

## SUR L'INÉGALITÉ FONDAMENTALE DE H. CARTAN POUR LES SYSTÈMES DE FONCTIONS ENTIÈRES

NOBUSHIGE TODA

### §1. Introduction

Soit  $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$  ( $n \geq 1$ ) un système transcendant dans le plan  $|z| < \infty$ ; c'est-à-dire, les fonctions  $f_0, f_1, \dots, f_n$  sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$$

où  $T(r, f)$  est la fonction caractéristique de  $f$  définie par Cartan ([1]):

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \max_{0 \leq j \leq n} \log |f_j(re^{i\theta})| d\theta - \max_{0 \leq j \leq n} \log |f_j(0)|.$$

Soient  $X$  un ensemble de combinaisons ( $\neq 0$ ) linéaires, homogènes à coefficients constants de  $f_0, f_1, \dots, f_n$  et linéairement distinctes  $n+1$  à  $n+1$  et  $\lambda$  le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes qui existent entre les  $f_0, f_1, \dots, f_n$ . On note que  $0 \leq \lambda \leq n-1$ .

Il y a longtemps que Cartan ([1]) a démontré l'inégalité fondamentale suivante quand  $\lambda = 0$ :

**Théorème de Cartan.** Pour  $q$  combinaisons  $F_1, \dots, F_q$  ( $q \geq n+2$ ) quelconque dans  $X$ ,

$$(q - n - 1)T(r, f) < \sum_{i=1}^q N_n(r, 0, F_i) + S(r)$$

où  $N_n(r, 0, F_i)$  désigne la fonction  $N_n(r, F_i)$  dans [1] et

$$S(r) = O(\log r) + O(\log T(r, f)) \quad (r \notin E),$$

$E$  étant un ensemble de  $r$  de mesure linéaire finie.

Et puis il a espéré démontrer l'inégalité suivante quand  $\lambda > 0$  (originellement pour les fonctions algébroides ([1])):

Received June 30, 1978.

CONJECTURE DE CARTAN. Pour  $q$  combinaisons  $F_1, \dots, F_q$  ( $q \geq n + \lambda + 2$ ) quelconque dans  $X$ ,

$$(q - n - \lambda - 1)T(r, f) < \sum_{i=1}^q N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r).$$

On ne sait pas si cette conjecture serait vraie à présent.

Il y a quelques années, C. Sung ([3]) a donné une proposition plus précise que cette conjecture, mais malheureusement, on peut donner un contre exemple pour cette proposition facilement et elle n'est pas vraie.

Pour cette conjecture, on a donné quelques résultats. Par exemple,

I.  $(q - n - 1 - \lambda(n - \lambda))T(r, f) < \sum_{i=1}^q N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r).$  ([5])

II. S'il y a  $\lambda + 1$  combinaisons étant proportionnelles dans  $X$ ,

$$(q - n - \lambda - 1)T(r, f) < \sum_{i=1}^q N(r, 0, F_i) + S(r).$$
 ([5])

(Dans ce théorème, on peut échanger  $N(r, 0, F_i)$  pour  $N_{n-\lambda}(r, 0, F_i)$  facilement.)

Dans ce mémoire, on démontre que la conjecture de Cartan est vraie quand  $q = n + \lambda + 2$  sans autre restriction. De plus, on donne quelques résultats concernant les combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna ([2]).

## §2. Préliminaires

1. Soient  $f, X$  et  $\lambda$  comme dans l'introduction. D'abord on note qu'il est facile à démontrer que le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes entre  $n + 1$  combinaisons quelconque dans  $X$  est aussi  $\lambda$ . Soient  $F_1, \dots, F_q$  ( $q \geq n + 1$ )  $q$  combinaisons quelconque dans  $X$ , alors il y a  $n + 1 - \lambda$  combinaisons linéairement indépendantes sur  $C$  dans  $\{F_i\}_{i=1}^q$  (soient  $g_1, \dots, g_{n+1-\lambda}$  telles combinaisons) telles que tous les éléments de  $X$  sont représentés par  $g_1, \dots, g_{n+1-\lambda}$  à coefficients constants:

$$(1) \quad F = \alpha_{F_1} g_1 + \dots + \alpha_{F_{n+1-\lambda}} g_{n+1-\lambda}$$

( $F \in X, \alpha_{F_i} \in C$ ).

Evidemment,  $g = (g_1, \dots, g_{n+1-\lambda})$  est un système transcendant dans  $|z| < \infty$ . On dit que telles  $g_1, \dots, g_{n+1-\lambda}$  forment une base de  $X$ .

On donne quelques lemmes qui seront utilisés après.

LEMME 1.  $|T(r, f) - T(r, g)| < O(1)$ .

C'est trivial d'après les définitions de  $T(r, f)$ ,  $T(r, g)$  et  $g$ .

LEMME 2. Soient  $H_1, \dots, H_k (2 \leq k \leq n + 1)$   $k$  combinaisons quelconque dans  $X$ . Alors,

$$m(r, \|H_1, \dots, H_k\|/H_1 \cdots H_k) = S(r),$$

où  $\|H_1, \dots, H_k\|$  signifie le wronskian de  $H_1, \dots, H_k$ . (Voir [1])

2. On peut supposer que  $g_i = F_i (i = 1, \dots, n + 1 - \lambda)$  sans restriction de généralité. Soit

$$X^0 = \{F_i\}_{i=n+2-\lambda}^q$$

et par la relation équivalente " $\sim$ " introduite dans [6], on classe  $X^0$ .

Soient

$$X^0/\sim = \{X_1^0, \dots, X_p^0\} \quad (1 \leq p \leq n + 1 - \lambda)$$

$$A_t = \{F_i (1 \leq i \leq n + 1 - \lambda); \text{ il y a au moins une } F \text{ dans } X_t^0 \text{ telle que } \alpha_{F_t} \neq 0\} \quad (t = 1, \dots, p),$$

où  $\alpha_{F_t}$  est le coefficient de  $F_t$  quand on représente  $F$  par  $F_1, \dots, F_{n+1-\lambda}$  (voir (1));

$$A_0 = \{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda} - \bigcup_{t=1}^p A_t,$$

$\nu_t =$  le nombre d'éléments dans  $A_t (t = 0, 1, \dots, p)$ .

On sait que

- i)  $A_{t_1} \cap A_{t_2} = \phi \quad (t_1 \neq t_2)$ ,
- ii)  $\sum_{t=0}^p \nu_t = n + 1 - \lambda$ .

LEMME 3. Quand  $q \geq n + \lambda + 2, p = 1$  et  $\nu_0 = 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de prouver ce lemme dans le cas  $q = n + \lambda + 2$  parce que  $p$  et  $\nu_0$  diminuent quand  $q$  augmente par définition de la relation " $\sim$ ". Supposons qu'il existent au moins deux classes n'étant pas vides entre  $A_0, A_1, \dots, A_p$ . Soient  $X_1^0 = \{F_{n+1-\lambda+j}\}_{j=1}^\mu$  et  $A_1 = \{F_1, \dots, F_{\nu_1}\}$  sans restriction de généralité. Alors,

$$\nu_1 \leq n - \lambda \quad \text{et} \quad \mu \leq \lambda.$$

En effet, maintenant,  $\nu_0 \neq 0$  ou  $\nu_2 \neq 0$  et par ii), on a  $\nu_1 \leq n - \lambda$ . Et puis, si  $\mu > \lambda$ , le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes entre les  $F_1, \dots, F_{\nu_1}, F_{n+2-\lambda}, \dots, F_{n+2}$  est au moins  $\lambda + 1$  parce que, pour chaque élément dans  $X_1^0$ , quand on représente par  $F_1, \dots, F_{n+1-\lambda}$ , tous les coefficients de  $F_{\nu_1+1}, \dots, F_{n+1-\lambda}$  sont égaux à nul. En considérant que  $\nu_1 + \lambda + 1 \leq n + 1$ , c'est contraire à la définition de  $\lambda$ . Par conséquent, il faut que  $\mu \leq \lambda$ .

D'autre part, pour chaque élément dans  $X^0 - X_1^0$ , tous les coefficients de  $F_1, \dots, F_{\nu_1}$  sont égaux à nul quand on représente par  $F_1, \dots, F_{n+1-\lambda}$  et le nombre des éléments dans  $X^0 - X_1^0$  est  $2\lambda + 1 - \mu$  qui est plus grand que ou égal à  $\lambda + 1$  parce que  $\mu \leq \lambda$ . Cela veut dire qu'il existent au moins  $\lambda + 1$  relations linéaires, homogènes à coefficients constants et linéairement distinctes entre les  $F_{\nu_1+1}, \dots, F_{n+1-\lambda}, F_{n+1-\lambda+\mu+1}, \dots, F_{n+2+\mu}$ . En considérant que  $n + 1 - \lambda - \nu_1 + \lambda + 1 = n + 2 - \nu_1 \leq n + 1$ , c'est aussi contraire à la définition de  $\lambda$ .

Cela veut dire qu'il faut  $p = 1$  et  $\nu_0 = 0$ .

§3. Théorèmes

Soient  $f, X$  et  $\lambda$  comme dans l'introduction.

THÉORÈME 1. Soient  $F_1, \dots, F_{n+\lambda+2}$   $n + \lambda + 2$  combinaisons quelconque dans  $X$ , alors on a

$$T(r, f) < \sum_{i=1}^{n+\lambda+2} N_{n-i}(r, 0, F_i) + S(r).$$

Démonstration. On peut supposer que  $F_1, \dots, F_{n+1-\lambda}$  forment une base de  $X$ . On représente  $F_j$  ( $j = n + 2 - \lambda, \dots, n + \lambda + 2$ ) par  $F_1, \dots, F_{n+1-\lambda}$ . Pour simplifier, on met  $F_{n+1-\lambda+k} \equiv H_k$ .

$$(2) \quad H_k = \alpha_{k1}F_1 + \dots + \alpha_{kn+1-\lambda}F_{n+1-\lambda} \quad (k = 1, \dots, 2\lambda + 1).$$

I. D'après le lemme 3, il y a au moins une combinaisons dans  $\{H_1, \dots, H_{2\lambda+1}\}$  telle que le nombre de coefficients différents de zéro à (2) est au moins deux. On peut supposer que  $H_1$  est telle combinaison.

Soient

$$\alpha_{1i(1)1} \neq 0, \dots, \alpha_{1i(1)m_1} \neq 0, \\ \alpha_{1i} = 0 \quad (i \neq i(1)_1, \dots, i(1)_{m_1}) \quad (2 \leq m_1 \leq n + 1 - \lambda).$$

C'est-à-dire,

$$(3) \quad H_1 = \alpha_{i(1)_1} F_{i(1)_1} + \dots + \alpha_{i(1)_{m_1}} F_{i(1)_{m_1}}.$$

Alors, de (3), on obtient

$$(4) \quad \alpha_{i(1)_m} F_{i(1)_m} = H_1 \Delta_1^m / \Delta_1 \quad (m = 1, \dots, m_1)$$

où

$$\Delta_1 = \|F_{i(1)_1}, \dots, F_{i(1)_{m_1}}\| / \|F_{i(1)_1} \dots F_{i(1)_{m_1}}\|$$

et

$$\Delta_1^m = \frac{\|F_{i(1)_1}, \dots, F_{i(1)_{m-1}}, H_1, F_{i(1)_{m+1}}, \dots, F_{i(1)_{m_1}}\|}{F_{i(1)_1} \dots F_{i(1)_{m-1}} H_1 F_{i(1)_{m+1}} \dots F_{i(1)_{m_1}}}.$$

De (4), on a l'inégalité

$$(5) \quad \max_{\alpha_{1i} \neq 0} \log |F_i| \leq \log |H_1| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_1} \right| + \sum_{m=1}^{m_1} \log^+ |\Delta_1^m| + O(1).$$

Quand  $m_1 = n + 1 - \lambda$ , en intégrant à regard de  $\theta$  de 0 jusqu'à  $2\pi$ , on a l'inégalité suivante d'après les lemmes 1 et 2 comme d'habitude:

$$\begin{aligned} T(r, f) &< N(r, 0, H_1) + m(r, 1/\Delta_1) + \sum_{m=1}^{m_1} m(r, \Delta_1^m) + O(1) \\ &= N(r, 0, H_1) + \sum_{m=1}^{m_1} N(r, 0, F_{i(1)_m}) - N(r, 0, \|F_{i(1)_1}, \dots, F_{i(1)_{m_1}}\|) + S(r) \\ &\leq N_{n-\lambda}(r, 0, H_1) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-i}(r, 0, F_i) + S(r). \end{aligned}$$

II. Quand  $m_1 < n + 1 - \lambda$ , d'après le lemme 3, il y a une combinaison  $H_k$  dans  $\{H_2, \dots, H_{2\lambda+1}\}$  et un  $i$  tels que

$$H_1 \approx H_k, \quad \alpha_{1i} = 0, \quad \text{et} \quad \alpha_{ki} \neq 0,$$

où la relation " $\approx$ " est définie dans [6]. On peut supposer que  $H_k = H_2$ . Soient

$$\begin{aligned} \{i; \alpha_{1i} = 0, \alpha_{2i} \neq 0\} &= \{i(2)_1, \dots, i(2)_{m_2}\}, \\ \Delta_2 &= \|H_2, F_{i(2)_1}, \dots, F_{i(2)_{m_2}}\| / \|H_2 F_{i(2)_1} \dots F_{i(2)_{m_2}}\| \end{aligned}$$

et

$$\Delta_2^m = \frac{\|H_2, F_{i(2)_1}, \dots, F_{i(2)_{m-1}}, \tilde{F}_2, F_{i(2)_{m+1}}, \dots, F_{i(2)_{m_2}}\|}{H_2 F_{i(2)_1} \dots F_{i(2)_{m-1}} \tilde{F}_2 F_{i(2)_{m+1}} \dots F_{i(2)_{m_2}}}$$

où

$$(6) \quad \tilde{F}_2 \equiv - \sum_{\substack{\alpha_{1i} \neq 0 \\ \alpha_{2i} \neq 0}} \alpha_{2i} F_i = -H_2 + \sum_{\substack{\alpha_{1i} = 0 \\ \alpha_{2i} \neq 0}} \alpha_{2i} F_i .$$

On note que

$$\{i; \alpha_{1i} \neq 0, \alpha_{2i} \neq 0\} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \tilde{F}_2 \neq 0$$

parce que  $H_1 \approx H_2$ . Alors, on obtient

$$(7) \quad \alpha_{2i(2)_m} F_{i(2)_m} = \tilde{F}_2 \Delta_2^m / \Delta_2 \quad (m = 1, \dots, m_2) .$$

De (7), on a l'inégalité

$$(8) \quad \max_{\substack{\alpha_{1i} \neq 0 \\ \alpha_{2i} \neq 0}} \log |F_i| \leq \log |\tilde{F}_2| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_2} \right| + \sum_{m=1}^{m_2} \log^+ |\Delta_2^m| + O(1)$$

et de (6)

$$(9) \quad \log |\tilde{F}_2| \leq \max_{\substack{\alpha_{1i} \neq 0 \\ \alpha_{2i} \neq 0}} \log |F_i| + O(1) \leq \max_{\alpha_{1i} \neq 0} \log |F_i| + O(1) .$$

Quand  $m_1 + m_2 = n + 1 - \lambda$ , de (5), (8) et (9), on a

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n+1-\lambda} \log |F_i| &\leq \log |H_1| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_1} \right| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_2} \right| + \sum_{m=1}^{m_1} \log^+ |\Delta_1^m| \\ &\quad + \sum_{m=1}^{m_2} \log^+ |\Delta_2^m| + O(1) , \end{aligned}$$

de sorte qu'en intégrant à regard de  $\theta$  de 0 jusqu'à  $2\pi$  on obtient l'inégalité suivante d'après les lemmes 1 et 2:

$$\begin{aligned} T(r, f) &< N(r, 0, H_1) + m(r, 1/\Delta_1) + m(r, 1/\Delta_2) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{m_1} m(r, \Delta_1^m) + \sum_{m=1}^{m_2} m(r, \Delta_2^m) + O(1) \\ &= N(r, 0, H_1) + N(r, 0, H_2) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N(r, 0, F_i) \\ &\quad - N(r, 0, \|F_{i(1)_1}, \dots, F_{i(1)_{m_1}}\|) - N(r, 0, \|H_2, F_{i(2)_1}, \dots, F_{i(2)_{m_2}}\|) + S(r) \end{aligned}$$

et en tenant compte de la multiplicité des zéros de  $H_1, H_2, F_1, \dots, F_{n+1-\lambda}$

$$\leq N_{n-\lambda}(r, 0, H_1) + N_{n-\lambda}(r, 0, H_2) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r) .$$

III. Quand  $m_1 + m_2 < n + 1 - \lambda$ , d'après le lemme 3, il y a au moins une  $H_j$  dans  $\{H_3, \dots, H_{2\lambda+1}\}$  et un  $i$  tels que

$$H_1 \approx H_j \quad \text{ou} \quad H_2 \approx H_j$$

et

$$\alpha_{1i} = 0, \quad \alpha_{2i} = 0, \quad \alpha_{3i} \neq 0.$$

On peut supposer que  $H_j = H_3$ . Soient

$$\begin{aligned} \{i; \alpha_{1i} = \alpha_{2i} = 0, \alpha_{3i} \neq 0\} &= \{i(3)_1, \dots, i(3)_{m_3}\}, \\ \Delta_3 &= \|H_3, F_{i(3)_1}, \dots, F_{i(3)_{m_3}}\| / \|H_3 F_{i(3)_1} \dots F_{i(3)_{m_3}}\|, \\ \Delta_3^m &= \frac{\|H_3, F_{i(3)_1}, \dots, F_{i(3)_{m-1}}, \tilde{F}_3, F_{i(3)_{m+1}}, \dots, F_{i(3)_{m_3}}\|}{H_3 F_{i(3)_1} \dots F_{i(3)_{m-1}} \tilde{F}_3 F_{i(3)_{m+1}} \dots F_{i(3)_{m_3}}} \end{aligned}$$

où

$$\tilde{F}_3 \equiv - \sum_{\substack{\alpha_{3i} \neq 0 \\ \alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0}} \alpha_{3i} F_i = -H_3 + \sum_{\substack{\alpha_{3i} \neq 0 \\ \alpha_{1i} = \alpha_{2i} = 0}} \alpha_{3i} F_i.$$

Parce que  $H_1 \approx H_2$  ou  $H_2 \approx H_3$ ,

$$\{i; \alpha_{3i} \neq 0, |\alpha_{1i}| + |\alpha_{2i}| \neq 0\} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \tilde{F}_3 \neq 0.$$

Alors, on a

$$\alpha_{3i(3)_m} F_{i(3)_m} = \tilde{F}_3 \Delta_3^m / \Delta_3 \quad (m = 1, \dots, m_3)$$

et de cela, on a

$$(10) \quad \max_{\substack{\alpha_{3i} \neq 0 \\ \alpha_{1i} = \alpha_{2i} = 0}} \log |F_i| \leq \log |\tilde{F}_3| + \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_3} \right| + \sum_{m=1}^{m_3} \log^+ |\Delta_3^m| + O(1)$$

et

$$(11) \quad \log |\tilde{F}_3| \leq \max_{\alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0} \log |F_i| + O(1).$$

Des inégalités (5), (8), (9), (10) et (11), on a

$$\max_{\substack{\alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{3i} \neq 0 \\ \text{ou } \alpha_{3i} \neq 0}} \log |F_i| \leq \log |H_1| + \sum_{k=1}^3 \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_k} \right| + \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} \log^+ |\Delta_k^m| + O(1).$$

Quand  $m_1 + m_2 + m_3 = n + 1 - \lambda$ , en considérant que

$$\{i; \alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{3i} \neq 0\} = \{1, 2, \dots, n + 1 - \lambda\},$$

on a l'inégalité suivante comme dans II:

$$T(r, f) < \sum_{k=1}^3 N_{n-\lambda}(r, 0, H_k) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r).$$

IV. En general, en tenant compte du lemme 3, il existe un nombre  $s$  ( $1 \leq s \leq 2\lambda + 1$ ) tel que

$$m_1 + m_2 + \dots + m_s = n + 1 - \lambda,$$

où  $m_1, m_2, \dots, m_s$  sont définis comme dans I ~ III. Alors,

$$\{F_i; \alpha_{1i} \neq 0 \text{ ou } \alpha_{2i} \neq 0 \text{ ou } \dots \text{ ou } \alpha_{si} \neq 0\} = \{F_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda},$$

par conséquent, comme dans III, on a

$$\max_{1 \leq i \leq n+1-\lambda} \log |F_i| \leq \log |H_1| + \sum_{k=1}^s \log^+ \left| \frac{1}{\Delta_k} \right| + \sum_{k=1}^s \sum_{m=1}^{m_k} \log^+ |\Delta_k^m| + O(1)$$

et comme dans II,

$$(12) \quad T(r, f) < \sum_{k=1}^s N_{n-\lambda}(r, 0, H_k) + \sum_{i=1}^{n+1-\lambda} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r).$$

Quand  $s < 2\lambda + 1$ , en ajoutant

$$\sum_{k=s+1}^{2\lambda+1} N_{n-\lambda}(r, 0, H_k) \quad (\geq 0)$$

à la droite à (12), on a

$$T(r, f) < \sum_{i=1}^{n+\lambda+2} N_{n-\lambda}(r, 0, F_i) + S(r)$$

parce que  $H_k = F_{n+1-\lambda+k}$  ( $k = 1, \dots, 2\lambda + 1$ ).

N.B. 1. En général, on ne peut pas échanger le nombre “ $n + \lambda + 2$ ” pour un autre nombre plus petit. (Voir l'exemple dans [6].)

Pour  $F$  dans  $X$ , on met

$$\delta(F) = 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)}.$$

Quand  $\delta(F) > 0$ , on dit que  $F$  est exceptionnelle au sens de Nevanlinna.

COROLLAIRE. Pour  $F_1, \dots, F_{n+\lambda+2}$   $n + \lambda + 2$  combinaisons quelconque dans  $X$ ,

$$\sum_{i=1}^{n+\lambda+2} \delta(F_i) \leq n + \lambda + 1$$

([6], Corollaire 2).

Ici, on considère le cas où l'égalité est réalisée dans ce corollaire.

LEMME 4. S'il existent  $F_1, \dots, F_{n+1+\mu}$  dans  $X$  telles que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) + \delta(F_{n+1+j}) > n + 1 \quad (j = 1, \dots, \mu),$$

alors,  $\lambda \geq \mu$ .

([6], Lemme 8)

**THÉORÈME 2.** *Quand  $\lambda > 0$ , s'il existent  $\{F_i\}_{i=1}^{n+\lambda+2}$  dans  $X$  telles que*

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{n+\lambda+2} \delta(F_i) = n + \lambda + 1,$$

*alors, il existe un  $i_0$  tel que*

$$\delta(F_{i_0}) = 0 \quad \text{et} \quad \delta(F_i) = 1 \quad (i \neq i_0).$$

*Démonstration.* On peut supposer sans restriction de généralité:

$$\delta(F_1) \geq \delta(F_2) \geq \dots \geq \delta(F_{n+\lambda+2}).$$

Si

$$\delta(F_{n+\lambda+2}) > 0,$$

alors,

$$\delta(F_{n+\lambda+1}) < 1,$$

Par conséquent, de (13), on a les inégalités suivantes:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta(F_i) + \delta(F_{n+1+j}) > n + 1 \quad (j = 1, \dots, \lambda + 1).$$

Alors, du Lemme 4,

$$\lambda \geq \lambda + 1,$$

qui est absurde. Cela veut dire qu'il faut

$$\delta(F_{n+\lambda+2}) = 0$$

et de (13),

$$\delta(F_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, n + \lambda + 1).$$

**N.B. 2.** Dans ce cas, l'ordre de  $f$  est positif entier ou infini et  $f$  est à croissance régulière ([4], Théorème 3).

**BIBLIOGRAPHIE**

[ 1 ] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de  $p$  fonctions holomorphes données, *Mathematica* **7** (1933), 5–31.  
 [ 2 ] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris 1929.  
 [ 3 ] C. Sung, Contributions to holomorphic curves in complex manifolds, Thèse 1975.  
 [ 4 ] N. Toda, Sur la croissance de fonctions algébroides à valeurs déficientes, *Kōdai Math. Sem. Rep.* **22** (1970), 324–337.

- [ 5 ] N. Toda, Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, Tôhoku Math. J., **23** (1971), 67–95.
- [ 6 ] —, Sur quelques combinaison linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna, V, Nagoya Math. J., **66** (1977), 37–52.

*Université de Nagoya*