$ et tout $P_i\in\mathcal{X}(\mathcal{O}_{v_i})$ avec $f(P_i)\in E_i$, on a $\bar{P}_i:=P_i(k(v_i))\in\mathcal{D}_{i,n_i}(k(v_i))$. On a la formule [Har94, Cor. 2.4.3 et pp. 244–245] (voir [CH16, Formule (3.6)])

$$b(P_i)=\partial_i(b)(\mathrm{Fr}_{\bar{P}_i})\in\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \tag{6.9}$$

où $\mathrm{Fr}_{\bar{P}_i}\in\Gamma_i\subset\mathrm{Gal}(\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i)$ est le Frobenius en $\bar{P}_i$ pour le revêtement $\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i$ et

$$\partial_i:\mathrm{Br}(\mathcal{U})\xrightarrow{\partial}H^1(\mathcal{D}'_i/\mathcal{D}_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to H^1(\mathcal{D}'_{i,v_i}/\mathcal{D}_{i,v_i},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=\mathrm{Hom}(\Gamma_i,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Par la fonctorialité du résidu, l'application $\bar\partial$ de (6.7) satisfait $\bar\partial=\bigoplus_i\partial_i$.

Notons $T(k_{v_0})^0:=\varphi(G(k_{v_0})^0)$. Puisque $H^1(k_{v_0},\mathrm{Ker}(\varphi))$ est fini [PR94, Thm. 6.14], le sous-groupe $T(k_{v_0})^0\subset T(k_{v_0})$ est d'indice fini. D'après [Con12, Thm. 4.5], $f(W_2)$ est un ouvert de $(Z\backslash F_1)(\mathbf{A}_k)$. Pour tout $z\in(Z\backslash F_1)(k_{v_0})$, l'ouvert $(X_z\backslash F_z)(k_{v_0})$ est dense dans $X_z(k_{v_0})$. Donc

$$(T(k_{v_0})^0\cdot f(W_{v_0}))\cap(Z\backslash F_1)(k_{v_0})=f(W_{v_0})\quad\text{et}\quad(T(k_{v_0})^0\cdot f(W_2))\cap(Z\backslash F_1)(\mathbf{A}_k)=f(W_2).$$

Par le corollaire 6.4, il existe $t\in T(k)\cap f(W_2)$ tel que $t|_{v_i}\in E_i$ pour tout i et que $\mathrm{codim}(F_t,X_t)\geqslant 2$. Alors il existe $(P_v)\in W_2$ tel que $f(P_v)=t$.

Soit $t_i\in\mathcal{Z}(k(v_i))$ la spécialisation de t, alors $t_i\in\mathcal{C}_{i,n_i}(k(v_i))$ et $t_i\notin\mathcal{F}_1$. D'après (6.7), on a un diagramme avec suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_i((\mathcal{D}_{i,n_i})_{t_i}\backslash\mathcal{F}_{t_i})(k(v_i)) \arrow[d, "Fr"] & (X_t\backslash F_t)(\mathbf{A}_k)\cap W_2 \arrow[d, "a_U"] & \\
\bigoplus_i\Gamma_i \arrow[r, "\bar\partial^D"] & (B+f|_U^*\mathrm{Br}_e(T))^D \arrow[r, "\mathrm{Res}"] & (B_X+f|_U^*\mathrm{Br}_e(T))^D
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

où a_U est l'accouplement de Brauer–Manin, $(-)^D := \mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (cf. (1.2)) et, pour $u \in f^{-1}(t_i)$, l'élément $Fr(u)$ est son Frobenius. Donc Fr est surjectif par (h). Puisque $\mathrm{Res} \circ a_U = 0$, il existe $\{\sigma_i\}_i \in \bigoplus_i \Gamma_i$ tel que $\bar{\partial}^D(\{\sigma_i\}) = a_U(\{P_v\})$. Alors il existe $u_i \in ((\mathcal{D}_{i,n_i})_{t_i} \backslash \mathcal{F}_{t_i})(k(v_i))$ tel que $Fr(u_i) = Fr(\bar{P_{v_i}}) - \sigma_i$. Par le lemme de Hensel, il existe un point $Q_{v_i} \in (\mathcal{X}_t \backslash \mathcal{F}_t)(\mathcal{O}_{v_i})$ relevant u_i. Soit $Q_v := P_v$ pour tout v distinct de l'un des v_i. Par (6.9), $\{Q_v\} \in (X_t \backslash F_t)(\mathbf{A}_k)^B$. Donc $\{Q_v\} \in (X_t \backslash F_t)(\mathbf{A}_k)^B \cap (G(k_{v_0})^0 \cdot W)$, d'où le résultat. □

6.3 Fibration sur un tore

Lemme 6.8. *Soient X et Z deux variétés lisses géométriquement intègres, et $X \xrightarrow{f} Z$ un morphisme lisse surjectif à fibres géométriquement intègres. Soit $U \subset X$ un ouvert tel que $f|_U$ soit surjectif. Soient $W \subset X(\mathbf{A}_k)$ un ouvert et $x \in W$. Alors il existe $u \in W \cap U(\mathbf{A}_k)$ tel que $f(u) = f(x)$.*

Démonstration. Pour chaque $z \in Z$, la fibre X_z est lisse intègre et l'ouvert $U_z \subset X_z$ est donc dense. Soit $\{z_v\}_v = f(x)$. Pour chaque v, l'ouvert $U_{z_v}(k_v)$ est dense en $X_{z_v}(k_v)$. Puisque $f|_U$ est surjectif, le morphisme $f|_U$ est lisse à fibres géométriquement intègres. Après avoir fixé un modèle entier $\mathcal{U} \to \mathcal{Z}$ de $f|_U$, on a que, pour presque toute place v, le morphisme $\mathcal{U}(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{Z}(\mathcal{O}_v)$ est surjectif (la démonstration de [Con12, Thm. 4.5]). Le résultat en découle. □

Le théorème suivant, d'énoncé un peu technique, joue un rôle clé dans la démonstration du théorème 6.11.

Théorème 6.9. *Soient T, T_0 deux tores avec T_0 quasi-trivial, G un groupe linéaire connexe, $G \xrightarrow{\varphi} T_0 \times T$ un homomorphisme surjectif de noyau connexe et $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe. Soient X une G-variété lisse géométriquement intègre, $U \subset X$ un G-ouvert et $U \xrightarrow{f} T_0 \times T$ un G-morphisme. Soit $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (3.1)) un sous-groupe fini. Supposons que :*

1. *la composition $T_0^* \xrightarrow{p_1^*} T_0^* \times T^* \xrightarrow{f^*} \bar{k}[U]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}_X} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ est un isomorphisme ;*
2. *pour l'action de G_0 sur X, le morphisme $\bar{k}[X]^\times/\bar{k}^\times \to \bar{k}[G_0]^\times/\bar{k}^\times$ défini par Sansuc [San81, (6.4.1)] est injectif.*

Alors, pour tout $v_0 \in \Omega_k$, tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$ et tout ouvert $W \subset X(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $W^{\mathrm{Br}(X) \cap (B + f^* \mathrm{Br}_1(T_0 \times T))} \neq \emptyset$, il existe $t \in (T_0 \times T)(k)$ de fibre U_t, tel que

$$(G(k_{v_0})^0 \cdot G_0(k_\infty)^+ \cdot W) \cap U_t(\mathbf{A}_k)^B \neq \emptyset.$$

Démonstration. Par la proposition 2.3, après avoir remplacé f par $\widetilde{\phi} \circ f$ et φ par $\widetilde{\phi} \circ \varphi$ avec $\widetilde{\phi}$ un automorphisme de $T_0 \times T$, on peut supposer que :

(i) il existe une variété torique $(T_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^l)$ satisfaisant (2.1) ;

(ii) le morphisme f s'étend en un G-morphisme $X \xrightarrow{f_X} Z$ où $Z := \mathbb{A}^l \times T \supset T_0 \times T$;

(iii) on a $f_X(U) \subset T_0 \times T$ et un isomorphisme $\mathrm{Div}_{Z_{\bar{k}} \backslash (T_0 \times T)_{\bar{k}}}(Z_{\bar{k}}) \xrightarrow{f_X^*} \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$.

Soit $Z_0 := \mathbb{A}^l \backslash [(\mathbb{A}^l \backslash T_0)_{\mathrm{sing}}]$. Alors $(T_0 \hookrightarrow Z_0)$ est une variété torique standard et

$$Z_1 := Z_0 \times T \cong Z \backslash [(Z \backslash T_0 \times T)_{\mathrm{sing}}].$$

D'après la proposition 2.2, il existe un G-ouvert $X_1 \subset X$ tel que $f(X_1) \subset Z_1$, $X_1 \cap f_X^{-1}(T) = U$, $\operatorname{codim}(X \backslash X_1, X) \geqslant 2$, $\operatorname{Br}(X) \cong \operatorname{Br}(X_1)$ et que le morphisme $X_1 \xrightarrow{f_X|_{X_1}} Z_1$ soit lisse surjectif à fibres géométriquement intègres.

Notons $\phi : X \xrightarrow{f_X} \mathbb{A}^l \times T \xrightarrow{p_2} T$. Pour chaque $t \in T(k)$, notons $X_{1,t} := \phi^{-1}(t) \cap X_1$, $U_t := U \cap X_{1,t}$, $X_{1,t} \xrightarrow{i_t} X_1$ et $X_{1,t} \xrightarrow{f_t} Z_0$. On a le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
X_{1,t} \arrow[r, hook, "i_t"] \arrow[d, "f_t"] & X_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "f_X"'] \arrow[dd, bend left=60, "\phi"] & G \arrow[d, "\varphi"] \\
Z_0 \times t \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z_1 \cong Z_0 \times T \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{A}^l \times T \arrow[d] & T_0 \times T \arrow[d, "p_2"] \\
t \arrow[r, hook] & T \arrow[r, "="] & T & T
\end{tikzcd}$$

On a les propriétés ci-dessous :

(a) le morphisme f_t satisfait les hypothèses géométriques du théorème 6.7 par rapport à $\operatorname{Ker}(G \xrightarrow{p_2 \circ \varphi} T) \to T_0$;

(b) l'homomorphisme $G_0 \xrightarrow{p_2 \circ \varphi} T$ est surjectif et donc $(p_2 \circ \varphi)(G_0(k_\infty)^+) = T(k_\infty)^+$;

(c) soient $B_1 := B + f^* \operatorname{Br}_1(T_0 \times T)$ et $B_2 \subset (\operatorname{Br}(X) \cap B_1)$ un sous-groupe fini tels que le morphisme $B_2 \to (\operatorname{Br}(X) \cap B_1)/(\operatorname{Br}(X) \cap f^* \operatorname{Br}_1(T_0 \times T))$ soit surjectif, alors $i_t^* B \cap \operatorname{Br}(X_{1,t}) \subset i_t^* B_2$.

L'énoncé (a) est clair.

Pour (b), d'après [CX15, Prop. 2.2], ϕ est lisse surjectif à fibres géométriquement intègres. Donc $\bar{k}[T]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\phi^*} \bar{k}[X]^\times/\bar{k}^\times$ est injectif. Notons $\bar{k}[X]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\theta_X} \bar{k}[G_0]^\times/\bar{k}^\times$ et $\bar{k}[T]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\theta_T} \bar{k}[G_0]^\times/\bar{k}^\times$ les morphismes définis par Sansuc [San81, (6.4.1)]. Ainsi $\theta_T = \theta_X \circ \phi^*$ est injectif. Par l'argument de Sansuc [San81, p. 39], $\theta_T = ((p_2 \circ \varphi)|_{G_0})^*$. Alors $G_0 \xrightarrow{p_2 \circ \varphi} T$ est surjectif.

Pour (c), d'après le lemme 3.3, on a

$$\operatorname{Br}(X_1) \cap f^* \operatorname{Br}_1(T_0 \times T) \cong f_X^* \operatorname{Br}_1(Z_1) \cong \phi^* \operatorname{Br}_1(T) \quad \text{et} \quad B_1 \cap \operatorname{Br}(X_1) = B_2 + \phi^* \operatorname{Br}_1(T).$$

Par le corollaire 3.14, on a

$$i_t^* B_2 = i_t^*(B_2 + \phi^* \operatorname{Br}_1(T)) = i_t^*(B_1 \cap \operatorname{Br}(X_1)) = i_t^* B_1 \cap \operatorname{Br}(X_{1,t}) \supset i_t^* B \cap \operatorname{Br}(X_{1,t}).$$

Ceci donne (c).

On considère l'ouvert W de l'énoncé. Après avoir rétréci W, on peut supposer que tout élément de B_2 s'annule sur W.

On note $W_1 := W \cap X_1(\mathbf{A}_k)$. Soit $x \in W^{\phi^* \operatorname{Br}_1(T)}$. En appliquant le lemme 6.8 au triple $(X_1 \subset X, X \xrightarrow{\phi} T, W)$, on voit qu'il existe $x_1 \in W_1$, tel que $\phi(x_1) = \phi(x)$. Donc $W_1^{\phi^* \operatorname{Br}_1(T)} \neq \emptyset$ et $\phi(W_1)^{\operatorname{Br}_1(T)} \neq \emptyset$.

Soit $W_2 := G_0(k_\infty)^+ \cdot W_1$. D'après (b), on a $\phi(W_2) = T(k_\infty)^+ \cdot \phi(W_1)$. Puisque T satisfait l'approximation forte par rapport à $\operatorname{Br}_1(T)$ hors de ∞_k (Harari [Har08, Thm. 2]), il existe $t \in T(k) \cap \phi(W_2)$. Donc $X_{1,t}(\mathbf{A}_k) \cap W_2 \neq \emptyset$. Puisque l'accouplement de Brauer–Manin est constant sur $G_0(k_\infty)^+$, d'après (c), $(X_{1,t}(\mathbf{A}_k) \cap W_2)^{i_t^* B \cap \operatorname{Br}(X_{1,t})} \neq \emptyset$.

Soit $W_3 := G(k_{v_0})^0 \cdot W_2 \supset W_2$. D'après le théorème 6.7, il existe $u \in W_3 \cap U_t(\mathbf{A}_k)^{i_t^* B}$ tel que $f_t(u) \in T_0(k)$. $\square$

Corollaire 6.10. *Avec les hypothèses et notations du théorème 6.9, soit $F \subset X$ un sous-schéma fermé G_0-invariant de codimension $\geqslant 2$. Alors, pour tout $v_0 \in \Omega_k$ et tout $\tilde{W} \subset (X \backslash F)(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $\tilde{W}^{\mathrm{Br}(X) \cap (B + f^* \mathrm{Br}_1(T_0 \times T))} \neq \emptyset$, il existe un $t \in (T_0 \times T)(k)$ tel que*

$$\operatorname{codim}(F \cap U_t, U_t) \geqslant 2 \quad \textit{et} \quad (G(k_{v_0})^0 \cdot G_0(k_\infty)^+ \cdot \tilde{W}) \cap (U_t \backslash (F \cap U_t))(\mathbf{A}_k)^B \neq \emptyset.$$

Démonstration. Avec les constructions et notations de la démonstration du théorème 6.9, soit

$$\tilde{W}_1 := \tilde{W} \cap (X_1 \backslash F)(\mathbf{A}_k), \quad \tilde{W}_2 := G_0(k_\infty)^+ \cdot \tilde{W}_1 \quad \text{et} \quad \tilde{W}_3 := (G(k_{v_0})^0 \cdot \tilde{W}_2) \cap (X_1 \backslash F)(\mathbf{A}_k).$$

Le résultat découle du même argument que dans la démonstration du théorème 6.9, en remplaçant W_1, W_2, W_3 par $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3$. □

6.4 Fibration sur un pseudo espace homogène

Soit G un groupe linéaire connexe. Rappelons la notion de pseudo G-espace homogène (cf. Définition 3.15). Soit Z un pseudo G-espace homogène, on peut définir son quotient torique maximal $Z \xrightarrow{\pi} Z^{\mathrm{tor}}$ et le stabilisateur de G sur Z^{tor} (cf. Définition 3.23).

Théorème 6.11. *Soient G un groupe linéaire connexe, Z un pseudo G-espace homogène, $Z \xrightarrow{\pi} Z^{\mathrm{tor}}$ le quotient torique maximal et G_0 le stabilisateur de G sur Z^{tor}. Soit X une G-variété lisse géométriquement intègre telle que $\bar{k}[X]^\times / \bar{k}^\times = 0$. Soient $U \subset X$ un G-ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G-morphisme. Soient $A \subset \mathrm{Br}(X)$, $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (3.1)) deux sous-groupes finis. Pour tout ouvert $W \subset X(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $W^{\mathrm{Br}(X) \cap (A + B + f^* \mathrm{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, on a :*

(1) *pour toute place $v_0 \in \Omega_k$ et tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$, il existe un $t \in Z^{\mathrm{tor}}(k)$ de fibre $U_t \xrightarrow{f_t} Z_t$, tel que*
$$(G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap U_t(\mathbf{A}_k)^{A + B + f_t^* \mathrm{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset;$$

(2) *s'il existe un sous-ensemble fini non vide $S \subset \Omega_k$ tel que, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G_0(k_S)^0 \subset G_0(k_S)$ et tout $t \in Z^{\mathrm{tor}}(k)$ de fibre Z_t, l'adhérence $\overline{G_0(k_S)^0 \cdot Z_t(k)}$ contient $Z_t(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_0}(Z_t)}$, alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$, il existe un $z \in Z(k)$ de fibre U_z tel que $(G(k_S)^0 \cdot W) \cap U_z(\mathbf{A}_k)^{A+B} \neq \emptyset$.*

Démonstration. On considère (1).

Soient T_0 un tore tel que $T_0^* \cong \mathrm{Div}_{X_{\bar{k}} \backslash U_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ et $Y_0 \to X$ le T_0-torseur induit par l'homomorphisme Ψ de la suite exacte (2.2).

D'après la proposition 5.7, il existe un tore quasi-trivial T_1 et un T_1-torseur $Z_1 \xrightarrow{p_{1,Z}} Z$ tels que $\mathrm{Pic}(Z_{1,\bar{k}}) = 0$ et $H^3(k, \bar{k}[Z_1]^\times / \bar{k}^\times) = 0$. Par le théorème 2.7, il existe un groupe linéaire connexe H muni d'un homomorphisme surjectif $H \to G$ de noyau central T_1 tel que Z_1 soit une H-variété et que $p_{1,Z}$ soit un H-morphisme. De plus, $Z_1(k) \neq \emptyset$ et, d'après la proposition 3.17, Z_1 est un pseudo H-espace homogène.

Soient $T_2 := T_0 \times T_1$ et $V_1 := U \times_Z Z_1$ un T_1-torseur sur U. Puisque T_1 est quasi-trivial, d'après [CS87b, Rem. 1.6.3], l'homomorphisme $H^1(X, T_1) \to H^1(U, T_1)$ est surjectif. Ainsi il existe un T_1-torseur $Y_1 \to X$ tel que $[Y_1]_U = [V_1]$. L'isomorphisme canonique

$$\theta : H^1(X, T_0) \oplus H^1(X, T_1) \to H^1(X, T_2)$$

donne un T_2-torseur $Y \to X$ tel que $[Y] = \theta([Y_0], [Y_1])$. Maintenant on obtient des T_1-torseurs $Z_1 \to Z$, $V_1 \to U$ et des T_2-torseurs $Y \to X$, $V \to U$ tels que $f^*[Z_1] = [V_1]$, $[Y]|_U = [V]$ et $[V] = [T_0 \times V_1]$.

Par le théorème 2.7, le corollaire 2.8 et le corollaire 2.9, il existe un homomorphisme surjectif $T_0 \times H \xrightarrow{\psi} G$ de noyau central T_2 et un diagramme commutatif de $T_0 \times H$-variétés et de $T_0 \times H$-morphismes :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & V \arrow[l, hook'] \arrow[d, "p"] \arrow[r, "\tau"'] \arrow[rrr, bend left, "f_V"] & T_0 \times V_1 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & T_0 \times Z_1 \arrow[r, "\mathrm{id}\times\pi_1"'] \arrow[d, "p_Z"] & T_0 \times Z_1^{\mathrm{tor}} \arrow[d, "p_{Z^{\mathrm{tor}}}"] \\ X & U \arrow[l, hook'] \arrow[r, "="] & U \arrow[r, "f"] & Z \arrow[r, "\pi"] & Z^{\mathrm{tor}} \end{tikzcd} \tag{6.10}$$

où τ est une trivialisation, $Z_1 \xrightarrow{\pi_1} Z_1^{\mathrm{tor}}$ est le quotient torique maximal, $f_V := (\mathrm{id} \times \pi_1) \circ f_1 \circ \tau$ est la composition et $p_Z := p_{1,Z} \circ p_2$.

Montrons :

(a) on peut supposer que la composition

$$T_0^* \xrightarrow{p_1^*} \bar{k}[T_0 \times V_1]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\tau^*} \bar{k}[V]^\times/\bar{k}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}_{Y_{\bar{k}} \setminus V_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}})$$

est un isomorphisme ;

(b) le stabilisateur H_0 de H sur Z_1^{tor} est connexe et donc les morphismes f_V, π, π_1 et $\pi \circ f$ sont lisses à fibres géométriquement intègres [CX15, Prop. 2.2] ;

(c) on a

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)\cap(B+f^*\,\mathrm{Br}_G(Z))} = p(Y(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(Y)\cap[p^*B+(f_1\circ\tau)^*\,\mathrm{Br}_{T_0\times H}(T_0\times Z_1)]}); \tag{6.11}$$

(d) il existe un sous groupe fini $B_1 \subset \mathrm{Br}_{T_0\times H}(V)$ tel que

$$B_1 + f_V^*\,\mathrm{Br}_1(T_0 \times Z_1^{\mathrm{tor}}) = (f_1 \circ \tau)^*\,\mathrm{Br}_{T_0\times H}(T_0 \times Z_1) \subset \mathrm{Br}(V);$$

(e) pour tout $(t_0, t_1) \in (T_0 \times Z_1^{\mathrm{tor}})(k)$, la restriction $\mathrm{Br}_{T_0\times H}(T_0 \times Z_1) \twoheadrightarrow \mathrm{Br}_{H_0}(Z_{1,t_1})$ est surjective, où $V_{(t_0,t_1)} \xrightarrow{f_1|_{(t_0,t_1)}} t_0 \times Z_{1,t_1} \to (t_0, t_1)$ est la fibre de $V \xrightarrow{f_1\circ\tau} T_0 \times Z_1 \to T_0 \times Z_1^{\mathrm{tor}}$.

L'énoncé (a) résulte de la proposition 2.5. La proposition 3.22 et le lemme 3.21 donnent(b).

Pour (c), puisque $\mathrm{Pic}(T_2) = 0$ (car T_2 est quasi-trivial), par le corollaire 3.11 et la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10], on a deux diagrammes commutatifs de suites exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Br}_G(Z) \arrow[r, "p_Z^*|_{\mathrm{Br}_G}"] \arrow[d, "f^*|_{\mathrm{Br}_G}"] & \mathrm{Br}_{T_0\times H}(T_0 \times Z_1) \arrow[r] \arrow[d, "(f_1\circ\tau)^*|_{\mathrm{Br}_{T_0\times H}}"] & \mathrm{Br}_a(T_2) \arrow[d, "="] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Br}_G(U) \arrow[r, "p^*|_{\mathrm{Br}_G}"] & \mathrm{Br}_{T_0\times H}(V) \arrow[r] & \mathrm{Br}_a(T_2) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(Z) \arrow[r, "p_Z^*"] \arrow[d, "f^*"] & \mathrm{Br}(T_0 \times Z_1) \arrow[d, "(f_1\circ\tau)^*"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(U) \arrow[r, "p^*"] & \mathrm{Br}(V) \end{tikzcd}$$

et $(p^*)^{-1}\,\mathrm{Br}_{T_0\times H}(V) = \mathrm{Br}_G(U)$. Donc $(p^*)^{-1}((f_1 \circ \tau)^*\,\mathrm{Br}_{T_0\times H}(T_0 \times Z_1)) = f^*\,\mathrm{Br}_G(Z)$. Une application du corollaire 5.3 au torseur $Y \xrightarrow{p} X$ sous le tore quasi-trivial T_2 et aux sous-groupes :

$$(B + f^*\,\mathrm{Br}_G(Z)) \subset \mathrm{Br}(U) \quad \text{et} \quad (f_1 \circ \tau)^*\,\mathrm{Br}_{T_0\times H}(T_0 \times Z_1) \subset \mathrm{Br}_{T_0\times H}(V) \subset \mathrm{Br}_{T_2}(V)$$

donne (c).

Pour (d), par la construction, on a $\bar{k}[Z_1^{\mathrm{tor}}]^\times \cong \bar{k}[Z_1]^\times$, $\mathrm{Pic}(Z_{1,\bar{k}}) = 0$ et $Z_1(k) \neq \emptyset$. Par la suite spectrale de Hochschild–Serre et [San81, Lem. 6.6], on a $\mathrm{Br}_1(T_0 \times Z_1^{\mathrm{tor}}) \cong \mathrm{Br}_1(T_0 \times Z_1)$. L'énoncé (d) découle de la proposition 3.18.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

Pour (e), puisque $H^3(k, Z_1^{\mathrm{tor},*}) = 0$, d'après le lemme 5.5, le morphisme $\mathrm{Br}_a(H) \to \mathrm{Br}_a(H_0)$ est surjectif. La proposition 3.13 donne (e).

On considère l'ouvert W de l'énoncé. Après avoir rétréci W, on peut supposer que tout élément de A s'annule sur W. D'après (c) et (d), on a $(p^{-1}(W))^{\mathrm{Br}(Y)\cap(p^*B+B_1+f_V^*\mathrm{Br}_1(T_0\times Z_1^{\mathrm{tor}}))} \neq \emptyset$.

Par la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10] et l'hypothèse $\bar{k}[X]^\times/\bar{k}^\times = 0$, le morphisme canonique $\bar{k}[Y]^\times/\bar{k}^\times \to \bar{k}[T_2]^\times/\bar{k}^\times$ est injectif. Puisque $p^*B + B_1 \subset \mathrm{Br}_{T_0\times H}(V)$ est fini, une application du théorème 6.9 au quintuple

$$(T_0 \times H \to T_0 \times Z_1^{\mathrm{tor}}, T_2 \subset T_0 \times H, V \subset Y, V \xrightarrow{f_V} T_0 \times Z_1^{\mathrm{tor}}, p^*B + B_1) \tag{6.12}$$

montre qu'il existe

$$v \in [(T_0\times H)(k_{v_0})^0 \cdot T_2(k_\infty)^+ \cdot p^{-1}(W)] \cap V(\mathbf{A}_k)^{p^*B+B_1} \quad \text{tel que } (t_0, t_1) := f_V(v) \in (T_0\times Z_1^{\mathrm{tor}})(k),$$

où $(T_0 \times H)(k_{v_0})^0 := \psi^{-1}(G(k_{v_0})^0)$.

D'après (d) et (e) on a $v \in V_{(t_0,t_1)}(\mathbf{A}_k)^{p^*B+f_1|^*_{(t_0,t_1)}\mathrm{Br}_{H_0}(Z_{1,t_1})}$. Donc $t := \pi_{Z^{\mathrm{tor}}}((t_0,t_1)) \in Z^{\mathrm{tor}}(k)$ et $u := p(v) \in (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap U_t(\mathbf{A}_k)^{B+f^*\mathrm{Br}_{G_0}(Z_t)}$. Ce qui donne (1).

On considère (2).

Fixons $v_0 \in S$. On a le plongement canonique de groupes $G(k_{v_0}) \subset G(k_S)$. Puisque $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ est ouvert d'indice fini, les sous-groupes

$$G(k_{v_0})^0 := G(k_S)^0 \cap G(k_{v_0}) \subset G(k_{v_0}) \quad \text{et} \quad G_0(k_S)^0 := G(k_S)^0 \cap G_0(k_S) \subset G_0(k_S)$$

sont ouverts d'indice fini. Pour tout $t \in Z^{\mathrm{tor}}(k)$, l'ensemble $W_t := (G(k_{v_0})^0 \cdot W) \cap U_t(\mathbf{A}_k)^{A+B}$ est ouvert dans $U_t(\mathbf{A}_k)$. D'après (1), il existe $t \in Z^{\mathrm{tor}}(k)$ tel que $W_t^{f^*\mathrm{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset$ et donc $f_t(W_t)^{\mathrm{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset$. D'après [Con12, Thm. 4.5], $f_t(W_t) \subset Z_t(\mathbf{A}_k)$ est ouvert. Par hypothèse, il existe $z \in Z_t(k) \cap f_t(G_0(k_S)^0 \cdot W_t)$ et ceci établit (2). □

Remarque 6.12. On peut établir le théorème 4.6 par la méthode de la démonstration du théorème 6.11. Mais l'argument donné au § 4 est plus simple.

Corollaire 6.13. *Avec les hypothèses et notations du théorème 6.11, soit $F \subset X$ un sous-schéma fermé de codimension $\geqslant 2$. Alors, pour tout $v_0 \in \Omega_k$, tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_{v_0})^0 \subset G(k_{v_0})$ et tout ouvert $\tilde{W} \subset (X\backslash F)(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $\tilde{W}^{\mathrm{Br}(X)\cap(A+B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, il existe un $t \in Z^{\mathrm{tor}}(k)$ tel que*

$$\mathrm{codim}(F\cap U_t, U_t) \geqslant 2 \quad \textit{et} \quad (G(k_{v_0})^0 \cdot \tilde{W}) \cap (U_t\backslash(F\cap U_t))(\mathbf{A}_k)^{B+A+f_t^*\mathrm{Br}_{G_0}(Z_t)} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Avec les constructions et notations de la démonstration du théorème 6.11, d'après (6.11), on a

$$(X\backslash F)(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)\cap(B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))} = p((Y\backslash p^{-1}F)(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(Y)\cap(p^*B+B_1+f_V^*\mathrm{Br}_1(T_0\times Z_1^{\mathrm{tor}}))}).$$

Une application du corollaire 6.10 au quintuple (6.12) donne le résultat. □

7. Le résultat principal

Dans toute cette section, k est un corps de nombres. Sauf mention explicite du contraire, une variété est une k-variété. Dans cette section, on établit le résultat principal : le théorème 7.6 (ou le théorème 7.5 sur la version de la fibration).

Rappelons la notion de sous-groupe de Brauer invariant (cf. Définition 3.1).

Soit G un groupe linéaire connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini. On considère tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0$ de $G(k_S)$. Alors $G(k_S)^0$ est fermé dans $G(k_S)$ et on a directement :

Lemme 7.1. *Si $S = \infty_k$, alors $G(k_\infty)^+ \subset G(k_\infty)$ est un sous-groupe ouvert d'indice fini et tout tel sous-groupe $G(k_S)^0$ contient $G(k_\infty)^+$.*

Lemme 7.2. *Soit G un groupe linéaire connexe et simplement connexe. Soit $v \in \Omega_k$ une place. Supposons que G est unipotent ou que G est semi-simple et absolument simple avec $G(k_v)$ non compact. Alors $G(k_v)$ ne possède pas de sous-groupe ouvert d'indice fini non-trivial.*

Démonstration. Si $G \cong \mathbb{G}_a$, ceci vaut car $G(k_v) \cong k_v$ est uniquement divisible. Dans le cas où G est unipotent, ceci vaut car il existe une filtration de G de facteurs $\mathbb{G}_a$ [Bor91, Cor. 15.5(ii)]. Ceci vaut aussi pour tout tel G défini sur k_v.

Dans le cas où G est semi-simple, simplement connexe et absolument simple avec $G(k_v)$ non compact, si $v \in \infty_k$, ceci vaut par E. Cartan (cf. [PR94, Prop. 7.6]). Si $v \notin \infty_k$, ceci vaut car $G(k_v)$ est engendré par les k_v-points des sous-groupes unipotents de G sur k_v (la conjecture de Kneser–Tits établie par Platonov, cf. [PR94, Thm. 7.6]). □

Proposition 7.3. *Soit G un groupe linéaire connexe et simplement connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc}. Alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ et tout G-torseur P sur k, l'ensemble $G(k_S)^0 \cdot P(k)$ est dense dans $P(\mathbf{A}_k)$.*

Démonstration. On peut supposer que $P(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$. Puisque $\mathrm{Br}_a(G) = 0$, par le principe de Hasse pour un G-torseur (Kneser, Harder et Chernousov, cf. [Sko01, Thm. 5.1.1(e)]), on a $P(k) \neq \emptyset$. Alors on peut supposer que $G \cong P$.

Si G est soit unipotent soit semi-simple, simplement connexe et absolument simple, par hypothèse il existe une place $v \in S$ tel que $G(k_v)$ soit non compact. D'après le lemme 7.2, $G(k_v)^0 := G(k_S)^0 \cap G(k_v)$ est exactement $G(k_v)$. Une application de l'approximation forte de G (Kneser, Platonov, cf. [PR94, Thm. 7.12]) donne l'énoncé.

Si G est semi-simple, simplement connexe et simple, il existe une extension fini K/k et un K-groupe linéaire semi-simple, simplement connexe et absolument simple G' tel que $G \cong \mathrm{Res}_{K/k}\, G'$. L'énoncé en découle.

Pour une suite exacte de tels groupes $1 \to G_1 \to G_2 \xrightarrow{\phi} G_3 \to 1$, si l'énoncé vaut pour G_1 et G_3, montrons qu'il vaut pour G_2. Pour un tel $G_2(k_S)^0$, les sous-groupes

$$G_3(k_S)^0 := \phi(G_2(k_S)^0) \subset G_3(k_S) \quad \text{et} \quad G_1(k_S)^0 := G_2(k_S)^0 \cap G_1(k_S) \subset G_1(k_S)$$

sont ouverts d'indice fini. Ainsi, pour tout ouvert $W \subset G_2(\mathbf{A}_k)$, l'image $\phi(W) \subset G_3(\mathbf{A}_k)$ est ouvert [Con12, Thm. 4.5]. Donc il existe $t \in G_3(k)$ tel que $(G_2(k_S)^0 \cdot W) \cap \phi^{-1}(t) \neq \emptyset$. Puisque $\phi^{-1}(t)$ est un torseur de G_1, on a

$$(G_2(k_S)^0 \cdot W) \cap (G_1(k_S)^0 \cdot \phi^{-1}(t)(k)) \neq \emptyset,$$

d'où le résultat.

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

En général, le groupe G possède une filtration de facteurs soit unipotents soit semi-simples simplement connexes et simples. Une application de la méthode de fibration ci-dessus donne l'énoncé. $\square$

Proposition 7.4. *Soient G un groupe linéaire connexe, et Z un G-espace homogène à stabilisateur géométrique connexe. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc}. Supposons que $S = \infty_k$ ou que $\bar{k}[Z]^\times = \bar{k}^\times$. Alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ et tout ouvert $W \subset Z(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $W^{\mathrm{Br}_G(Z)} \neq \emptyset$, on a $Z(k) \cap (G(k_S)^0 \cdot W) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Le cas où $S = \infty_k$ a été établi par Borovoi et Demarche [BD13, Thm. 1.4]. Ici, on donne une démonstration unifiée des deux cas considérés.

Puisque l'obstruction de Brauer–Manin au principe de Hasse est la seule pour un espace homogène à stabilisateur géométrique connexe (Borovoi [Bor96], cf. [Sko01, Thm. 5.2.1(a)]), on a $Z(k) \neq \emptyset$. Un k-point de Z permet de définir un G-morphisme $\pi : G \to Z$ tel que $Z \cong G/G_0$ avec $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe.

Par la résolution flasque [Col08, Prop. 5.4], il existe un groupe linéaire connexe H et un homomorphisme surjectif $H \xrightarrow{\psi} G$ tels que $\mathrm{Ker}(\psi)$ soit un tore et H soit quasi-trivial, i.e. H^{tor} soit quasi-trivial et $H^{\mathrm{sc}} = H^{\mathrm{ss}}$. Alors Z est un H-espace homogène à stabilisateur géométrique connexe, $H^{\mathrm{sc}} \cong G^{\mathrm{sc}}$ et, d'après le corollaire 3.11 et la proposition 3.9, on a : $\mathrm{Br}_G(Z) = \mathrm{Br}_H(Z)$. Le sous-groupe $H(k_S)^0 := \psi^{-1}(G(k_S)^0) \subset H(k_S)$ est ouvert d'indice fini. Alors on peut remplacer G par H et supposer que G est quasi-trivial.

Notons $G \xrightarrow{\phi} G^{\mathrm{tor}}$ le quotient torique maximal. Alors ϕ est lisse à fibres géométriquement intègres et donc $G(\mathbf{A}_k) \to G^{\mathrm{tor}}(\mathbf{A}_k)$ est ouvert [Con12, Thm. 4.5]. D'après le corollaire 5.13, il existe un ouvert $W_1 \subset G(\mathbf{A}_k)$ et un point $z \in Z(k)$ tels que $\pi(W_1) \cdot z \subset W$ et $W_1^{\mathrm{Br}_1(G)} \neq \emptyset$. Puisque G^{tor} satisfait l'approximation forte par rapport à $\mathrm{Br}_1(G^{\mathrm{tor}})$ hors de ∞_k (Harari [Har08, Thm. 2]), il existe

$$t \in G^{\mathrm{tor}}(k) \cap (G^{\mathrm{tor}}(k_\infty)^+ \cdot \phi(W_1)).$$

Notons G_t la fibre de ϕ au-dessus de t et $G^{\mathrm{ssu}}(k_S)^0 := G(k_S)^0 \cap G^{\mathrm{ssu}}(k_S)$. Ainsi G_t est un G^{ssu}-torseur. D'après la proposition 7.3, l'ensemble $G^{\mathrm{ssu}}(k_S)^0 \cdot G_t(k)$ est dense dans $G_t(\mathbf{A}_k)$.

Dans le cas où $S = \infty_k$, puisque l'homomorphisme $G(k_\infty)^+ \to G^{\mathrm{tor}}(k_\infty)^+$ est surjectif, il existe

$$a \in G_t(\mathbf{A}_k) \cap (G(k_\infty)^+ \cdot W_1) \quad \text{et donc } g \in G_t(k) \cap (G^{\mathrm{ssu}}(k_S)^0 \cdot G(k_\infty)^+ \cdot W_1).$$

Par le lemme 7.1, on a $G^{\mathrm{ssu}}(k_S)^0 \cdot G(k_\infty)^+ \subset G(k_S)^0$ et donc $g \cdot z \in Z(k) \cap (G(k_S)^0 \cdot W)$.

Dans le cas où $\bar{k}[Z]^\times = \bar{k}^\times$, par la suite exacte de Sansuc [San81, Prop. 6.10], $G_0^{\mathrm{tor}} \to G^{\mathrm{tor}}$ est surjectif et donc $G_0 \to G \to G^{\mathrm{tor}}$ est surjectif. Ainsi $G_0(k_\infty)^+ \to G^{\mathrm{tor}}(k_\infty)^+$ est surjectif. Alors il existe $a \in G_t(\mathbf{A}_k) \cap (G_0(k_\infty)^+ \cdot W_1)$ et donc

$$g \in G_t(k) \cap (G^{\mathrm{ssu}}(k_S)^0 \cdot G_0(k_\infty)^+ \cdot W_1).$$

Ainsi $g \cdot z \in Z(k) \cap (G(k_S)^0 \cdot W)$. $\square$

Théorème 7.5. *Soient G un groupe linéaire connexe, $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe et $Z := G/G_0$. Soient X une G-variété lisse géométriquement intègre, $U \subset X$ un G-ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G-morphisme. Soient $A \subset \mathrm{Br}(X)$ et $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (3.1)) deux sous-groupes*

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press

finis. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc}. Supposons que $S = \infty_k$ ou que $\bar{k}[X]^\times/\bar{k}^\times = 0$. Alors, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini $G(k_S)^0 \subset G(k_S)$ et tout ouvert $W \subset X(\mathbf{A}_k)$ satisfaisant $W^{\mathrm{Br}(X)\cap(A+B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))} \neq \emptyset$, il existe un $z \in Z(k)$ de fibre U_z, tel que

$$(G(k_S)^0 \cdot W) \cap U_z(\mathbf{A}_k)^{B+A} \neq \emptyset.$$

Démonstration. Le cas où $S = \infty_k$ découle du théorème 4.6(2) et de la proposition 7.4.

Soit $\pi : Z \xrightarrow{\pi} Z^{\mathrm{tor}}$ le quotient torique maximal de Z et $G_1 \subset G$ le stabilisateur de G sur Z^{tor} (cf. Définition 3.23). Pour tout $t \in Z^{\mathrm{tor}}(k)$, notons Z_t la fibre de π au-dessus de t. Alors Z_t est un G_1-espace homogène à stabilisateur géométrique connexe. Par la proposition 3.13, on a $\bar{k}[Z_t]^\times = \bar{k}^\times$. D'après la proposition 7.4, l'adhérence $\overline{G_0(k_S)^0 \cdot Z_t(k)}$ contient $Z_t(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_{G_0}(Z_t)}$.

Le cas où $\bar{k}[X]^\times = \bar{k}^\times$ découle du théorème 6.11(2) (avec les même notations sauf remplacer G_0 par G_1). □

Théorème 7.6. *Soient G un groupe linéaire connexe, $G_0 \subset G$ un sous-groupe fermé connexe et $Z := G/G_0$. Soient X une G-variété lisse géométriquement intègre, $U \subset X$ un G-ouvert et $U \xrightarrow{f} Z$ un G-morphisme. Soient $A \subset \mathrm{Br}(X)$ et $B \subset \mathrm{Br}_G(U)$ (cf. (3.1)) deux sous-groupes finis. Soit $S \subset \Omega_k$ un sous-ensemble fini non vide tel que $G'(k_S)$ soit non compact pour chaque facteur simple G' du groupe G^{sc}.*

(1) *Si $S = \infty_k$ et, pour tout $z \in Z(k)$ de fibre U_z, l'ensemble $U_z(k)$ est dense dans $U_z(\mathbf{A}_k)_\bullet^{A+B}$, alors $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}(X)\cap(A+B+f^*\mathrm{Br}_G(Z))}$.*
(2) *Si $\bar{k}[X]^\times = \bar{k}^\times$ et, pour tout $z \in Z(k)$, la fibre U_z satisfait l'approximation forte de Brauer–Manin par rapport à $A+B$ hors de S, alors X satisfait l'approximation forte de Brauer–Manin par rapport à $\mathrm{Br}(X) \cap (A + B + f^*\mathrm{Br}_G(Z))$ hors de S.*

Démonstration. Ceci suit immédiatement du théorème 7.5. □

Le cas où $U \cong Z$, $f = \mathrm{id}$ et $A = B = 0$ donne le théorème 1.4.

Remerciements
Je remercie très chaleureusement Jean-Louis Colliot-Thélène et Fei Xu pour plusieurs discussions. Je remercie également Cyril Demarche, Qifeng Li et Giancarlo Lucchini Arteche pour leurs commentaires. Je remercie vivement les rapporteurs de Compositio Math. pour leurs commentaires. Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Ile-de-France.

References

Bor91 A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, second edition (Springer, New York, 1991).

Bor96 M. Borovoi, *The Brauer–Manin obstruction to the Hasse principle for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. Reine Angew. Math. **473** (1996), 181–194.

BD13 M. Borovoi and C. Demarche, *Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces*, Comment. Math. Hev. **88** (2013), 1–54.

Con12 B. Conrad, *Weil and Grothendieck approaches to adelic points*, Enseign. Math. **58** (2012), 61–97.

CX13 Y. Cao and F. Xu, *Strong approximation with Brauer–Manin obstruction for toric varieties*, à paraître dans Ann. Inst. Fourier (Grenoble). Preprint (2013), arXiv:1311.7655.

CX15 Y. Cao and F. Xu, *Strong approximation with Brauer–Manin obstruction for groupic varieties*, Preprint (2015), arXiv:1507.04340.

CDX16 Y. Cao, C. Demarche and F. Xu, *Comparing descent obstruction and Brauer–Manin obstruction for open varieties*, Preprint (2016), arXiv:1604.02709.

Col95 J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture*, in *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 58, Part I, eds W. Jacob and A. Rosenberg (American Mathematical Society, Providence, RI, 1995), 1–64.

Col07 J.-L. Colliot-Thélène, *Lectures on linear algebraic groups*, notes, April 2007, http://www.math.u-psud.fr/∼colliot/BeijingLectures2Juin07.pdf.

Col08 J.-L. Colliot-Thélène, *Résolutions flasques des groupes linéaires connexes*, J. Reine Angew. Math. **618** (2008), 77–133.

CH16 J.-L. Colliot-Thélène and D. Harari, *Approximation forte en famille*, J. Reine Angew. Math. **710** (2016), 173–198.

CS87a J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *Principal homogeneous spaces under flasque tori, applications*, J. Algebra **106** (1987), 148–205.

CS87b J.-L. Colliot-Thélène and J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), 375–492.

CX09 J.-L. Colliot-Thélène and F. Xu, *Brauer–Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representations by integral quadratic forms*, Compositio Math. **145** (2009), 309–363.

CX13 J.-L. Colliot-Thélène and F. Xu, *Strong approximation for the total space of certain quadric fibrations*, Acta Arith. **157** (2013), 169–199.

Dem11 C. Demarche, *Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **102** (2011), 563–597.

Eke90 T. Ekedahl, *An effective version of Hilbert's irreducibility theorem*, in *Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1988–1989*, Progress in Mathematics, vol. 91 (Birkhäuser, 1990), 241–248.

Gro68 A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer, I, II, III*, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (North-Holland & Masson, 1968).

Har94 D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), 221–260.

Har07 D. Harari, *Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini*, Bull. Soc. Math. France **135** (2007), 549–564.

Har08 D. Harari, *Le défaut d'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs*, Algebra Number Theory **2** (2008), 595–611.

Har77 R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52 (Springer, New York–Heidelberg, 1977).

HS05 D. Harari and T. Szamuely, *Arithmetic duality theorems for 1-motives*, J. Reine Angew. Math. **578** (2005), 93–128.

Mil80 J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33 (Princeton University Press, Princeton, 1980).

PR94 V. P. Platonov and A. S. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139 (Academic, Boston, MA, 1994); translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

San81 J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. Reine Angew Math. **327** (1981), 12–80.

Ser65 J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5 (Springer, Berlin, 1965).

Sko90 A. N. Skorobogatov, *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, in *Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1988–1989*, Progress in Mathematics, vol. 91 (Birkhäuser, Boston, MA, 1990), 205–219.

Sko01 A. N. Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144 (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).

Wei14 D. Wei, *Strong approximation for the variety containing a torus*, Preprint (2014), arXiv:1403.1035.

Wei16 D. Wei, *Open descent and strong approximation*, Preprint (2016), arXiv:1604.00610.

Yang Cao yangcao@mpim-bonn.mpg.de, yangcao1988@gmail.com
Max Planck Institute for Mathematics, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany

https://doi.org/10.1112/S0010437X17007709 Published online by Cambridge University Press