PROBLEMES D'UNIVERSALITE S'INTRODUISANT DANS L'ALGEBRISATION DE LA LOGIQUE MATHEMATIQUE I

DANIEL PONASSE[1)]

Introduction

L'objet de ce mémoire est essentiellement la recherche et l'étude de structures algébriques permettant de traduire le Calcul propositionnel et le Calcul des prédicats restreint du premier ordre. Nous avons guidé et limité cette recherche en imposant aux ensembles algébriques introduits de satisfaire simultanément aux trois conditions:

—donner une représentation du Calcul Logique sous sa forme la plus classique, c'est à dire avant l'obtention d'un anneau booléien par passage au quotient. Ce sera le rôle des structures "prébooléiennes".

—possèder un ensemble d'opérations traduisant un procédé de décision tel que celui des tableaux sémantiques, qui correspondent ici aux "tableaux de réduction".

—avoir un caractère universel dans leur construction à partir des atomes.

Le chapitre I est consacré à la construction et à l'étude d'un anneau booléien universel. Nous définissons d'abord la structure prébooléienne plus générale que celle d'anneau booléien et qui précéde nécessairement cette dernière. Partant d'un ensemble E quelconque, nous construisons un ensemble prébooléien $\ddot{E}$ dont les éléments se présentent sous forme de tableaux; par passage au quotient, $\ddot{E}$ engendre un anneau booléien $\langle E\rangle$ universel vis-à-vis de E. Ce chapitre se termine par l'étude de certaines propriétés topologiques de $\langle E\rangle$, d'une part sa densité dans l'espace produit $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, et d'autre part l'homéomorphisme entre l'espace de ses ultrafiltres et l'espace produit $\mathfrak{P}(E)$.

Le chapitre II concerne l'interprétation des résultats précédents pour l'ensemble $\mathfrak{F}$ des propositions: cet ensemble est prébooléien et engendre ainsi l'anneau booléien classique $\mathfrak{F}/R$. Cet anneau $\mathfrak{F}/R$ est universel vis-à-vis de l'ensemble $\mathscr{A}$ des atomes, il en résulte l'isomorphie entre $\mathfrak{F}/R$ et $\langle\mathscr{A}\rangle$. Nous

Received July 3, 1961.

[1)] Maître-Assistant, Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, France.

disposons alors d'une bijection associant à toute formule P, ou plutôt à la classe d'équivalence qu'elle représente, son "tableau de réduction achevé" $r(P)$, dont la seule lecture permet immédiatement de faire l'analyse de P suivant les atomes qui la composent. Au paragraphe 3, nous introduisons un autre anneau universel $\{\mathfrak{F}\}$ isomorphe aux deux précédents, et à l'intérieur duquel nous disposons d'un procédé absolument automatique pour la construction des tableaux de réduction achevés, ce sont les opérations de réduction qui sont exactement l'équivalent algébrique des règles de constitution des tableaux sémantiques (méthode de M. E. W. Beth). Il nous a paru intéressant au paragraphe 4 de donner une application de cette méthode: la recherche des formes normales, nous remarquons notamment qu'il n'y a pratiquement aucune différence entre l'écriture d'un tableau de réduction achevé et celle d'une forme normale conjonctive correspondante. Le dernier paragraphe concerne le calcul des conséquences, nous montrons essentiellement que le calcul des conséquences finies se confond avec celui des propositions dans l'anneau $\{\mathfrak{F}\}$ et par suite dans $\langle\mathscr{A}\rangle$, et par ailleurs l'étude des conséquences infinies résulte immédiatement des propriétés topologiques de cet anneau $\langle\mathscr{A}\rangle$.

En résumé, dans cette première partie, nous pensons avoir mis en évidence les liens qui existent entre les deux formes principales du Calcul des propositions: la forme "déductive" (à partir des axiomes-schémas et de la régle de modus ponens), et la forme "calcul des conséquences" (méthodes de Gentzen et de Beth); ce rapprochement étant dû essentiellement au caractère universel du Calcul propositionnel.

Au chapitre III nous introduisons tous les êtres algébriques qui nous seront nécessaires pour l'étude du Calcul des prédicats. A cet égard, nous utilisons ou nous retrouvons beaucoup de résultats de M. P. R. Halmos (anneaux monadiques ou polyadiques), toutefois avec une méthode et une direction de recherche qui nous semblent assez différentes, puisque c'est aux individus et aux substitutions d'individus que nous accordons une place prépondérante, les quantificateurs ne viennent qu'ensuite et sont alors imposés par le choix des substitutions; en outre, au lieu d'associer un quantificateur à chaque partie J de l'ensemble I des individus, il nous a paru plus simple et suffisant pour le Calcul des prédicats restreint du premier ordre, de ne considérer que des quantificateurs individuels. Nous définissons donc d'abord la structure d'ensemble individualisé (paragraphe

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

1), c'est à dire un ensemble sur lequel on peut effectuer des substitutions d'individus; quatre axiomes très simples suffisent pour caractériser de tels ensembles. A ce sujet signalons qu'un cinquième axiome d'individualisation serait nécessaire pour l'introduction ultérieure d'une "égalité" (au sens Logique), et nous espérons pouvoir publier prochainement les résultats d'une algébrisation analogue du Calcul des prédicats avec égalité. Au paragraphe 2, nous démontrons des propriétés intéressantes des substitutions lorsque ce sont des homomorphismes ou des préhomomorphismes; nous constatons également que les anneaux du type $\langle A \rangle$ restent universels pour la structure d'anneau booléien individualisé. Aux paragraphes 3 et 4, les quantificateurs s'introduisent de façon très naturelle dans les anneaux booléiens ou les ensembles prébooléiens individualisés. Le paragraphe 5 concerne l'étude de la seule quantification possible sur les anneaux $\langle A \rangle$, avec la mise en évidence du phénomène suivant: le caractère universel jusqu'ici conservé disparait totalement après quantification; or, ainsi qu'on le voit par la suite, le Calcul des prédicats est universel pour les structures quantifiées; ceci met en lumière l'impossibilité de construire des tableaux de réduction achevés (ou des tableaux sémantiques finis) pour les prédicats.

Le chapitre IV est l'analogue, dans la mesure du possible, du chapitre II. Nous montrons l'universalité du Calcul des prédicats vis-à-vis de l'ensemble A de ses atomes, pour les structures précédemment introduites. L'étape $\langle A \rangle$ disparait, mais nous retrouvons l'isomorphie entre E/R et $\{E\}$, qui nous permet là encore de donner l'équivalent algébrique de toutes les règles de constitution des tableaux sémantiques.

En ce qui concerne la disposition pratique de ce travail, nous avons adopté les modalités suivantes: la numérotation des paragraphes est discontinue, elle va de 1 à n à l'intérieur de chaque chapitre, de même pour les théorèmes, propositions et lemmes, ils sont numérotés de 1 à n à l'intérieur de chaque paragraphe. Les définitions et axiomes introduits étant dans l'ensemble relativement nombreux, on trouvera à la fin un index les résumant. Nous n'avons mis aucune référence à l'intérieur du texte, par contre la bibliographie qui suit immédiatement cette introduction a été classée par matières, ce qui permet de retrouver aisément, suivant la nature de tel ou tel résultat que nous avons utilisé sans démonstration, l'ouvrage dont il a été tiré.

Pour terminer, signalons que ce mémoire constitue la thèse de Doctorat ès

Sciences de l'auteur, soutenue le 7 juin 1961 devant la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand. Je tiens à remercier très vivement tous ceux qui m'ont aidé et encouragé dans ce travail, notamment M. P. Samuel et M. M. Guillaume.

Bibliographie

Applications et ensembles universels

N. Bourbaki: Algèbre, chap. III, appendice III. Act. Sci. et Ind. (1948), n° 1044, Hermann, Paris.

Anneaux booléiens

M. H. Stone: "The theory of representations for boolean algebras.". Trans. Amer. Math. Soc. (1936), n° 40, pp 37 à 111.

Topologie

—Pour les produits d'espaces topologiques:

N. Bourbaki: Topologie Générale, chap. I, parag. 8. Act. Sci. et Ind. (1951), n° 858–1142, Hermann, Paris.

—Pour les espaces booléiens:

R. F. Arens-I. Kaplansky: "Topological representations of algebras". Trans. Amer. Math. Soc. (1948), n° 63 pp 457 à 481.

M. H. Stone: "Applications of the theory of boolean rings to general topology". Trans. Amer. Math. Soc. (1937), n° 41, pp 321 à 364.

Logique

E. W. Beth: "Les fondements logiques des mathématiques". (1955); "L'existence en Mathématique". (1956); "La crise de la raison et la Logique". (1957); Gauthier-Villars, Paris. "The foundations of Mathematics". North-Holland (1959).

Seminaire de Logique Mathematique de L'Universite de Clermont.[2]

—exposés 1957/58: Calcul Propositionnel (par M. Guillaume, P. Samuel, D.Ponasse).

—exposés 1958/59: Calcul des prédicats restreint du premier ordre (par M. Guillaume).

—Pour l'analyse des valeurs de vérité:

W. V. O. Quine: "Methods of Logic", part I, parag. 5. H. Holt, New-York, (1953).

—Pour le calcul des conséquences:

G. Gentzen: "Recherches sur la déduction logique". Traduction de R. Feys et J. Ladrière. Presses Universitaires de France, (1955).

Logique algebrique

P. R. Halmos: "Monadic boolean algebras". Comp. Math. 12 (1955), pp 217 à 249; "Polyadic boolean algebras". Fund. Math. 43 (1956), pp 255 à 325.

D. Ponasse: "Structure prébooléienne. Ensemble prébooléien universel associé à un ensemble quelconque". C. R. Acad. Sci. 248, (1959), pp 899 à 902; "Anneau booléien universel associé à un ensemble quelconque. Applications au Calcul propositionnel". C. R. Acad. Sci. 248, (1959), pp 1093 à 1096.

(Ces deux Notes constituent un résumé très succinct des deux premiers chapitres de ce mémoire).

---

[2] Un tirage très limité fait que seule la Bibliothèque de l'Institut de Mathématiques de Clermont possède un exemplaire de ces comptes-rendus.

TABLE DES MATIERES

Preliminaires sur les applications universelles

La recherche d'ensembles et d'applications universels intervenant fréquemment dans la suite, il est sans doute préférable de rappeler et de préciser ces notions.

Considérons d'une part tous les ensembles, notés E_S, munis d'une certaine structure S, d'autre part tous les ensembles, notés E_T, munis d'une structure T. Les structures S et T peuvent être identiques, il se peut également que l'une ou l'autre de ces structures soit la structure vide, auquel cas les ensembles correspondant sont les ensembles sans structure,

On se donne également pour tout couple (E_S, E_T) une famille d'applications de E_S dans E_T, dites (S, T)-applications.

On se donne enfin, pour tout couple (E_T, E'_T) une famille d'applications de E_T dans E'_T, dites T-applications.

On suppose que ces structures et applications vérifient les conditions suivantes:

U 1/ Tout isomorphisme entre un ensemble E_T et un ensemble E'_T est une T-application.

U 2/ Si g est une T-application d'un ensemble E_T dans un ensemble E'_T et g' une T-application de E'_T dans un ensemble E''_T, alors $g' \circ g$ est une T-application de E_T dans E''_T.

U 3/ Si f est une (S, T)-application d'un ensemble E_S, dans un ensemble E_T et g une T-application de E_T dans un ensemble E'_T, alors $g \circ f$ est une (S, T)-application de E_S dans E'_T.

Le "*problème universel*", pour les types de structures et d'applications en question, est alors le suivant:

A tout ensemble E_S faire correspondre un ensemble U_T et une (S, T)-application u de E_S dans U_T, tels que toute (S, T)-application f de E_S dans un ensemble E_T puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme $f = g \circ u$ où g est une T-application de U_T dans E_T.

Lorsque ceci est possible on dit que U_T et u sont, respectivement, un ensemble et une application universels associés à E_S.

Supposons avoir une autre solution associée au même ensemble E_S, pour le même problème universel: (U'_T, u').

—U_T et u étant universels: il existe une T-application g de U_T dans U'_T et une seule, telle que $u' = g \circ u$.

—U'_T et u' étant universels: il existe une T-application g' de U'_T dans U_T et une seule, telle que $u = g' \circ u'$.

Donc:

$$u = g' \circ u' = g' \circ (g \circ u) = (g' \circ g) \circ u$$
$$u' = g \circ u = g \circ (g' \circ u') = (g \circ g') \circ u'$$

et $g' \circ g$ et $g \circ g'$ sont des T-applications (condition U 2) de U_T dans U_T et de U'_T dans U'_T respectivement.

Or, u étant une (S, T)-application de E_S dans U_T, il existe une T-application et une seule de U_T dans U_T, en l'occurence l'application identique i, telle que: $u = i \circ u$.

Donc:

$$g' \circ g = i: \text{ application identique de } U_T$$
$$g \circ g' = j: \text{ application identique de } U'_T$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

Il en résulte que g et g' sont des bijections réciproques l'une de l'autre, en effet:

—supposons $g(x)=g(y)$, alors $g'(g(x))=g'(g(y))$, soit $x=y$; g est donc biunivoque, et de même g'.

—soit $x'\in U'_T$: $g(g'(x'))=x'$, donc g est surjective, et de même g'.

Ainsi:

Si (U_T, u) et (U'_T, u') sont deux solutions du même problème universel, associées à un même ensemble E_S, alors il existe une bijection g, qui est une T-application de U_T sur U'_T, telle que: $u'=g\circ u$ et $u=g^{-1}\circ u'$ (g^{-1} étant également une T-application).

Cas particulier

Très souvent les éléments donnés du problème universel satisfont à la condition suivante (plus forte que la condition U 1):

U 4/ Pour qu'une bijection g d'un ensemble E_T sur un ensemble E'_T soit un isomorphisme, il faut et il suffit que g et g^{-1} soient des T-applications.

Si cette condition est vérifiée on a alors le résultat suivant:

Si (U_T, u) et (U'_T, u') sont deux solutions du même problème universel, associées à un même ensemble E_S, alors U_T et U'_T sont isomorphes.

Exemple

E_S: les anneaux intègres.

E_T: les corps.

(S, T)-applications: les homomorphismes biunivoques d'un anneau intègre dans un corps.

T-applications: les homomorphismes biunivoques d'un corps dans un corps.

Les conditions U 1, U 2, U 3 sont bien remplies. Ce problème universel est résolu de la façon suivante:

A tout anneau intègre E_S on fait correspondre son corps des fractions U_T et l'application u:

$$x\in E_S\to x/1\in U_T$$

En effet, étant donnés un corps E_T et un homorphisme biunivoque f de E_S dans E_T, il suffit de définir l'application g de U_T dans E_T par:

$$g(x/y)=f(x)\cdot(f(y))^{-1}$$

Nous remarquons qu'ici la condition U 4 est également vérifiée, par suit tout autre corps universel pour ce problème sera isomorphe au corps des frac tions.

Chapitre I: Construction d'un anneau booleien universel

1. Définition d'un ensemble prébooléien

Nous définirons la structure d'ensemble prébooléien au moyen des donnée suivantes :

—un ensemble non vide F, éléments notés $x, y, z, \ldots$

—une loi de composition interne partout définie sur F, notée $x \cdot y$, et pouvar être appelée "multiplication".

—une application de F dans $F: x \to -x$ ("négation")

—une famille non vide $(C_k)_{k \in K}$ de parties de F.

Ces données devant vérifier les deux axiomes suivants :

P 1/ $(x \in C_k) \Longleftrightarrow (-x \notin C_k)$ pour tout x et tout k

P 2/ $(x \cdot y \in C_k) \Longleftrightarrow (x \in C_k$ et $y \in C_k)$ pour tout x, tout y et tout k.

Notons que les opérations de multiplication et de négation ne sont soumise à aucune condition (telle que associativité, etc $\cdots$).

$(C_k)_K$ sera dite la *famille déductive* de F, chaque C_k étant un *ensemb déductif*.

L'ensemble $T = \bigcap_K C_k$ n'est jamais vide, car pour tout x on a: $-(x \cdot -$ $\in T$.

Cet ensemble $T = \bigcap_K C_k$ sera dit le *puits* de F.

Proposition 1: *T et chaque C_k sont stables pour la multiplication.*

Pour C_k c'est évident. Pour T: si x et y appartiennent à T, ils appartie nent à chaque C_k, donc aussi $x \cdot y$, par suite $x \cdot y \in T$.

Introduisons dans F la relation binaire $x \prec y$ exprimée par: $-(x \cdot -y) \in T$ c'est une relation de *préordre*, en effet:

$x \prec y$ peut s'exprimer par: pour tout k: $-(x \cdot -y) \in C_k$

soit: pour tout k: $x \cdot -y \notin C_k$

soit: pour tout k: $x \notin C_k$ ou $y \in C_k$

soit: pour tout k: si $x \in C_k$ alors $y \in C_k$

$x \prec x$ est alors évident.

Si on suppose $x < y$ et $y < z$, soit un k fixé et supposons $x \in C_k$, d'après $x < y$ on a $y \in C_k$, par suite d'après $y < z$ on a $z \in C_k$, ceci pour tout k, on a donc $x < z$.

Il en résulte que la relation binaire xRy exprimée par :

$$x < y \text{ et } y < x$$

est une relation d'équivalence dans F, elle sera dite *relation d'analogie*. Un ensemble prébooléien sera souvent désigné par $F(T, R)$, mettant ainsi en évidence son puits et sa relation d'analogie.

Notons que la relation d'analogie peut se traduire par : pour tout k : ($x \in C_k$ et $y \in C_k$) ou ($x \notin C_k$ et $y \notin C_k$).

PROPOSITION 2 : *T et chaque C_k sont saturés pour la relation d'analogie.*

En effet : soit $x \in C_k$ et y analogue à x, donc $y \in C_k$; et si $x \in T$ ceci a lieu pour tout k, donc aussi $y \in T$.

PROPOSITION 3 : *La relation d'analogie est compatible avec la multiplication et la négation.*

Démonstration : supposons xRx' et yRy'

a) si $x \cdot y \in C_k : x \in C_k$ donc $x' \in C_k$
et $y \in C_k$ donc $y' \in C_k$; donc $x' \cdot y' \in C_k$, ceci pour tout k, donc $x \cdot y < x' \cdot y'$, et de même pour la relation opposée.

b) si $-x \in C_k : x \notin C_k$ donc $x' \notin C_k$, donc $-x' \in C_k$, ceci pour tout k, donc $-x < -x'$, et de même pour la relation opposée.

THEOREME 1 : *F/R muni de la structure quotient est un anneau booléien ; il sera dit engendré par F.*

Démonstration : soit φ l'application canonique de F dans F/R ; pour F/R nous aurons :

multiplication : $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$
négation : $-\varphi(x) = \varphi(-x)$

D'après la proposition 3, ces définitions sont bien indépendantes des représentants choisis dans $\varphi(x)$ ou $\varphi(y)$. On peut ensuite définir :

disjonction : $\varphi(x) \vee \varphi(y) = -(-\varphi(x) \cdot -\varphi(y))$.

Toutes les propriétés d'associativité, commutativité, idempotence se vérifient aisément ; les éléments neutres sont :

$$1 = \varphi(x) \text{ pour } x \in T, \text{ soit } 1 = T, \ 0 = -1$$

Remarquons que tout anneau booléien peut être considéré comme un ensemble prébooléien pour sa multiplication et sa négation, en prenant comme famille déductive celle de tous ses *ultrafiltres* (c'est-àdire les complémentaires des idéaux maximaux) ; nous dirons qu'il s'agit là de sa structure prébooléienne *normale*, dans ce cas $T = \{1\}$, et la relation d'analogie se réduit à la relation d'identité, donc l'anneau booléien s'engendre lui-même.

Proposition 4 : *Chaque $\varphi(C_k)$ est un ultrafiltre de F/R.*

Démonstration : remarquons d'abord que si $\varphi(x) \in \varphi(C_k)$, il existe $x' \in C_k$ tel que $\varphi(x) = \varphi(x')$, x et x' sont donc analogues et par suite : $x \in C_k$.

a) si $\varphi(x) \in \varphi(C_k)$ et si $\varphi(y) \geq \varphi(x)$: $\varphi(x) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y)$, donc $x \cdot y$ est analogue à x, or $x \in C_k$, donc $x \cdot y \in C_k$, ce qui implique $y \in C_k$ et par suite $\varphi(y) \in \varphi(C_k)$.

b) si $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ appartiennent à $\varphi(C_k)$: x et y appartiennent à C_k, donc aussi $x \cdot y$, donc $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y) \in \varphi(C_k)$.

c) $0 \notin \varphi(C_k)$, car $0 = \varphi(x)$ où $-x \in T$, donc $-x \in C_k$ et $x \notin C_k$.

d) si $\varphi(x) \notin \varphi(C_k)$, alors $x \notin C_k$ donc $-x \in C_k$ et $-\varphi(x) = \varphi(-x) \in \varphi(C_k)$.

Etant donnés deux ensembles prébooléiens $F(T, R)$ et $F'(T', R')$, nous appellerons *préhomomorphisme* de F dans F' toute application f vérifiant les deux axiomes :

PH 1/ f conserve la multiplication et la négation modulo R' dans F'

PH 2/ $f(T) \subset T'$

Remarques : Ces deux axiomes sont indépendants, considérons en effet un anneau booléien B ayant au moins 4 éléments (donc au moins 2 ultrafiltres différents) ; désignons par $F'(T', R')$ cet anneau B muni de la strucure prébooléienne normale (on a donc $T' = \{1\}$), et par $F(T, R)$ l'ensemble B muni de la structure prébooléienne suivante :

—la multiplication et la négation sont celles de l'anneau booléien B.

—il y a un seul ensemble déductif $\mathscr{U}$ qui est un ultrafiltre choisi de l'anneau booléien B.

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

On a donc $T=\mathscr{U}$

Prenons pour f l'application identique de B dans B; elle conserve (exactement) la multiplication et la négation, donc satisfait à PH 1; par contre PH 2 n'est pas vérifié, car:

$$f(T)=f(\mathscr{U})=\mathscr{U}\not\subset T'=\{1\}.$$

Il est également facile de voir que PH 1 n'est pas une conséquence de PH 2: il suffit de prendre pour f l'application d'un anneau booléien B, muni de la structure prébooléienne normale, dans lui-même, définie par:

$f(x)=1$ pour tout x; on a bien $f(T)=\{1\}\subset T=\{1\}$; mais par contre: $f(-1)=f(0)=1$, alors que $-f(1)=-1=0$.

Nous remarquons également que si ces deux axiomes sont vérifiés, l'inclusion imposée par PH 2 peut fort bien être stricte, ce sera le cas, par exemple, lorsque f est l'application identique de $F'(T', R')$ dans $F(T, R)$, avec les notations du premier exemple de ces remarques, en effet:

$$f(T')=f(\{1\})=\{1\}\subsetneqq T=\mathscr{U}$$

Un préhomomorphisme sera dit *strict*[3], s'il conserve exactement la multiplication et la négation; ce sera le cas, en particulier, chaque fois que F' sera un anneau booléien muni de la structure prébooléienne normale. L'application canonique φ de F dans F/R est donc toujours un préhomomorphisme strict.

PROPOSITION 5: *La relation de préordre, et par suite celle d'analogie, sont conservées par tout préhomomorphisme.*

En effet, supposons $x<y$ dans F, et soit f un préhomomorphisme de F dans F', on a: $-(x\cdot -y)\in T$, donc d'après PH 2, $f(-(x\cdot -y))\in T'$, mais d'après PH 1, $f(-(x\cdot -y))$ est analogue à $-(f(x)\cdot -f(y))$, donc ce dernier élément appartient à T', donc $f(x)<f(y)$ dans F'.

THEOREME 2: *Soient $F(T, R)$ et $F'(T', R')$ deux ensembles prébooléiens, φ et φ' leurs applications canoniques dans F/R et F'/R', f un préhomomorphisme*

[3] La terminologie utilisée ici est différente de celle que l'on trouve dans "Ponasse, Comptes Rendus A. S." (qui est préhomomorphisme "égalitaire"), car il est préférable (ainsi que l'a d'ailleurs fait remarquer M. Guillaume, dans sa thèse) de n'utiliser le mot "égalitaire" que lorsqu'il s'agira de structure algébrisant le Calcul des Prédicats avec égalité.

de F dans F', alors l'application $\bar{f}$ définie par: $\bar{f}(\varphi(x)) = \varphi'(f(x))$ est un homomorphisme d'anneaux de F/R dans F'/R'.

En effet: d'après la proposition 5, $\bar{f}(\varphi(x))$ a une définition qui est bien indépendante du représentant choisi dans $\varphi(x)$.

a) $\bar{f}(-\varphi(x)) = \bar{f}(\varphi(-x)) = \varphi'(f(-x)) = \varphi'(-f(x))$ car $f(-x)$ et $-f(x)$ sont analogues; et $\varphi'(-f(x)) = -\varphi'(f(x)) = -\bar{f}(\varphi(x))$.

b) $\bar{f}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)) = \bar{f}(\varphi(x\cdot y)) = \varphi'(f(x\cdot y)) = \varphi'(f(x)\cdot f(y))$
$$= \varphi'(f(x))\cdot\varphi'(f(y)) = \bar{f}(\varphi(x))\cdot\bar{f}(\varphi(y))$$

THEOREME 3: *Si $\bar{f}$ est un homomorphisme d'anneaux de F/R dans un anneau booléien B quelconque, alors $f = \bar{f}\circ\varphi$ est un préhomomorphisme (strict) de F dans B muni de la structure prébooléienne normale.*

Démonstration:

a) $f(-x) = \bar{f}(\varphi(-x)) = \bar{f}(-\varphi(x)) = -\bar{f}(\varphi(x)) = -f(x)$

b) $f(x\cdot y) = \bar{f}(\varphi(x\cdot y)) = \bar{f}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)) = \bar{f}(\varphi(x))\cdot\bar{f}(\varphi(y)) = f(x)\cdot f(y)$

THEOREME 4: ***Soit F un ensemble prébooléien et B un anneau booléien fixé $\neq (0)$; pour que $x \in T$ il faut et il suffit que $f(x) = 1$ pour tout préhomomorphisme f de F dans B muni de la structure prébooléienne normale.***

Démonstration: a) si $x \in T$: $f(x) \in f(T) \subset \{1\}$, donc $f(x) = 1$.

b) si $f(x) = 1$ pour tout f: soit $\bar{f}$ un homomorphisme quelconque de F/R dans B, $f = \bar{f}\circ\varphi$ est un préhomomorphisme, donc $\bar{f}(\varphi(x)) = 1$; ceci étant vrai de tout homomorphisme $\bar{f}$, il en résulte (conséquence du théorème de représentation de Stone) que $\varphi(x) = 1$, et par suite $x \in T$.

Remarque: ce théorème peut s'utiliser en prenant pour B un anneau booléien particulièrement simple, tel que $Z/(2)$.

2. Ensemble prébooléien $\ddot{E}$

Soit E un ensemble absolument quelconque, nous désignerons par $(E, 0, 1)$ l'ensemble E complété par deux éléments supplémentaires notés 0 et 1 (ces deux éléments joueront essentiellement un rôle de position et n'ont aucun caractère d'éléments neutres). Nous appellerons *bloc* toute suite finie non vide d'éléments de $(E, 0, 1)$ écrits horizontalement par juxtaposition:

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

On désignera par $\ddot{E}$ l'ensemble des *tableaux* de la forme:

$$\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_{n'} \end{matrix} \cdots \begin{matrix} z_1 \cdots z_p \\ z'_1 \cdots z'_{p'} \end{matrix} \right\rangle$$

formés de deux lignes et d'un nombre fini de colonnes (au moins une), chaque colonne étant constituée de deux blocs superposés, chaque bloc supérieur devant comporter au moins un 1 et chaque bloc inférieur au moins un 0. Les éléments génériques de $\ddot{E}$ seront désignés par α, β, γ, ...

Une colonne d'un tableau α sera dite *close* si un élément au moins de son bloc supérieur figure également dans son bloc inférieur (indépendamment de sa position dans chacun de ces blocs). Une colonne non close sera dite *ouverte*. Un tableau α sera dit *clos* (resp. *ouvert*) si toutes ses colonnes sont closes (resp. si au moins une de ses colonnes est ouverte).

On désignera par U le sous-ensemble $\{0, 1\}$ de $(E, 0, 1)$, et par $\vec{E}$ l'ensemble de toutes les applications de E dans U. Pour $\alpha \in \ddot{E}$ et $f \in \vec{E}$ la *f-valeur* de α, notée $\ddot{f}(\alpha)$, sera le tableau obtenu en remplaçant dans α tous les éléments de E par leurs images par f.

Un tableau α sera dit *f-clos* (resp. *f-ouvert*) si $\ddot{f}(\alpha)$ est clos (resp. ouvert), il sera dit *infermable* s'il est f-ouvert pour tout $f \in \vec{E}$, sinon il sera dit *fermable*.

PROPOSITION 1: *Il y a équivalence entre:*

a) α *est clos* (*resp. ouvert*).

b) α *est f-clos* (*resp. f-ouvert*) *pour tout* $f \in \vec{E}$ (*resp. pour au moins un* $f \in \vec{E}$).

Démonstration: il suffit de raisonner sur clos et f-clos.

—Si α est clos, toutes ses colonnes sont closes, soit l'une de ces colonnes dont le bloc supérieur est $B = x_1 \cdots x_n$ et le bloc inférieur $B' = x'_1 \cdots x'_{n'}$, par hypothèse B et B' ont un élément commun, si c'est un 1 ou un 0 il en sera de même pour les blocs correspondants de $\ddot{f}(\alpha)$, si c'est un élément ξ de E, alors $f(\xi)$ sera un élément commun aux blocs correspondants de $\ddot{f}(\alpha)$; $\ddot{f}(\alpha)$ sera donc clos.

—Si α est f-clos pour tout f, raisonnons par l'absurde en supposant que α possède au moins une colonne ouverte (B, B'), soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les éléments de B (resp. $\xi'_1, \ldots, \xi'_{n'}$ les éléments de B') autres que 0 et 1 (s'il y en a); par hypothèse: $\xi_i \neq \xi'_j$ pour tout couple (i, j), soit f ainsi définie:

$$\begin{aligned} f(u) &= 1 \text{ si } u \text{ est l'un des } \xi_i \\ &= 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{aligned}$$

il est facile de constater que $\ddot{f}(\alpha)$ serait ouverte.

Remarques:

1) α infermable ne signifie pas que toutes ses colonnes soient ouvertes. Exemple: $\left\langle \begin{matrix} 1x & 1 & 1 \\ 0 & 0x & 01 \end{matrix} \right\rangle$.

2) α fermable ne signifie pas qu'il possède au moins une colonne close. Exemple: $\left\langle \begin{matrix} 1x \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$.

3) "clos" implique "fermable"
"infermable" implique "ouvert".

Multiplication des tableaux

Etant donnés deux tableaux α et β, nous définirons le produit $\alpha \cdot \beta$ de α par β comme étant le tableau obtenu en écrivant les colonnes de β à la suite de celles de α.

$$\left\langle \begin{matrix} B_1 & \cdots & B_n \\ B'_1 & & B'_n \end{matrix} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{matrix} C_1 & \cdots & C_p \\ C'_1 & & C'_p \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} B_1 & \cdots & B_n & C_1 & \cdots & C_p \\ B'_1 & & B'_n & C'_1 & & C'_p \end{matrix} \right\rangle$$

(les lettres B et C désignent des blocs).

Disjonction de tableaux

Nous définirons la disjonction $\alpha \vee \beta$ de deux tableaux α et β de la façon suivante:

$$\left\langle \begin{matrix} B_1 & \cdots & B_n \\ B'_1 & & B'_n \end{matrix} \right\rangle \vee \left\langle \begin{matrix} C_1 & \cdots & C_p \\ C'_1 & & C'_p \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} D_1 & \cdots & D_{np} \\ D'_1 & & D'_{np} \end{matrix} \right\rangle$$

avec:

$D_1 = B_1 C_1$ (c'est à dire le bloc formé par la juxtaposition de B_1 et C_1)
$D_2 = B_1 C_2, \ldots, D_p = B_1 C_p, \; D_{p+1} = B_2 C_1, \ldots, D_{2p} = B_2 C_p, \ldots.$
$D_{np} = B_n C_p$

et de même pour les blocs inférieurs.
Exemple:

$$\left\langle \begin{matrix} 1 & 1x \\ 0x & 0y \end{matrix} \right\rangle \vee \left\langle \begin{matrix} 1z & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 11z & 11 & 1x1z & 1x1 \\ 0x0 & 0x0 & 0y0 & 0y0 \end{matrix} \right\rangle$$

Remarques

La multiplication et la disjonction que nous venons de définir sont des opérations *associatives*, ceci n'intervient d'ailleurs pas dans la suite, toutefois il est bon de la remarquer car cela nous permettra de simplifier les notations. Cette propriété d'associativité est évidente pour la multiplication; pour la disjonction nous pouvons la démontrer de la façon suivante:

Les lettres K et Q désignant des colonnes, considérons les tableaux:

$$\alpha = \langle K_1 \cdots K_n \rangle \qquad \beta = \langle K'_1 \cdots K'_{n'} \rangle \qquad \gamma = \langle K''_1 \cdots K''_{n''} \rangle$$

et posons:

$$\alpha' = \alpha \vee (\beta \vee \gamma) = \langle Q'_1 \cdots Q'_{nn'n''} \rangle$$
$$\alpha'' = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \langle Q''_1 \cdots Q''_{nn'n''} \rangle$$

Cherchons la p-ième colonne de α' et de $\alpha''(1 \leq p \leq nn'n'')$:

1°) Pour α', on commence par déterminer l'entier s tel que:

$$(s-1)n'n'' < p \leq sn'n'' \qquad (1 \leq s \leq n)$$

posons $p = (s-1)n'n'' + t$ (1) avec $1 \leq t \leq n'n''$ (s et t sont uniques), Q'_p est alors la juxtaposition de K_s avec la t-ième colonne de $\beta \vee \gamma$.

On détermine alors l'entier r tel que: $(r-1)n'' < t \leq rn''$ $(1 \leq r \leq n')$ et on pose: $t = (r-1)n'' + u$ (2) avec $1 \leq u \leq n''$, on a alors:

$$Q'_p = K_s K'_r K''_u.$$

2°) De façon analogue pour α'': on détermine v tel que:

$$(v-1)n'' < p \leq vn'' \qquad (1 \leq v \leq nn')$$

on pose: $p = (v-1)n'' + w$ (3) avec $1 \leq w \leq n''$
on détermine ensuite i tel que: $(i-1)n' < v \leq in'$ $(1 \leq i \leq n)$
on pose: $v = (i-1)n' + j$ (4) avec $1 \leq j \leq n'$
on a alors: $Q''_p = K_i K'_j K''_w$

D'après (4): $v - 1 = (i-1)n' + j - 1$, (3) devient alors: $p = (i-1)n'n'' + (j-1)n'' + w$, or $0 \leq (j-1)n'' \leq (n'-1)n''$ et $1 \leq w \leq n''$, donc $1 \leq (j-1)n'' + w \leq n'n''$; en comparant avec (1) il en résulte: $i - 1 = s - 1$, donc $i = s$, et $(j-1)n'' + w = t$ que nous comparons avec (2), d'où $j - 1 = r - 1$, soit $j = r$, et $w = u$.

Donc $Q'_p = Q''_p$, et ceci quel que soit p, donc $\alpha' = \alpha''$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

Négation d'un tableau

a) Pour un tableau α n'ayant qu'une seule colonne :

$$\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_{n'} \end{matrix} \right\rangle$$

on pose :

$$-\alpha = \left\langle \begin{matrix} 1 & 1 & & 1 & 1x'_1 & 1x'_2 & & 1x'_{n'} \\ 0x_1 & 0x_2 & \cdots & 0x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\rangle \quad (n + n' \text{ colonnes})$$

b) Dans le cas général, si α a p colonnes :

$$\alpha = \langle K_1 K_2 \cdots K_p \rangle$$

posons $\alpha_i = \langle K_i \rangle$, l'associativité du produit nous permet d'écrire :

$$\alpha = \alpha_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_p$$

on pose alors :

$$-\alpha = -\alpha_1 \vee -\alpha_2 \vee \cdots \vee -\alpha_p$$

cette écriture étant justifiée par l'associativité de la disjonction.

Exemple :

$$\alpha = \left\langle \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0x & 0y \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle \cdot \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0y \end{matrix} \right\rangle$$

$$-\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 1 & 10 & 1x \\ 01 & 0 & 0 \end{matrix} \right\rangle \text{ et } -\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0y \end{matrix} \right\rangle = \left\langle \begin{matrix} 1 & 10 & 1y \\ 01 & 0 & 0 \end{matrix} \right\rangle$$

$$-\alpha = \left\langle \begin{matrix} 11 & 110 & 11y & 101 & 1010 & 101y & 1x1 & 1x10 & 1x1y \\ 0101 & 010 & 010 & 001 & 00 & 00 & 001 & 00 & 00 \end{matrix} \right\rangle.$$

THEOREME 1 : *Pour $f \in \vec{E}$ donnée :*

a) $\alpha \cdot \beta$ est f-clos, équivaut à : α et β sont f-clos.

b) $\alpha \vee \beta$ est f-clos, équivaut à : α ou β est f-clos.

c) $-\alpha$ est f-clos, équivaut à : α est f-ouvert.

Démonstration :

a) On remarque simplement que : $\ddot{f}(\alpha \cdot \beta) = \ddot{f}(\alpha) \cdot \ddot{f}(\beta)$, donc si $\alpha \cdot \beta$ est f-clos toutes les colonnes de $\ddot{f}(\alpha)$ et toutes les colonnes de $\ddot{f}(\beta)$ sont closes, et réciproquement.

b) On a également : $\ddot{f}(\alpha \vee \beta) = \ddot{f}(\alpha) \vee \ddot{f}(\beta)$; si $\alpha \vee \beta$ est f-ouvert, au moins une colonne K de $\ddot{f}(\alpha)\vee\ddot{f}(\beta)$ est ouverte, supposons que cette colonne soit la juxtaposition des colonnes K_i et K'_j de $\ddot{f}(\alpha)$ et de $\ddot{f}(\beta)$, le bloc supérieur de K ne comporte que des 1 et son bloc inférieur que des 0, il en est donc de même de K_i et de K'_j, donc α et β sont f-ouverts; et réciproquement.

c) Il suffit de raisonner dans le cas où α n'a qu'une colonne: si $-\alpha$ est f-clos,

$$\text{pour tout } x_i : x_i = 1 \text{ ou } f(x_i) = 1$$
$$\text{pour tout } x'_j : x'_j = 0 \text{ ou } f(x'_j) = 0$$

(avec les notations précédentes).

Donc α est f-ouvert; et réciproquement.

Il en résulte alors les deux théorèmes suivants:

Theoreme 2: a) *$\alpha\cdot\beta$ est clos, équivaut à: α et β sont clos.*

b) *$\alpha\cdot\beta$ est ouvert, équivaut à: α ou β est ouvert.*

c) *$\alpha\vee\beta$ est fermable, équivaut à: α ou β est fermable.*

d) *$\alpha\vee\beta$ est infermable, équivaut à: α et β sont infermables.*

e) *α est clos (resp. ouvert, resp. fermable, resp. infermable), équivaut à: $-\alpha$ est infermable (resp. fermable, resp. ouvert, resp. clos).*

Theoreme 3: a) *Si α ou β est infermable, alors $\alpha\cdot\beta$ est infermable.*

b) *Si $\alpha\cdot\beta$ est fermable, alors α et β sont fermables.*

c) *Si α ou β est clos, alors $\alpha\vee\beta$ est clos.*

d) *Si $\alpha\vee\beta$ est ouvert, alors α et β sont ouverts.*

Désignons par C_f l'ensemble des tableaux qui sont f-clos.

Theoreme 4: *$\ddot{E}$ est un ensemble prébooléien pour la multiplication et la négation précédemment définies, et pour la famille déductive $(C_f)_{f\in\vec{E}}$.*

Ceci résulte du théorème 1 précédent. Remarquons, en utilisant la proposition 1, que le puits de $\ddot{E}$ n'est autre que l'ensemble des tableaux clos.

Nous allons voir que cet ensemble $\ddot{E}$ possède certains caractères d'universalité, sans toutefois être vraiment un ensemble universel, mais le résultat partiel que nous allons établir nous permettra, au paragraphe suivant, de résoudre facilement un autre problème d'universalité concernant les anneaux booléiens.

Envisageons le problème universel relatif aux données suivantes:

E_S: les ensembles quelconques.

E_T: les ensembles prébooléiens.

(S, T)-applications: toutes les applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble prébooéien.

T-applications: les préhomomorphismes d'ensembles prébooléiens.

Ces données vérifient les trois conditions requises (cf. Préliminaires), en effet:

U 1/ Un isomorphisme est un préhomomorphisme.

U 2/ Si g est un préhomomorphisme de $F(T, R)$ dans $F'(T', R')$, et g' un préhomomorphisme de F' dans $F''(T'', R'')$, alors $g' \circ g$ est un préhomomorphisme de F dans F'', car:

a) $-g(x)$ est analogue dans F' à $g(-x)$, donc (prop. 5, parag. 1, chap. I) $g'(g(-x))$ est analogue dans F'' à $g'(-g(x))$, lui-même analogue à $-g'(g(x))$.

b) $g(x \cdot y)$ est analogue dans F' à $g(x) \cdot g(y)$, donc $g'(g(x \cdot y))$ est analogue dans F'' à $g'(g(x) \cdot g(y))$, lui-même analogue à: $g'(g(x)) \cdot g'(g(y))$.

c) $g(T) \subset T'$, donc $g'(g(T)) \subset g'(T') \subset T''$.

U 3/ Vérification triviale.

Faisons alors correspondre à un ensemble quelconque E l'ensemble prébooléien $\ddot{E}$ que nous venons de construire, et l'application h de E dans $\ddot{E}$ définie par:

$$h(x) = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle.$$

Soit $F(T, R)$ un autre ensemble prébooléien et f une application de E dans F; définissons l'application g de $\ddot{E}$ dans F de la façon suivante:

a) Pour un tableau α n'ayant qu'une colonne:

—Si α est clos (resp. infermable), on pose: $g(\alpha) = e$ (resp. $g(\alpha) = -e$) où e est un élément fixé quelconque de T.

—Si α n'est ni clos ni infermable: soit B (resp. B') son bloc supérieur (resp. inférieur), soit $\xi_1 \cdots \xi_n$ (resp. $\xi'_1 \cdots \xi'_{n'}$) la sous-suite de B (resp. B') composée seulement d'éléments de E (ces sous-suites ne peuvent pas être vides), on pose alors:

$$g(\alpha) = f(\xi'_1) \vee (\cdots \vee (f(\xi'_{n'}) \vee (-f(\xi_1) \vee (\cdots \vee (-f(\xi_n)) \cdots)).$$

b) Si α possède p colonnes: on décompose α en produit de tableaux n'ayant qu'une seule colonne:

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

$$\alpha = \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_p$$

et l'on pose:

$$g(\alpha) = g(\alpha_1) \cdot (g(\alpha_2) \cdot (\cdots \cdot (g(\alpha_{p-1}) \cdot g(\alpha_p)) \cdots)).$$

On vérifie aisément que g est un préhomomorphisme de $\ddot{E}$ dans F, en outre si $x \in E$:

$$g(h(x)) = g\left(\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle\right) = f(x) \qquad \text{donc } f = g \circ h.$$

Toutefois une décomposition analogue de f peut être obtenue avec un autre préhomomorphisme g' (ne serait-ce qu'en remplaçant e par un autre élément e' de T).

3. Anneau booléien universel $\langle E \rangle$

Nous noterons $\langle E \rangle$ l'anneau booléien engendré par l'ensemble prébooléien $\ddot{E}$ précédent. Les éléments de $\langle E \rangle$ seront appelés des *grilles*; une grille, c'est à dire la classe d'analogie d'un tableau α, sera notée $\langle \alpha \rangle$, ou si l'on désire expliciter l'écriture du tableau α:

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_{n'} \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} z_1 \cdots z_p \\ z'_1 \cdots z'_{p'} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

φ désignera toujours l'application canonique de $\ddot{E}$ dans $\langle E \rangle$. Rappelons qu'un ensemble déductif C_f de $\ddot{E}$ est l'ensemble des tableaux f-clos pour une application donnée f de E dans U, et que deux tableaux sont analogues si pour tout f ils sont tous deux f-clos ou tous deux f-ouverts.

Liste des cas usuels d'analogie pour deux tableaux α et β:

1°/ β est obtenu à partir de α par interversion de colonnes, ou par interversion d'éléments de $(E, 0, 1)$ à l'intérieur des blocs.

2°/ β est obtenu à partir de α par adjonction d'un certain nombre de colonnes qui s'y trouvaient déjà.

3°/ β est obtenu à partir de α par adjonction d'un certain nombre de colonnes closes.

4°/ β est obtenu à partir de α par adjonction à certains blocs de certains éléments de $(E, 0, 1)$ qui s'y trouvaient déjà.

Tout ceci se vérifie immédiatement et nous permettra bien souvent à partir d'un tableau donné de trouver un tableau analogue dont l'écriture sera beaucoup plus simple.

Exemple : le tableau $-\alpha$ (qui comporte 9 colonnes) calculé en exemple de la négation au paragraphe précédent, est tout simplement analogue à $\left\langle \begin{matrix} 1xy \\ 0 \end{matrix} \right\rangle$.

Nous dirons qu'une grille $\langle \alpha \rangle$ est f-close, f-ouverte, close, ouverte, fermable, infermable, suivant que l'un quelconque de ses représentants α possède l'une de ces qualités (ces définitions sont évidemment indépendantes du représentant choisi).

Il y a une seule grille close, elle sera notée $\langle 1 \rangle$, ou si l'on désire faire apparaître l'un de ses représentants : $\langle 1 \rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 01 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$ et une seule grille infermable, notée $\langle 0 \rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$.

Ces deux grilles sont les éléments neutres de $\langle E \rangle$.

A partir de $f \in \vec{E}$ nous avons déjà défini une application $\ddot{f}$ (d'ailleurs un préhomomorphisme) de $\ddot{E}$ dans $\ddot{E}$, nous définirons maintenant une application $\hat{f}$ de $\langle E \rangle$ dans $\langle E \rangle$ par :

$$\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle \ddot{f}(\alpha) \rangle$$

α étant un représentant quelconque de $\langle \alpha \rangle$.

On définira également la f-valeur de la grille $\langle \alpha \rangle$ comme étant $\hat{f}(\langle \alpha \rangle)$. Cette définition est bien indépendante du représentant choisi, car si β est analogue à α :

—si α est f-clos, β aussi, $\ddot{f}(\alpha)$ et $\ddot{f}(\beta)$ sont clos, alors $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 1 \rangle$.

—si α est f-ouvert, β aussi, $\ddot{f}(\alpha)$ et $\ddot{f}(\beta)$ sont infermables, et alors $\hat{f}(\langle \alpha \rangle) = \langle 0 \rangle$.

Remarquons qu'en fait les $\hat{f}$ sont des homomorphismes de $\langle E \rangle$ dans l'anneau booléien à deux éléments $\{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$, que nous désignerons par $\hat{U}$, qui est d'ailleurs isomorphe à $\langle \emptyset \rangle$, isomorphe également à $Z/(2)$.

Exemples d'opérations dans $\langle E \rangle$

1°/ Multiplication : $\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \cdot \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1x \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 & 1x \\ 0x & 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \langle 0 \rangle$

2°/ Disjonction : $\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \vee \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 & 1x \\ 0y & 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 11 & 11x \\ 0x0y & 0x0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0xy \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$

3°/ Négation : $-\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 & 10 & 1x \\ 01 & 0 & 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1x \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$.

Mais bien entendu, comme dans tout anneau booléien, ces trois opérations ne sont pas indépendantes, on pourrait par exemple exprimer la disjonction au moyen de la multiplication et de la négation.

A partir de ces trois opérations fondamentales, nous définissons, comme dans tout anneau booléien :

4°/ Addition : $\langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle = (\langle\alpha\rangle \cdot -\langle\beta\rangle) \vee (-\langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle)$

5°/ Conditionnel : $\langle\alpha\rangle \rightarrow \langle\beta\rangle = \langle\alpha\rangle + \langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle + \langle 1\rangle = -\langle\alpha\rangle \vee \langle\beta\rangle$

6°/ Biconditionnel : $\langle\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\beta\rangle = \langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle + \langle 1\rangle = -(\langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle)$

$$= (\langle\alpha\rangle \rightarrow \langle\beta\rangle) \cdot (\langle\beta\rangle \rightarrow \langle\alpha\rangle)$$

Problème universel

Nous nous proposons ici de résoudre le problème universel relatif aux données suivantes :

E_S : les ensembles quelconques.

E_T : les anneaux booléiens.

(S, T)-applications : toutes les applications d'un ensemble quelconque dans un anneau booléien.

T-applications : les homomorphismes d'anneaux booléiens.

Les trois conditions requises se vérifient immédiatement.

Ce problème est résolu de la façon suivante : associons à tout ensemble E l'anneau booléien $\langle E\rangle$ que nous venons de construire, et l'application $H = \varphi \circ h$ (h étant l'application de E dans $\ddot{E}$ définie au paragraphe précédent), c'est à dire : $H(x) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$.

Soit B un anneau booléien et f une application de E dans B ; nous pouvons considérer B comme un ensemble prébooléien muni de la structure normale, donc, d'après le paragraphe précédent, il existe au moins un préhomomorphisme g de $\ddot{E}$ dans B tel que $f = g \circ h$. Le théorème 2, parag. 1, nous permet alors de dire : l'application G définie par $G(\varphi(x)) = g(x)$ est un homomorphisme de $\langle E\rangle$ dans B. Par ailleurs :

$$G \circ H = G \circ (\varphi \circ h) = (G \circ \varphi) \circ h = g \circ h = f.$$

Démontrons maintenant que cette décomposition est unique : en effet si $G' \circ H$ en est une autre, les homomorphismes G et G' doivent coïncider sur $H(E)$, et il suffit alors de remarquer que toute grille est composée par multiplication, disjonction et négation de grilles "élémentaires" de la forme $H(x)$:

$$\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_{n'} \end{matrix} \cdots \begin{matrix} z_1 \cdots z_p \\ z'_1 \cdots z'_{p'} \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_{n'} \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \cdot \cdots \cdot \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} z_1 \cdots z_p \\ z'_1 \cdots z'_{p'} \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$$

$$\text{et } \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_{n'} \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1x_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \vee \cdots \vee \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1x_n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \vee \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x'_1 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \vee \cdots \vee \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x'_{n'} \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$$

$$\text{et } \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1x_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = -\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x_1 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle.$$

Autrement dit $\langle E \rangle$ est un anneau booléien libre.

THEOREME 1: *$\langle E \rangle$ et H, associés à E, sont universels pour le problème d'universalité envisagé.*

Remarquons en outre que la condition U 4 (cf. Préliminaires) est ici vérifiée :

Pour qu'une bijection F d'un anneau booléien B sur un anneau booléien B' soit un isomorphisme, il faut et il suffit que F et F^{-1} soient des homorphismes. Il en résulte :

THEOREME 2: *Tout autre anneau booléien universel, associé à E, pour ce même problème d'universalité, sera isomorphe à $\langle E \rangle$.*

4. Propriétés topologiques de l'anneau $\langle E \rangle$

Considérons l'ensemble $\mathfrak{P}(\vec{E})$ que nous supposerons muni de la structure habituelle d'anneau booléien. Soit Θ l'application de $\langle E \rangle$ dans $\mathfrak{P}(\vec{E})$ définie par :

$\Theta(\langle\alpha\rangle) =$ ensemble des $f \in \vec{E}$ tels que $\hat{f}(\langle\alpha\rangle) = \langle 1 \rangle$.

THEOREME 1: *Θ est un homomorphisme biunivoque de $\langle E \rangle$ dans $\mathfrak{P}(\vec{E})$.*

Démonstration : Le fait que Θ soit un homomorphisme résulte immédiatement du théorème 1, parag. 2, c'est à dire :

$$\Theta(\langle 1 \rangle) = \vec{E} \qquad \Theta(-\langle\alpha\rangle) = \complement\Theta(\langle\alpha\rangle) \qquad \Theta(\langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle) = \Theta(\langle\alpha\rangle) \cap \Theta(\langle\beta\rangle).$$

Supposons maintenant $\langle\alpha\rangle \neq \langle\beta\rangle$, les tableaux α et β n'étant pas analogues, il existe au moins un f tel que :

α soit f-clos et β f-ouvert

ou α soit f-ouvert et β f-clos.

Donc f appartiendra à l'un des ensembles $\Theta(\langle\alpha\rangle)$ et $\Theta(\langle\beta\rangle)$ mais pas à l'autre ; Θ est donc biunivoque.

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

En vue d'une étude plus détaillée de $\langle E\rangle$ par rapport à $\mathfrak{P}(\vec{E})$, nous allons établir le lemme suivant:

LEMME: *Soient A et B deux parties finies et disjointes de $\vec{E}$, alors il existe au moins une grille $\langle\alpha\rangle$ qui soit f-close pour tout $f\in A$ et g-ouverte pour tout $g\in B$; nous dirons qu'une telle grille est A-close et B-ouverte.*

Démonstration:—si $A=B=\emptyset$: n'importe quelle grille convient.—si $A=\emptyset \neq B$: la grille $\langle 0\rangle$ convient.—si $A\neq\emptyset=B$: la grille $\langle 1\rangle$ convient.—supposons maintenant A et B non vides, posons: $A=\{f_1,\ldots,f_n\}$, $B=\{g_1,\ldots,g_p\}$.

a) si $n=p=1$: A et B étant disjointes on a $f_1\neq g_1$, donc il existe $x\in E$ tel que $f_1(x)\neq g_1(x)$, pour cet x choisi:

—si $f_1(x)=1$ et $g_1(x)=0$: on prend $\langle\alpha\rangle=\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix}1\\0x\end{matrix}\right\rangle\!\!\right\rangle$

—si $f_1(x)=0$ et $g_1(x)=1$: on prend $\langle\alpha\rangle=\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix}1x\\0\end{matrix}\right\rangle\!\!\right\rangle$.

Dans les deux cas $\langle\alpha\rangle$ est A-close et B-ouverte.

b) si $n\geq 1$ et $p=1$: d'après a):

—il existe $\langle\alpha_1\rangle$ qui soit f_1-close et g_1-ouverte

—il existe $\langle\alpha_2\rangle$ qui soit f_2-close et g_1-ouverte

. . . . . .

—il existe $\langle\alpha_n\rangle$ qui soit f_n-close et g_1-ouverte.

alors $\langle\alpha\rangle=\langle\alpha_1\rangle\vee\langle\alpha_2\rangle\vee\cdots\vee\langle\alpha_n\rangle$ est bien A-close et B-ouverte.

c) si $n\geq 1$ et $p\geq 1$: d'après b):

—il existe $\langle\alpha_1\rangle$ qui soit A-close et g_1-ouverte

—il existe $\langle\alpha_2\rangle$ qui soit A-close et g_2-ouverte

. . . . . .

—il existe $\langle\alpha_p\rangle$ qui soit A-close et g_p-ouverte.

alors $\langle\alpha\rangle=\langle\alpha_1\rangle\cdot\langle\alpha_2\rangle\cdot\cdots\cdot\langle\alpha_p\rangle$ est bien A-close et B-ouverte.

THEOREME 2: *Si E est un ensemble fini de n éléments, alors $\langle E\rangle$ est isomorphe à $\mathfrak{P}(\vec{E})$, et a pour nombre d'éléments:* 2^{2^n}.

En effet: montrons que Θ est surjective:

Soit $A\in\mathfrak{P}(\vec{E})$, posons $B=\complement A$, A et B sont deux parties finies et disjointes de $\vec{E}$, donc il existe une grille $\langle\alpha\rangle$ qui est A-close et B-ouverte, il en résulte: $A=\Theta(\langle\alpha\rangle)$.

Dans le cas où E est un ensemble infini, Θ n'est plus surjective, mais si

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

nous identifions $\mathfrak{P}(\vec{E})$ à $U^{\vec{E}}$, et que nous le munissions de la topologie produit (U étant muni de la topologie discrète), nous obtenons le résultat suivant:

THEOREME 3: *$\Theta(\langle E \rangle)$ est partout dense dans $\mathfrak{P}(\vec{E})$.*

Démonstration:

Considérons un ensemble élémentaire de $U^{\vec{E}}$: $V = \prod_{f \in \vec{E}} U_f$

avec: $U_f \subset U$ pour tout f

$U_f = U$ sauf peut-être pour un nombre fini d'indices.

posons: $A =$ ensemble des indices f tels que $U_f = \{1\}$

$B =$ ensemble des indices f tels que $U_f = \{0\}$.

A et B sont deux parties finies et disjointes de $\vec{E}$, donc il existe une grille $\langle \alpha \rangle$ qui est A-close et B-ouverte.

$\Theta(\langle \alpha \rangle)$, en tant qu'élément de $U^{\vec{E}}$, est identifié à $(u_f)_{f \in \vec{E}}$

avec: $u_f = 1$ si $f \in \Theta(\langle \alpha \rangle)$

$= 0$ sinon.

Donc: $u_f = 1$ si $f \in A$, d'où $u_f \in U_f$

$= 0$ si $f \in B$, d'où $u_f \in U_f$

et pour tout autre indice: $u_f \in U_f$, car alors $U_f = U$.

Il en résulte $\Theta(\langle \alpha \rangle) \in V$. Ainsi tout ensemble élémentaire contient un élément de $\Theta(\langle E \rangle)$, ce qui démontre le théorème.

Dans le cas où E est fini, avec n éléments, on a vu que $\langle E \rangle$ possède 2^{2^n} éléments, l'ensemble X de tous les ultrafiltres de $\langle E \rangle$ possède alors 2^n éléments, c'est à dire le même nombre d'éléments que $\vec{E}$; dans le cas infini ce résultat se généralise sous la forme suivante:

THEOREME 4: *L'ensemble X des ultrafiltres de $\langle E \rangle$ est équipotent* à $\vec{E}$.

Démonstration:

Pour $f \in \vec{E}$, désignons par Γ_f l'ensemble des grilles f-closes, c'est à dire: $\Gamma_f = \varphi(C_f)$.

Nous savons déjà que tous les Γ_f sont des ultrafiltres (proposition 4, parag. 1).

Réciproquement, soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre de $\langle E \rangle$, sa fonction caractéristique g est un homomorphisme de $\langle E \rangle$ dans $Z/(2)$; soit alors f l'application définie sur E par:

$$f(x) = g\left(\left\langle\!\left\langle {1 \atop 0x} \right\rangle\!\right\rangle\right) = g(H(x))$$

on a :

$$\hat{f}(H(x)) = \hat{f}\left(\left\langle\!\left\langle {1 \atop 0x} \right\rangle\!\right\rangle\right) = <\ddot{f}\left(\left\langle {1 \atop 0x} \right\rangle\right)> = \left\langle\!\left\langle {1 \atop 0f(x)} \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle {1 \atop 0g(H(x))} \right\rangle\!\right\rangle$$

donc : $\hat{f}(H(x)) = \langle 0 \rangle$ si $g(H(x)) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\; = \langle 1 \rangle$ si $g(H(x)) = 1$

En identifiant $Z/(2)$ et $\hat{U}$, les homomorphismes $\hat{f}$ et g sont donc identiques sur $H(E)$, et par suite, comme on l'a déjà vu, sont identiques sur $\langle E \rangle$.

$\mathscr{U}$ est l'ensemble des $\langle\alpha\rangle$ tels que $g(\langle\alpha\rangle) = 1$

Γ_f est l'ensemble des $\langle\alpha\rangle$ tels que $\hat{f}(\langle\alpha\rangle) = \langle 1 \rangle$

d'où $\mathscr{U} = \Gamma_f$

Ainsi l'application Γ: $f \to \Gamma_f$ est une application de $\vec{E}$ sur X.

Considérons deux éléments différents f et g de $\vec{E}$: il existe $x \in E$ pour lequel $f(x) \neq g(x)$, supposons, par exemple, $f(x) = 1$ et $g(x) = 0$, alors la grille : $\left\langle\!\left\langle {1 \atop 0x} \right\rangle\!\right\rangle$ est f-close et g-ouverte, donc $\Gamma_f \neq \Gamma_g$. Donc Γ est biunivoque.

Du point de vue topologique ce théorème se complète de la façon suivante :

THEOREME 5 : *U^E muni de la topologie produit des topologies discrètes est homéomorphe à l'espace booléien X (ou espace des ultrafiltres) dual de $\langle E \rangle$.*

Démonstration : Rappelons la topologie d'espace booléien sur X : d'après le théorème de Stone, l'application σ qui à $\langle\alpha\rangle$ fait correspondre l'ensemble des ultrafiltres contenant $\langle\alpha\rangle$, est un isomorphisme de $\langle E \rangle$ dans $\mathfrak{P}(X)$; l'ensemble $\mathfrak{O}$ des parties de X qui sont réunions d'éléments de $\sigma(\langle E \rangle)$ peut alors être pris comme ensemble d'ouverts ; X est alors un espace topologique compact, séparé au sens d'Haudorff, dans lequel tous les ofs (un "of" est un ensemble à la fois ouvert et fermé) sont tous les éléments de $\sigma(\langle E \rangle)$.

D'après le théorème 4, X est homéomorphe à U^E (identifié à $\vec{E}$) muni de la topologie $\mathfrak{T}_1$ dans laquelle les ouverts sont les images par Γ^{-1} des ouverts de X. Nous désignerons par $\mathfrak{T}_2$ la topologie produit des topologies discrètes sur U^E. Montrons que les topologies $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ sont identiques.

Soit Ω un ouvert de U^E dans $\mathfrak{T}_1$: Ω est l'image par Γ^{-1} d'un ouvert de X, soit $\bigcup\limits_{\zeta \in I} \sigma(\langle\alpha_\zeta\rangle)$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

Pour toute grille $\langle\alpha\rangle$ on a $\Gamma^{-1}(\sigma(\langle\alpha\rangle) = \Theta(\langle\alpha\rangle)$, en effet:

$f \in \Theta(\langle\alpha\rangle)$ équivaut à: $\langle\alpha\rangle$ est f-close
soit à: $\langle\alpha\rangle \in \Gamma_f$
soit à: $\Gamma_f \in \sigma(\langle\alpha\rangle)$
soit à: $f \in \Gamma^{-1}(\sigma(\langle\alpha\rangle))$

On a donc:

$$\Omega = \cup\, \Theta(\langle\alpha_\xi\rangle)$$

Considérons une grille $\langle\alpha\rangle$, fixons l'un de ses représentants α, nous savons que la f-clôture de $\langle\alpha\rangle$ équivaut à celle du tableau α; dans l'écriture de ce tableau α figure un nombre fini d'éléments de E, soient $x_1, \ldots, x_n$, et la f-clôture de α ne dépend que des valeurs de f pour ces éléments x_i.

Ainsi la recherche des f-clôtures de $\langle\alpha\rangle$ se remène à l'étude des 2^n applications de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans U; soient $f'_1, \ldots, f'_p$ les restrictions différentes de tous les $f \in \Theta(\langle\alpha\rangle)$ à $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ($p \leqslant 2^n$), pour un x_i et un f'_j fixés posons:

$$U^j_{x_i} = \{f'_j(x_i)\}$$

et pour un j fixé:

$$\omega_j = \prod_{x \in E} U^j_x$$

avec:

$$\begin{aligned} U^j_x &= U \text{ si } x \text{ n'est pas l'un des } x_i \ (i = 1, \ldots, n) \\ &= U^j_{x_i} \text{ si } x = x_i. \end{aligned}$$

Cet ensemble ω_j est un ensemble élémentaire de U^E (au sens de la topologie $\mathfrak{C}_2$).

Donc l'ensemble $\omega = \bigcup_{j=1}^{n} \omega_i$ est un ouvert dans $\mathfrak{C}_2$.

Soit $f \in \Theta(\langle\alpha\rangle)$, en tant qu'élément de U^E, il est identifié à $(f(x))_{x\in E}$, et si f'_j est la restriction de f à $\{x_1, \ldots, x_n\}$, on a évidemment: $f \in \omega_j$, par suite $f \in \omega$.

Réciproquement, soit $f \in \omega$, il existe j tel que $f \in \omega_j$, la restriction de f à $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est alors f'_j, donc $f \in \Theta(\langle\alpha\rangle)$.

Ainsi $\Theta(\langle\alpha\rangle) = \omega$, donc $\Omega = \cup\, \Theta(\langle\alpha_\xi\rangle)$ est un ouvert dans la topologie $\mathfrak{C}_2$.

Réciproquement, considérons un ensemble élémentaire de $\mathfrak{C}_2$, soit $\prod_{x\in E} U_x$, avec $U_x = U$ sauf pour un nombre fini d'indices $x_1, \ldots, x_n$.

Posons:

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

$$\alpha_i = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0x_i \end{matrix} \right\rangle \text{ si } U_{xi} = 1$$

$$= \left\langle \begin{matrix} 1x_i \\ 0 \end{matrix} \right\rangle \text{ si } U_{xi} = 0$$

et soit $\alpha = \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_n$.

Pour que α soit f-clos il faut et il suffit que tous les α_i soient f-clos, ce qui revient à dire que $f(x_i) \in U_{xi}$ pour tout i, il en résulte:

$$\Pi U_x = \Theta(\langle\alpha\rangle)$$

Donc tout ouvert dans la topologie $\mathfrak{G}_2$ l'est également dans la topologie $\mathfrak{G}_1$; ces deux topologies sont donc identiques.

Ce théorème nous permet donc de prendre tout simplement U^E muni de la topologie produit des topologies discrètes comme espace booléien dual de $\langle E\rangle$.

Chapitre II: Tableaux de reduction pour le calcul propositionnel

1. Préliminaires

Dans tout ce chapitre nous utiliserons les notations suivantes pour le Calcul Propositionnel classique:

$\mathscr{A}$: ensemble des atomes (formules se réduisant à une variable propositionnelle) notés p, q, r, ...

$\mathfrak{F}$: ensemble des formules du calcul propositionnel, notées P, Q, R, . . . construites au moyen des symboles logiques: $-\ \wedge\ \vee\ \rightarrow\ \leftrightarrow$ (N. B. Il s'agit des "well formed formulas" et non d'assemblages quelconques.)

$\mathfrak{T}$: ensemble des formules démontrables.

Nous rappelons les définitions et résultats suivants:

1°/ Soit $J \subset \mathfrak{F}$, on dit que la formule P est déductible sous les hypothèses de J, si $P \in J \cup \mathfrak{T}$, ou s'il existe Q telle que Q et $Q \rightarrow P$ soient déductibles sous les hypothèses de J. Ceci est précisé par:

2°/ "P est déductible sous les hypothèses de J" équivaut à: il existe une suite finie ("démonstration de P sous les hypothèses de J") de formules P_1, . . . , P_n, telle que $P_n = P$, et pour chaque i, $1 \leq i \leq n$, l'une des conditions suivantes soit réalisée:

a) $P_i \in J \cup \mathfrak{T}$.

b) il existe $j < i$ et $k < i$ tels que: $P_j = P_k \rightarrow P_i$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

Ceci indique une construction de l'ensemble, que nous noterons $\mathfrak{T}(J)$, des formules déductibles sous les hypothèses de J.

3°/ $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(\emptyset)$

4°/ Une partie J de $\mathfrak{F}$ est dite compatible si $\mathfrak{T}(J) \neq \mathfrak{F}$, cela équivaut à dire qu'il n'existe aucune formule P telle que P et $-P$ soient déductibles sous les hypothèses de J.

5°/ On appelle systéme déductif toute partie D de $\mathfrak{F}$ telle que:

$$\mathfrak{T}(D) = D \neq \mathfrak{F}$$

6°/ On appelle *système déductif complet* (en abrégé s.d.c.) toute partie V de $\mathfrak{F}$ qui est un système déductif tel que pour toute formule P:

$$P \in V \text{ ou } -P \in V$$

7°/ La relation R entre formules P et Q exprimée par: $P \leftrightarrow Q \in \mathfrak{T}$ est une relation d'équivalence dans $\mathfrak{F}$: soit $\mathfrak{F}/R$ l'espace quotient et φ l'application canonique de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}/R$, on définit une structure d'anneau booléien sur $\mathfrak{F}/R$, en posant:

$$\varphi(P) \cdot \varphi(Q) = \varphi(P \wedge Q) \qquad -\varphi(P) = \varphi(-P)$$
$$\varphi(P) \vee \varphi(Q) = \varphi(P \vee Q)$$

8°/ Si V est un s.d.c., alors $\varphi(V)$ est un ultrafiltre de $\mathfrak{F}/R$. Si U est un ultrafiltre de $\mathfrak{F}/R$, alors $\varphi^{-1}(U)$ est un s.d.c. (ce qui prouve l'existence de s.d.c.).

9°/ Si V est un s.d.c., alors:

a) $(P \in V) \Longleftrightarrow (-p \notin V)$

b) $(P \wedge Q \in V) \Longleftrightarrow (P \in V \text{ et } Q \in V)$

10°/ $\mathfrak{T}$ est l'intersection de tous les s.d.c.

On peut alors énoncer:

THEOREME 1: *$\mathfrak{F}$ est un ensemble prébooléien pour les opérations $\wedge$ et $-$, et pour la famille déductive constituée par tous les s.d.c. de $\mathfrak{F}$; le puits de $\mathfrak{F}$ est alors $\mathfrak{T}$, la relation d'analogie n'est autre que la relation R de 7° ci-dessus, et par suite l'anneau booléien engendré n'est autre que $\mathfrak{F}/R$ déjà considéré.*

Reprenons le problème universel envisagé au paragraphe 3, chap. I, relatif aux données suivantes:

E_S: ensembles quelconques.

E_T : anneaux booléiens.

(S, T)-applications : toutes les applications d'un E_S dans un E_T

T-applications : homomorphismes d'anneaux.

Nous nous proposons de montrer que $\mathfrak{F}/R$, associé à $\mathscr{A}$, est universel pour ce problème.

Lemme 1 : *Soit f une application quelconque de $\mathscr{A}$ dans un anneau booléien B, il existe un prolongement et un seul f° de f à $\mathfrak{F}$ vérifiant, quelles que soient les formules P et Q :*

1. $f^\circ(-P) = -f^\circ(P)$
2. $f^\circ(P \wedge Q) = f^\circ(P) \cdot f^\circ(Q)$
3. $f^\circ(P \vee Q) = f^\circ(P) \vee f^\circ(Q)$
4. $f^\circ(P \rightarrow Q) = f^\circ(P) \rightarrow f^\circ(Q)$
5. $f^\circ(P \leftrightarrow Q) = f^\circ(P) \leftrightarrow f^\circ(Q)$

Démonstration : appelons $\mathfrak{F}_n$ (n entier>0) l'ensemble des formules comportant au plus n symboles logiques, et soit $\Pi(n)$ la proposition :

"Il existe une application et une seule f_n de $\mathfrak{F}_n$ dans B, prolongeant f, et qui sur $\mathfrak{F}_n$ vérifie les 5 conditions considérées".

a) $\Pi(0)$ est vraie, avec $f_0 = f$

b) Supposons $\Pi(n)$ vraie, et définissons l'application f_{n+1} de $\mathfrak{F}_{n+1}$ dans B par :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(P) &= f_n(P) && \text{si } P \in \mathfrak{F}_n \\
&= -f_n(Q) && \text{si } P = -Q \\
&= f_n(Q) \cdot f_n(R) && \text{si } P = Q \wedge R \\
&= f_n(Q) \vee f_n(R) && \text{si } P = Q \vee R \\
&= f_n(Q) \rightarrow f_n(R) && \text{si } P = Q \rightarrow R \\
&= f_n(Q) \leftrightarrow f_n(R) && \text{si } P = Q \leftrightarrow R
\end{aligned} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{array}{l} P \text{ ayant exactement} \\ n+1 \text{ symboles} \\ \text{logiques} \end{array}$$

f_{n+1} est ainsi bien définie sur $\mathfrak{F}_{n+1}$, elle prolonge f_n et par suite f, elle vérifie bien sur $\mathfrak{F}_{n+1}$ les 5 conditions requises, et elle est unique (tout cela se vérifie immédiatement).

La proposition $\Pi(n)$ est donc vraie pour tout n. Pour toute formule P posons alors : $f^\circ(P) = f_n(P)$ n étant le nombre de symboles logiques de P.

f° applique $\mathfrak{F}$ dans B, prolonge f, vérifie les 5 conditions requises, et c'est la seule telle application.

LEMME 2 : *Le procédé décrit par le lemme 1 permet d'obtenir tous les pré-homomorphismes (stricts) de $\mathfrak{F}$ dans un anneau booléien B (muni de la structure normale).*

Démonstration :

a) Soit f° une application de $\mathfrak{F}$ dans B, construite ainsi que l'indique le lemme 1, f° conserve évidemment la multiplication et la négation. En outre, si $P \in \mathfrak{T}$, on a $f^\circ(P) = 1$, ceci se démontre par récurrence :

—vrai si P est un axiome (vérification simple).

—si $P \in \mathfrak{T}$ et $P \to Q \in \mathfrak{T}$ et si on suppose $f^\circ(P) = f^\circ(P \to Q) = 1$, alors $Q \in \mathfrak{T}$ et : $f^\circ(P \to Q) = f^\circ(P) \to f^\circ(Q) = f^\circ(P) + f^\circ(Q) \cdot f^\circ(P) + 1 = f^\circ(Q) = 1$.

Donc $f^\circ(\mathfrak{T}) \subset \{1\}$: f° est bien un préhomomorphisme.

b) Soit maintenant g un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans B, on a d'abord :

$$g(-P) = -g(P) \text{ et } g(P \wedge Q) = g(P) \cdot g(Q)$$

en outre le théorème 2, parag. 1, chap. I, nous indique que l'extension $\bar{g}$ de g, définie par $\bar{g}(\varphi(P)) = g(P)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{F}/R$ dans B, il en résulte :

$$g(P \vee Q) = g(P) \vee g(Q) \quad g(P \to Q) = g(P) \to g(Q) \quad g(P \leftrightarrow Q) = g(P) \leftrightarrow g(Q)$$

g est donc bien une application répondant aux conditions du lemme 1.

Remarques : 1°/ Tout préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans B est donc entièrement caractérisé par sa restriction sur $\mathscr{A}$.

2°/ Pour que $P \in \mathfrak{T}$, il faut et il suffit que $f(P) = 1$ pour tout préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans B (théorème 4, parag. 1, chap. I).

THEOREME 2 : *L'anneau booléien $\mathfrak{F}/R$ et l'application φ', restriction à $\mathscr{A}$ de l'application canonique φ, associés à $\mathscr{A}$, sont universels pour le problème envisagé.*

Démonstration : Soit f une application quelconque de $\mathscr{A}$ dans un anneau booléien B ; à partir de f nous construisons le préhomomorphisme f° (lemme 1 et 2) de $\mathfrak{F}$ dans B, puis l'extension $\bar{f}^\circ$ de f° définie par : $\bar{f}^\circ(\varphi(P)) = f^\circ(P)$ qui est un homomorphisme de $\mathfrak{F}/R$ dans B.

Si $p \in \mathscr{A}$:

$$\bar{f}^\circ(\varphi'(p)) = \bar{f}^\circ(\varphi(p)) = f^\circ(p) = f(p) \text{ donc } f = \bar{f}^\circ \circ \varphi'$$

En outre cette décomposition est unique, en effet soit F un autre homomorphisme de $\mathfrak{F}/R$ dans B, tel que $f = F \circ \varphi'$:

$\bar{f}^\circ \circ \varphi$ et $F \circ \varphi$ sont deux préhomomorphismes de $\mathfrak{F}$ dans B (théorème 3, parag. 1, chap. I), coïncidant sur $\mathscr{A}$, car:

$$\bar{f}^\circ(\varphi(p)) = \bar{f}^\circ(\varphi'(p)) = f(p) = F(\varphi'(p)) = F(\varphi(p))$$

donc ils sont identiques, et par suite $\bar{f}^\circ$ et F sont identiques.

2. Tableaux de réduction achevés

Le théorème 2, parag. 1, chap. II, et le théorème 2, parag. 3, chap. I, nous permettent d'énoncer:

Theoreme 1: *Les anneaux booléiens $\mathfrak{F}/R$ et $\langle\mathscr{A}\rangle$ sont isomorphes.*

Les propriétés d'universalité (cf. Préliminaires) nous permettent d'ailleurs de construire cet isomorphisme:

Rappelons que H désigne l'application de $\mathscr{A}$ dans $\langle\mathscr{A}\rangle$ définie par:

$$H(p) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0p \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$\langle\mathscr{A}\rangle$ et H étant universels: il existe un homomorphisme λ et un seul de $\langle\mathscr{A}\rangle$ dans $\mathfrak{F}/R$ tel que: $\varphi' = \lambda \circ H$

$\mathfrak{F}/R$ et φ' étant universels: il existe un homomorphisme μ et un seul de $\mathfrak{F}/R$ dans $\langle\mathscr{A}\rangle$ tel que: $H = \mu \circ \varphi'$

et nous savons que λ est un isomorphisme de $\langle\mathscr{A}\rangle$ sur $\mathfrak{F}/R$, et μ un isomorphisme (réciproque de λ) de $\mathfrak{F}/R$ sur $\langle\mathscr{A}\rangle$.

Nous ne connaissons μ que par ses valeurs sur $\varphi'(\mathscr{A})$ (ou $\varphi(\mathscr{A})$), mais nous savons que cela suffit à le déterminer entièrement.

Ainsi:

—A toute classe $\varphi(P)$ de formules analogues, correspond une grille $\mu(\varphi(P))$ bien déterminée.

—En particulier à toute formule P correspond une grille bien déterminée $\mu(\varphi(P))$.

—A toute grille de $\langle\mathscr{A}\rangle$ correspond une classe bien déterminée de formules analogues.

Définitions :

—la grille $\mu(\varphi(P))$ sera dite le "*tableau de réduction achevé*" (en abrégé t.r.a.) de la formule P; on notera: $r=\mu\circ\varphi$, c'est un préhomomorphisme strict de $\mathfrak{F}$ dans $\langle\mathscr{A}\rangle$ qui prolonge H.

—toute application f de $\mathscr{A}$ dans U sera dite un "*ensemble de valeurs de vérité*".

—toute application $\hat{f}\circ r$ de $\mathfrak{F}$ dans $\hat{U}$, sera dite une *f-vérification*.

—une formule P sera dite *f-exacte* si $\hat{f}(r(P))=\langle 1\rangle$, c'est à dire si $r(P)$ est f-close, et *f-inexacte* si $r(P)$ est f-ouverte.

—une formule P sera dite *incompatible* si elle est f-inexacte pour tout ensemble de valeurs de vérité, c'est à dire si $r(P)$ est infermable, sinon elle sera dite *compatible*, c'est à dire si elle est f-exacte pour au moins un f, ou si $r(P)$ est fermable.

THEOREME 2: *Les 3 propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *P est une formule démontrable*
2. *P est f-exacte pour tout ensemble de valeurs de vérité*
3. *$r(P)$ est clos.*

En effet, il y a équivalence entre:

$\varphi(P)=1$ dans $\mathfrak{F}/R$

$\mu(\varphi(P))=r(P)=\langle 1\rangle$ dans $\langle\mathscr{A}\rangle$

$r(P)$ est clos

$r(P)$ est f-clos pour tout $f\in\vec{\mathscr{A}}$

Exemples de calcul de t.r.a.

Exemple 1: $P=p\vee q\leftrightarrow(-p\rightarrow q)$

$$r(P)=r(p)\vee r(q)\leftrightarrow(-r(p)\rightarrow r(q))=r(p)\vee r(q)\leftrightarrow r(p)\vee r(q)=\langle 1\rangle$$

P est démontrable.

Exemple 2: $P=-p\vee p\quad r(P)=-r(p)\cdot r(p)=\langle 0\rangle$ P est incompatible.

Exemple 3: $P=-(p\leftrightarrow q)\quad r(P)=-(r(p)\leftrightarrow r(q))=r(p)+r(q)$
$$=(r(p)\cdot -r(q))\vee(-r(p))\cdot r(q))$$

$$r(p) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0p \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \quad r(q) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0q \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \quad -r(p) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \quad -r(q) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1q \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$r(p) \cdot -r(q) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 & 1q \\ 0p & 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \qquad -r(p) \cdot r(q) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p & 1 \\ 0 & 0q \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$r(P) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 11p & 11 & 1q1p & 1q1 \\ 0p0 & 0p0q & 00 & 00q \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 & 1pq \\ 0pq & 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

on en déduit : P n'est pas démontrable
P est f-exacte si $f(p) \neq f(q)$, elle est donc compatible
P est f-inexacte si $f(p) = f(q)$.

Remarques: Ce procédé nous fournit exactement l'analyse des valeurs de vérité au sens de W. V. O. Quine.

Nous verrons au paragraphe suivant un procédé beaucoup plus rapide pour le calcul des t.r.a., qui mettra en évidence l'analogie avec les tableaux sémantiques de E. W. Beth.

3. Opérations de rèduction

Considérons l'ensemble $\vec{\mathfrak{F}}$ des applications de $\mathfrak{F}$ dans U, et désignons par $\vec{\Pi}$ le sous-ensemble de $\vec{\mathfrak{F}}$ constitué par tous les préhomomorphismes de l'ensemble prébooléien $\mathfrak{F}$ (théorème 1, parag. 1, chap. II) dans U (U étant ici identifié à $Z/(2)$ muni de la structure prébooléienne normale).

PROPOSITION 1: *$\langle\mathfrak{F}\rangle$ est un ensemble prébooléien pour la multiplication et la négation de sa structure d'anneau booléien* (*parag.* 3, *chap.* I) *et pour la famille déductive* $(K_f)_{f\in\vec{\Pi}}$ *K_f étant l'ensemble des grilles f-closes.*

Ceci résulte immédiatement du fait que $(K_f)_{f\in\vec{\Pi}}$ est une sous-famille de $(K_f)_{f\in\vec{\mathfrak{F}}}$.

Notations

1°/ On notera $)\mathfrak{F}($ l'ensemble $\langle\mathfrak{F}\rangle$ lorsqu'il sera muni de la structure prébooléienne décrite par la proposition 1 précédente, ceci afin d'éviter toute confusion avec $\langle\mathfrak{F}\rangle$ qui désigne ce même ensemble considéré comme anneau booléien ou comme ensemble prébooléien mais avec la structure normale. Les éléments de $)\mathfrak{F}($ seront notés comme ceux de $\langle\mathfrak{F}\rangle$, mais en remplaçant $\langle\ \rangle$ et $\langle\langle\ \rangle\rangle$ par $)\ ($ et $))\ (($.

2°/ On notera $\{\mathfrak{F}\}$ (l'anneau booléien engendré par $)\mathfrak{F}($ Remarquons que le puits de $)\mathfrak{F}($ est l'ensemble des grilles qui sont f-closes pour tout préhomomorphisme Si $)\alpha($ est un élément de $)\mathfrak{F}($ sa classe d'analogie, élément de $\{\mathfrak{F}\}$, sera notée $\{\alpha\}$, ou si l'on désire expliciter l'écriture de $)\alpha($ ou de $\langle\alpha\rangle$:

$$\{\alpha\} = \left\{ \begin{matrix} x_1 \cdots x_n & \cdots & z_1 \cdots z_p \\ x'_1 \ldots x'_{n'} & & z'_1 \cdots z'_{p'} \end{matrix} \right\}$$

3°/ L'application canonique de $)\mathfrak{F}($ dans $\{\mathfrak{F}\}$ sera notée ϕ.

4°/ L'application identique de $\langle\mathfrak{F}\rangle$ dans $)\mathfrak{F}($ sera notée i.

5°/ L'application canonique de $\ddot{\mathfrak{F}}$ dans $\langle\mathfrak{F}\rangle$ sera notée ψ.

Opérations de réduction dans $\{\mathfrak{F}\}$

Nous allons indiquer 10 types de transformations qui font passer d'un élément de $)\mathfrak{F}($ à un élément analogue, c'est à dire qui laissent invariants les éléments de $\{\mathfrak{F}\}$.

Si l'on s'intéresse uniquement à une certaine occurence d'une certaine formule P dans un élément de $\{\mathfrak{F}\}$, ce dernier sera écrit en abrégé :

$$\left\{ \left| \begin{array}{c} ?P? \\ ? \end{array} \right| \right\} \text{ ou } \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ?P? \end{array} \right| \right\} \quad \text{(on isole la colonne intéressée).}$$

Réduction $(-Inf)$ $$\left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ?-P? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ?P \\ ?? \end{array} \right| \right\}$$

Réduction $(-Sup)$ $$\left\{ \left| \begin{array}{c} ?-P? \\ ? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ?? \\ ?P \end{array} \right| \right\}$$

Réduction $(\wedge Inf)$ $$\left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ?P\wedge Q? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c|c} ? & ? \\ ?P? & ?Q? \end{array} \right| \right\}$$

Réduction $(\wedge Sup)$ $$\left\{ \left| \begin{array}{c} ?P\wedge Q? \\ ? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ?PQ? \\ ? \end{array} \right| \right\}$$

Réduction $(\vee Inf)$ $$\left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ?P\vee Q? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ?PQ? \end{array} \right| \right\}$$

Réduction $(\vee Sup)$ $$\left\{ \left| \begin{array}{c} ?P\vee Q? \\ ? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c|c} ?P? & ?Q? \\ ? & ? \end{array} \right| \right\}$$

Réduction $(\rightarrow Inf)$ $$\left\{ \left| \begin{array}{c} ? \\ ?P\rightarrow Q? \end{array} \right| \right\} = \left\{ \left| \begin{array}{c} ?P \\ ?Q? \end{array} \right| \right\}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

Réduction $(\to Sup)$ $\quad \left\{\left|\begin{array}{c} ?P\to Q? \\ ? \end{array}\right|\right\} = \left\{\left|\begin{array}{c} ?Q? \\ ? \end{array}\right|\begin{array}{c} ?? \\ ?P \end{array}\right|\right\}$

Réduction $(\leftrightarrow Inf)$ $\quad \left\{\left|\begin{array}{c} ? \\ ?P\leftrightarrow Q? \end{array}\right|\right\} = \left\{\left|\begin{array}{c} ?P \\ ?Q? \end{array}\right|\begin{array}{c} ?Q \\ ?P? \end{array}\right|\right\}$

Réduction $(\leftrightarrow Sup)$ $\quad \left\{\left|\begin{array}{c} ?P\leftrightarrow Q? \\ ? \end{array}\right|\right\} = \left\{\left|\begin{array}{c} ?PQ? \\ ? \end{array}\right|\begin{array}{c} ?? \\ ?PQ \end{array}\right|\right\}$

N. B. Dans les réductions $(\wedge \mathrm{Inf})$, $(\vee \mathrm{Sup})$, $(\to \mathrm{Sup})$, $(\leftrightarrow \mathrm{Inf})$ et $(\leftrightarrow \mathrm{Sup})$ il se produit un dédoublement de la colonne considérée.

La justification de ces réductions n'offre aucune difficulté, nous traiterons seulement 2 de ces cas à titre d'exemple:

Soit f un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans U

a) Réduction $(-\mathrm{Inf})$:

$$= \left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ? \\ ?-f(P)? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ? \\ ?? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle \text{ si } f(P)=1$$

$$= \left\langle\!\left\langle\left|\quad\right|\right\rangle\!\right\rangle \text{ si } f(P)=0 \text{ (suppression de la colonne qui devient close).}$$

$$\hat{f}\left(\left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ?P \\ ?? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle\right) = \left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ?f(P) \\ ?? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ? \\ ?? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle \text{ si } f(P)=1$$

$$= \left\langle\!\left\langle\left|\quad\right|\right\rangle\!\right\rangle \text{ si } f(P)=0$$

Ainsi: $\left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ? \\ ?-P? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle$ et $\left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ?P \\ ?? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle$ ont la même f-valeur pour tout préhomomorphisme, donc $\rangle\!\rangle\left|\begin{array}{c} ? \\ ?-P? \end{array}\right|\langle\!\langle$et$\rangle\!\rangle\left|\begin{array}{c} ?P \\ ?? \end{array}\right|\langle\!\langle$ sont analogues dans $)\mathfrak{F}($.

b) Réduction $(\to \mathrm{Sup})$:

$$\hat{f}\left(\left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ?P\to Q? \\ ? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle\right) = \left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ?f(P)\to f(Q)? \\ ? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle\left|\quad\right|\right\rangle\!\right\rangle \text{ si } f(P)=1 \text{ et } f(Q)=0$$

$$= \left\langle\!\left\langle\left|\begin{array}{c} ?? \\ ? \end{array}\right|\right\rangle\!\right\rangle \text{ dans les autres cas.}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

$$\hat{f}\left(\langle\!\langle \left| \begin{array}{c} ?Q? \\ ? \end{array} \right| \begin{array}{c} ?\,? \\ ?P \end{array} \left| \rangle\!\rangle \right.\right) = \langle\!\langle \left| \begin{array}{c} ?f(Q)? \\ ? \end{array} \right| \begin{array}{c} ?\,? \\ ?f(P) \end{array} \left| \rangle\!\rangle \right. = \langle\!\langle \left| \quad \right| \quad \left| \rangle\!\rangle \right. \begin{array}{l} \text{si } f(P)=1 \\ \text{et } f(Q)=0 \end{array}$$

$$= \langle\!\langle \left| \begin{array}{c} ?\,? \\ ? \end{array} \right| \rangle\!\rangle \begin{array}{l} \text{dans les} \\ \text{autres cas.} \end{array}$$

etc ···

Il suffit dans chaque cas d'utiliser l'une des 5 propriétés des préhomomorphismes (parag. 1, chap. II, lemmes 1 et 2), ainsi que la liste des cas usuels d'égalités dans $\langle\mathfrak{F}\rangle$ (parag. 3, chap. I).

Theoreme 1. *Les trois anneaux booléiens $\mathfrak{F}/R$, $\langle\mathscr{A}\rangle$ et $\{\mathfrak{F}\}$ sont isomorphes.*

On pourrait pour cela montrer que $\{\mathfrak{F}\}$ et l'application : $p \to \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 0p \end{array}\right\}$ de $\mathscr{A}$ dans $\{\mathfrak{F}\}$, associés à $\mathscr{A}$, sont universels pour le problème d'universalité envisagé au parag. 3, chap. I ; mais il est aussi simple de construire directement un isomorphisme de $\langle\mathscr{A}\rangle$ sur $\{\mathfrak{F}\}$:

Soit $\langle\alpha\rangle$ une grille de $\langle\mathscr{A}\rangle$, c'est la classe d'analogie d'un tableau α de $\ddot{\mathscr{A}}$, or $\ddot{\mathscr{A}}$ est un sous-ensemble de, $\ddot{\mathfrak{F}}$, donc α est également un tableau de $\ddot{\mathfrak{F}}$ et par suite il lui correspond une grille, sa classe d'analogie dans $\langle\mathfrak{F}\rangle$, que nous noterons ici $\langle\alpha\rangle'$, $i(\langle\alpha\rangle')$ élément de $)\mathfrak{F}($ sera noté $)\alpha('$. et $\varphi(\ )\alpha(')$ élément de $\{\mathfrak{F}\}$ sera noté $\{\alpha\}'$. L'application σ définie par : $\sigma(\langle\alpha\rangle) = \{\alpha\}'$ est alors l'isomorphisme cherché, en effet :

1°/ On définit bien ainsi une fonction : soit β un autre tableau analogue à α dans $\ddot{\mathscr{A}}$: β et α ont la même f-valeur pour toute application f de $\mathscr{A}$ dans U, et donc aussi (puisqu'ils ne s'écrivent qu'à l'aide d'atomes) pour toute application de $\mathfrak{F}$ dans U, donc $\langle\alpha\rangle' = \langle\beta\rangle'$, et par site : $\{\alpha\}' = \{\beta\}'$.

2°/ σ est un homomorphisme : en effet, remarquons que :

$$\sigma(\langle\alpha\rangle) = \phi(i(\psi(\alpha)))$$

où α est un représentant de $\langle\alpha\rangle$.

a) un représentant de $-\langle\alpha\rangle$ est $-\alpha$, donc $\sigma(-\langle\alpha\rangle) = \phi(i(\psi(-\alpha)))$, or $-\alpha$ considéré comme négation de α dans $\ddot{\mathscr{A}}$ est aussi négation de α dans $\ddot{\mathfrak{F}}$, donc $\psi(-\alpha) = -\psi(\alpha)$, et par suite : $\sigma(-\langle\alpha\rangle) = -\sigma(\langle\alpha\rangle)$.

b) un représentant de $\langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle$ est $\alpha \cdot \beta$, produit des tableaux α et β dans $\ddot{\mathscr{A}}$, mais c'est aussi le produit des tableaux α et β dans $\ddot{\mathfrak{F}}$, donc : $\psi(\alpha \cdot \beta) = \psi(\alpha) \cdot \psi(\beta)$, d'où $\sigma(\langle\alpha\rangle \cdot \langle\beta\rangle) = \sigma(\langle\alpha\rangle) \cdot \sigma(\langle\beta\rangle)$.

3°/ σ est biunivoque: supposons $\sigma(\langle\alpha\rangle)=\sigma(\langle\beta\rangle)$, soit α (resp. β) un représentant de $\langle\alpha\rangle$ (resp. $\langle\beta\rangle$) : $\phi(i(\psi(\alpha)))=\phi(i(\psi(\beta)))$, donc $i(\psi(\alpha))$ et $i(\psi(\beta)))$ sont analogues dans $)\mathfrak{F}($, c'est à dire que les grilles $\psi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ de $\langle\mathfrak{F}\rangle$ ont la même f-valeur pour tout préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans U, il en est donc de même des tableaux α et β de $\ddot{\mathfrak{F}}$, et par suite α et β considérés comme tableaux de $\ddot{\mathscr{A}}$ ont la même f-valeur pour toute application de $\mathscr{A}$ dans U (car toute application de $\mathscr{A}$ dans U est la restriction d'un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans U) ; α et β sont donc analogues dans $\ddot{\mathscr{A}}$, et par suite: $\langle\alpha\rangle=\langle\beta\rangle$ dans $\langle\mathscr{A}\rangle$.

4°/ σ est surjective: soit $\{\alpha\}'$ un élément de $\{\mathfrak{F}\}$, les opérations de réduction montrent qu'au bout d'un nombre fini de telles opérations, $\{\alpha\}'$ pourra s'écrire uniquement au moyen d'atomes, donc aussi l'un de ses représentants $)\alpha($ dans $)\mathfrak{F}($, donc aussi l'élément correspondant $\langle\alpha\rangle'$ de $\langle\mathfrak{F}\rangle$, donc aussi l'un de ses représentants α dans $\ddot{\mathfrak{F}}$, α sera alors élément de $\ddot{\mathscr{A}}$, on pourra considérer la grille $\langle\alpha\rangle$ de $\langle\mathscr{A}\rangle$, et il est facile de vérifier que: $\sigma(\langle\alpha\rangle)=\{\alpha\}'$.

Donc σ est bien un isomorphisme de $\langle\mathscr{A}\rangle$ sur $\{\mathfrak{F}\}$.

Nous avons le schéma suivant:

$$\mathfrak{F}\left\{\begin{array}{ll}
-\varphi\ \text{(application canonique)} \longrightarrow & \mathfrak{F}/R \\
& \mu^{-1}\uparrow\quad\downarrow\mu\ \text{(isomorph.)} \\
-r=\mu\circ\varphi\ \text{(préhomomorphisme)} \longrightarrow & \langle\mathscr{A}\rangle \\
& \sigma^{-1}\uparrow\quad\downarrow\sigma\ \text{(isomorph.)} \\
-\rho\ \text{(préhomomorphisme)} \longrightarrow & \{\mathfrak{F}\}
\end{array}\right.$$

en posant $\rho=\sigma\circ r$: préhomomorphisme (strict) de $\mathfrak{F}$ dans $\{\mathfrak{F}\}$.

Pour toute formule P, l'élément $\rho(P)$ sera dit le "*tableau de réduction inachevé*" (en abrégé t.r.i.) de P.

Proposition 2: *Pour toute formule P:*

$$\rho(P)=\left\{\begin{matrix}1\\0P\end{matrix}\right\}$$

Démonstration: par récurrence sur le nombre total n de symboles logiques de P.

—si $n=0$: P est un atome p:

$$r(p)=\left\langle\!\!\left\langle\begin{matrix}1\\0p\end{matrix}\right\rangle\!\!\right\rangle \qquad \rho(p)=\left\{\begin{matrix}1\\0p\end{matrix}\right\}$$

—soit n un entier fixé, supposons le résultat vrai pour tout entier $m \leq n$; soit P une formule ayant $n+1$ symboles logiques, elle aura l'une des 5 formes suivantes: $-Q$, $Q \wedge R$, $Q \vee R$, $Q \rightarrow R$, $Q \leftrightarrow R$.

a) si $P = -Q$:

$$\rho(P) = \rho(-Q) = -\rho(Q) = -\left\{\begin{matrix} 1 \\ 0Q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1Q \\ 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0-Q \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0P \end{matrix}\right\}$$

b) si $P = Q \wedge R$:

$$\rho(P) = \rho(Q) \cdot \rho(R) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0Q \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0R \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0Q & 0R \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0Q \wedge R \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0P \end{matrix}\right\}$$

etc $\cdots$

Il suffit dans chaque cas d'utiliser une opération de réduction Inf.

Application au calcul des t.r.a.

Etant donnée une formule P, nous formons le t.r.i. de P sous sa forme "première":

$$\rho(P) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0P \end{matrix}\right\}$$

et en appliquant les opérations de réduction nous faisons ensuite disparaitre tous les symboles logiques.

Exemple:

$$\rho(-(p \leftrightarrow q)) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0-(p \leftrightarrow q) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1p \leftrightarrow q \\ 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1pq & 1 \\ 0 & 0pq \end{matrix}\right\}$$

Remarque

Les 10 opérations de réduction que nous venons de définir, traduisent exactement les règles de constitution des tableaux sémantiques du Calcul Propositionnel (E. W. Beth).

4. Application: calcul des formes normales

Rappelons qu'une formule P est dite normale conjonctive (resp. normale disjonctive) si:

1) Les seuls symboles logiques apparaissant dans P sont: $\wedge$ $\vee$ et $-$
2) Le symbole $-$ ne porte que sur des atomes
3) $\vee$ (resp. $\wedge$) ne relie que des atomes précédés ou non de $-$

4) Aucun atome ne figure plus d'une fois dans une disjonction (resp. conjonction).

Exemples : $(p \vee q) \wedge (-p \vee r)$ est normale conjonctive

$(p \wedge q) \vee (-p \wedge r)$ est normale disjonctive

P étant une formule quelconque, toute formule normale conjonctive (resp. disjonctive) analogue à P, est dite une forme normale conjonctive (resp. disjonctive) de P.

THEOREME 1 : *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

a) *P n'est pas une formule démontrable*

b) *P admet une forme normale conjonctive.*

Démonstration :

1°/ Si P admet une forme normale conjonctive : $Q = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$ avec $Q_1 = g_1 \vee g_2 \vee \cdots \vee g_p$, de même Q_2, etc ..., chaque g_i étant un atome éventuellement précédé de $-$,

Soit f l'ensemble de valeurs de vérité ainsi défini :

$f(p) = 0$ si p est l'un des g_i

$= 1$ si $-p$ est l'un des g_i

$= 0$ dans tous les autres cas.

$$\text{—si } g_i = p : \ r(g_i) = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0p \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \qquad \hat{f}\,(r(g_i)) = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 00 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \langle 0 \rangle$$

$$\text{—si } g_i = -p : \ r(g_i) = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 1p \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle \qquad \hat{f}\,(r(g_i)) = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} 11 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \langle 0 \rangle$$

Donc tous les $r(g_i)$ sont f-ouverts, donc $r(Q_1)$ est f-ouvert, donc $r(Q)$ est f-ouvert, et P étant analogue à $Q : r(P)$ est f-ouvert, P est donc f-inexacte et par suite n'est pas démontrable.

2°/ Si P n'est pas une formule démontrable, posons :

$$r(P) = \left\langle\!\left\langle \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ x'_1 \cdots x'_{n'} \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} z_1 \cdots z_p \\ z'_1 \cdots z'_{p'} \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle$$

$r(P)$ n'est pas close, donc possède au moins une colonne ouverte ; d'après la liste des cas usuels d'analogie (parag. 3, chap. I) on peut faire les hypothèses suivantes :

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

—il n'y a aucune colonne closes dans $r(P)$

—il y a un seul 1 (et aucun 0) dans chaque bloc supérieur

—il y a un seul 0 (et aucun 1) dans chaque bloc inférieur

—tous les éléments d'un bloc quelconque sont distincts

—toutes les colonnes sont distinctes.

Ceci permet d'écrire :

$$r(P) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p_1 \cdots p_n \\ 0p'_1 \cdots p'_{n'} \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} 1q_1 \cdots q_p \\ 0q'_1 \cdots q'_{p'} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \text{ où les } p_i, p'_i, q_i, q'_i \text{ sont des atomes.}$$

$$r(P) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p_1 \cdots p_n \\ 0p'_1 \cdots p'_{n'} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \cdot \ \cdots \ \cdot \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1q_1 \cdots q_p \\ 0q'_1 \cdots q'_{p'} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p_1 \cdots p_n \\ 0p'_1 \cdots p'_{n'} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0p'_1 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \cdots \vee \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0p'_{n'} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \cdots \vee \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p_n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0p'_1 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = r(p'_1) \qquad \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p_1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = -r(p_1) = r(-p_1)$$

$$\text{d'où } \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p_1 \cdots p_n \\ 0p'_1 \cdots p'_{n'} \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle = r(p'_1 \vee \cdots \vee p'_{n'} \vee -p_1 \vee \cdots \vee -p_n) = r(Q_1)$$

les $n+n'$ atomes p'_i et p_i étant distincts.

D'une façon générale on pourra écrire :

$$r(P) = r(Q_1) \cdot r(Q_2) \cdot \ \cdots \ \cdot r(Q_s) = r(Q)$$

$Q = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_s$ étant une formule normale conjonctive, et P est analogue à Q.

Notons que dans le cas où P est incompatible, $r(P) = \langle 0 \rangle$ se réduit à une seule colonne infermable et ne contenant aucun atome, mais dans ce cas on peut prendre comme forme normale conjonctive : $p \wedge -p$ où p est un atome quelconque.

Exemple : $P = -(p \leftrightarrow q)$ $r(P) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 & 1pq \\ 0pq & 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$ (calculé bien entendu au moyen des opérations de réduction).

$$r(P) = \left[\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0p \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 0q \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \right] \cdot \left[\left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1p \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \vee \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1q \\ 0 \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle \right]$$

donc $(p \vee q) \wedge (-p \vee -q)$ en est une forme normale conjonctive.

THEOREME 2 : *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

a) *P est une formule compatible*

b) *P admet une forme normale disjonctive.*

Démonstration: les propositions suivantes sont équivalentes:

P est compatible

P est f-exacte pour au moins un ensemble de valeurs de vérité f

$\hat{f}(r(P)) = \langle 1 \rangle$

$\hat{f}(r(-P)) = \langle 0 \rangle$

$-P$ est f-inexacte

$-P$ n'est pas une formule démontrable

$-P$ admet une forme normale conjonctive Q'

$r(-P) = r(Q')$

$r(P) = r(-Q')$

Par ailleurs si Q' est une formule normale conjonctive $Q' = Q'_1 \wedge \cdots \wedge Q'_n$ avec $Q'_1 = g'_1 \vee \cdots \vee g'_p$ etc $\cdots$

$$r(-Q') = -r(Q') = -(r(Q'_1) \cdot \cdots \cdot r(Q'_n)) = -r(Q'_1) \vee \cdots \vee -r(Q'_n)$$

et $-r(Q'_1) = -(r(g'_1) \vee \cdots \vee r(g'_p)) = -r(g'_1) \cdot \cdots \cdot -r(g'_p)$

si g'_i est un atome p_i: $-r(g'_i) = r(-p_i)$

si $g'_i = -p_i$ où p_i est un atome: $-r(g'_i) = -r(-p_i) = r(p_i)$

donc: $-r(Q'_1) = r(g_1 \wedge \cdots \wedge g_p) = r(Q_1)$ où les g_i sont des atomes précédés ou non de $-$, tous distincts.

etc $\cdots$

$r(-Q') = r(Q)$ où Q est une formule normale disjonctive; et réciproquement si Q est une formule normale disjonctive il existe une formule normale conjonctive Q' telle que $r(Q) = -r(Q')$.

Ceci nous fournit un premier procédé de calcul des formes normales disjonctives, consistant à chercher une forme normale conjonctive de $-P$.

Exemple: $P = -(p \leftrightarrow q)$ $\quad \rho(--(p \leftrightarrow q)) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0p \leftrightarrow q \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1p & 1q \\ 0q & 0p \end{matrix} \right\}$

$-P$ admet comme forme normale conjonctive: $(-p \vee q) \wedge (-q \vee p)$

P admet comme forme normale disjonctive: $(p \wedge -q) \vee (q \wedge -p)$

Un second procédé plus simple de calcul des formes normales disjonctives est basé sur l'analyse des valeurs de vérité:

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

Exemple: Considérons la grille suivante (qui est le t.r.a. d'une certaine formule):

$$\langle\alpha\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1rp & 1rp & 1rp & 1rps & 1ps & 1ps \\ 0 & 0s & 0q & 0 & 0 & 0q \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

Soit f un ensemble de valeurs vérité

—si $f(p)=0$: $\hat{f}(\langle\alpha\rangle)=\langle 1\rangle$

—si $f(p)=1$:

$$\hat{f}(\langle\alpha\rangle) = \left\langle\!\!\left\langle \begin{matrix} 1f(r) & 1f(r) & 1f(r) & 1f(r)f(s) & 1f(s) & 1f(s) \\ 0 & 0f(s) & 0f(q) & 0 & 0 & 0f(q) \end{matrix} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

cette grille est close si et seulement si: $f(r)=f(s)=0$. Ainsi $\hat{f}(\langle\alpha\rangle)=\langle 1\rangle$ si et seulement si: p est f-inexacte, ou p est f-exacte et r et s sont f-inexactes. Par suite: $\langle\alpha\rangle = r(-p\vee(p\wedge -r\wedge -s))$.

5. Application: calcul des conséquences

Rappelons les définitions suivantes, concernant le Calcul Propositionnel:

—*conséquence*: couple, noté $J\vdash K$, de parties J et K de $\mathfrak{F}$

—*conséquence exacte*: si pour tout s.d.c. V: $J\subset V$ implique $K\cap V\neq\emptyset$

—une conséquence $M\vdash N$ est dite une *sous-conséquence* de $J\vdash K$ si: $M\subset J$ et $N\subset K$.

—une conséquence $J\vdash K$ est dite une *conséquence finie* si $J\cup K$ est une partie finie de $\mathfrak{F}$.

Remarques: 1) La conséquence $\emptyset\vdash\emptyset$ est inexacte, aussi dans tout ce paragraphe nous pourrons supposer que J et K ne sont pas simultanément vides.

2) "P est une formule démontrable" équivaut à: "la conséquence $\emptyset\vdash P$ est exacte"

Dans le but d'appliquer les méthodes précédentes à la recherche de l'exactitude ou de l'inexactitude des conséquences, nous allons établir auparavant deux lemmes:

Etant donnée $f\in\vec{\mathscr{A}}$, nous noterons E_f l'ensemble des formules qui sont f-exactes, c'est à dire les formules P telles que $r(P)$ soit f-close dans $\langle\mathscr{A}\rangle$; de même, étant donné $F\in\vec{\Pi}$ (c'est à dire un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans U), nous noterons $\mathscr{E}_F$ l'ensemble des formules P telles que $\rho(P)$ soit F-close dans $\{\mathfrak{F}\}$.

LEMME 1: *Pour qu'une partie V de $\mathfrak{F}$ soit un s.d.c. il faut et il suffit que sa fonction caractéristique g soit un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans U (identifié à $Z/(2)$).*

Démonstration: —Si V est un s.d.c.: $\varphi(V)$ est un ultrafiltre de $\mathfrak{F}/R$, donc la fonction caractéristique γ de $\varphi(V)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{F}/R$ dans U, donc $\gamma\circ\varphi$ est un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans U, or $g=\gamma\circ\varphi$ car: si $\gamma(\varphi(P))=1$: $\varphi(P)\in\varphi(V)$, nous savons que cela équivaut à $P\in V$, soit à $g(P)=1$.

—Si g est un préhomomorphisme de $\mathfrak{F}$ dans U: l'application γ définie par $\gamma(\varphi(P))=g(P)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{F}/R$ dans U, donc $\gamma^{-1}(1)$ est un ultrafiltre de $\mathfrak{F}/R$, donc $\varphi^{-1}(\gamma^{-1}(1))$ est un s.d.c., qui n'est autre que V:

si $P\in V$: $g(P)=\gamma(\varphi(P))=1$, $P\in\varphi^{-1}(\gamma^{-1}(1))$
si $P\in\varphi^{-1}(\gamma^{-1}(1))$: $\gamma(\varphi(P))=1=g(P)$, $P\in V$

LEMME 2: *Il y a identité entre les trois familles suivantes de parties de $\mathfrak{F}$*

1) $(E_f)_{f\in\vec{\mathscr{A}}}$ 2) $(\mathscr{E}_F)_{F\in\vec{\Pi}}$ 3) *tous les s.d.c.*

L'identité entre 1) et 2) est immédiate: si $f\in\vec{\mathscr{A}}$, $E_f=\mathscr{E}_F$ où F est le préhomomorphisme (unique) prolongeant f.

L'identité entre 2) et 3) résulte du lemme 1: la fonction caractéristique de chaque $\mathscr{E}_F$ est F.

Ceci va nous permettre d'étendre aux conséquences la notion de f-exactitude: étant donné un ensemble de valeurs de vérité f, nous dirons que la conséquence $J\vdash K$ est une *conséquence f-exacte* si: $J\cap\complement E_f\neq\emptyset$ ou $K\cap E_f\neq\emptyset$.

et sinon une *conséquence f-inexacte*, c'est à dire si: $J\subset E_f$ et $K\cap E_f=\emptyset$

Il est assez pratique d'introduire la notation $-J$ pour désigner l'ensemble des formules $-P$ où $P\in J$, on a alors la traduction suivante: $J\vdash K$ est f-exacte si: $(-J\cup K)\cap E_f\neq\emptyset$.

PROPOSITION 1: *Pour que $J\vdash K$ soit exacte, il faut et il suffit qu'elle soit f-exacte pour tout $f\in\vec{\mathscr{A}}$.*

Ceci résulte immédiatement des définitions et du lemme 2.

Remarque: "$\emptyset\vdash P$ est f-exacte" équivaut à "P est f-exacte".

Rappelons la définition de l'application Θ de $\langle\mathscr{A}\rangle$ dans $\mathfrak{P}(\vec{\mathscr{A}})$ (qui pourra être identifié à $\mathfrak{P}(U^{\mathscr{A}})$ ou à $U^{\vec{\mathscr{A}}}$, suivant les interprétations topologiques):

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

$\Theta(\langle\alpha\rangle)$ = ensemble des $f \in \overrightarrow{\mathscr{A}}$ tels que $\langle\alpha\rangle$ soit f-close.

Nous en déduisons l'application $\Theta \circ r$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{P}(\overrightarrow{\mathscr{A}})$: $\Theta(r(P))$ = ensemble des $f \in \overrightarrow{\mathscr{A}}$ tels que P soit f-exacte.

D'une façon plus générale : soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des conséquences du calcul propositionnel, et soit Λ l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathfrak{P}(\overrightarrow{\mathscr{A}})$: $\Lambda(J \vdash K)$ = ensemble des $f \in \overrightarrow{\mathscr{A}}$ tels que $J \vdash K$ soit f-exacte.

Nous pouvons identifier $\mathfrak{F}$ à la partie de $\mathscr{C}$ constituée par toutes les conséquences du type $\emptyset \vdash P$, où P est une formule ; nous aurons alors les résultats suivants :

Proposition 2 : *Pour toute formule* P : $\Lambda(P) = \Theta(r(P))$.

Proposition 3 : *Pour toute conséquence* $J \vdash K$: $\Lambda(J \vdash K) = \bigcup_{P \in -J \cup K} \Lambda(P)$.

Du point de vue topologique, dans l'espace $U^{\mathscr{A}}$:

Theoreme 1 : a) $\Lambda(\mathfrak{F})$ *est l'ensemble des ofs de* $U^{\mathscr{A}}$
b) $\Lambda(\mathscr{C})$ *est l'ensemble des ouverts de* $U^{\mathscr{A}}$

En effet, d'après le théorème 5, parag. 4, chap. I, $U^{\mathscr{A}}$ est l'espace booléien dual de $\langle\mathscr{A}\rangle = r(\mathfrak{F})$, ce qui démontre a) ; de la proposition 3 ci-dessus il résulte que chaque $\Lambda(J \vdash K)$ est un ouvert ; et enfin, si 0 est un ouvert, il est réunion d'ofs, c'est à dire :

$$0 = \bigcup_{\zeta \in I} \Lambda(P_\zeta)$$

soit, en posant $K = \{P_\zeta\}_{\zeta \in I}$: $0 = \Lambda(J \vdash K)$.

Le théoréme 3, parag. 4, chap. I, nous fournit un autre résultat topologique, mais dans l'espace $U^{\overrightarrow{\mathscr{A}}}$:

Theoreme 2 : $\Lambda(\mathfrak{F}) \subset \Lambda(\mathscr{C}) \subset U^{\overrightarrow{\mathscr{A}}}$
$\Lambda(\mathfrak{F})$ *et* $\Lambda(\mathscr{C})$ *sont partout denses dans* $U^{\overrightarrow{\mathscr{A}}}$

Remarques : Le théorème 1 met en évidence le fait que l'analogie entre formules et conséquences s'arrête à la notion de f-exactitude, et ne pourra pas permettre une extension des opérations booléiennes ; autrement dit, on ne pourra pas définir pour les conséquences des tableaux de réduction (même en introduisant des tableaux infinis) pouvant se combiner algébriquement entre eux

https://doi.org/10.1017/S0027763000023643 Published online by Cambridge University Press

(bien que l'on puisse définir les tableaux sémantiques pour les conséquences comme pour les formules). Notons simplement qu'il est possible de définir la disjonction ou la conjonction de conséquences, mais non leur négation.

Par contre, en ce qui concerne les conséquences finies, la situation est tout à fait analogue à celle des formules :

PROPOSITION 4 : *Soit $J \vdash K$ une conséquence finie, posons $J = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $K = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ la f-exactitude (et par suite l'exactitude) de $J \vdash K$, équivaut à celle de la formule: $R(J \vdash K) = -P_1 \vee \cdots \vee -P_n \vee Q_1 \vee \cdots \vee Q_p$.*

En effet, d'après la proposition 3 : $\Lambda(J \vdash K) = \Lambda(R(J \vdash K))$.

On pourra donc définir le t.r.a. (ou le t.r.i.) d'une conséquence $J \vdash K$, comme étant celui de la formule $R(J \vdash K)$, ce qui permettra de faire l'analyse des valeurs de vérité, ou de rechercher l'exactitude, de $J \vdash K$, en partant de la forme "première" de son t.r.i. :

$$\rho(J \vdash K) = \left\{ \begin{matrix} 1P_1 \cdots P_n \\ 0Q_1 \cdots Q_p \end{matrix} \right\}$$

et en appliquant les opérations de réduction.

Dans le cas général d'une conséquence infinie, les résultats topologiques précédents permettent de retrouver très simplement le théorème fondamental :

THEOREME 3 : *Pour qu'une conséquence $J \vdash K$ soit exacte, il faut et il suffit qu'elle admette une sous-conséquence finie exacte.*

En effet :

—Si $J \vdash K$ est exacte : $\Lambda(J \vdash K) = \bigcup_{P \in -J \cup K} \Lambda(P) = U^{\mathscr{A}}$

la famille des $\Lambda(P)$ où P parcourt $-J \cup K$ forme donc un recouvrement d'ouverts de $U^{\mathscr{A}}$, qui est compact : on peut en extraire un recouvrement fini, composé, par exemple, des $(\Lambda(-P_i))_1^n$ $(P_i \in J)$ et des $(\Lambda(Q_j))_1^m$ $(Q_j \in K)$, alors :

$\{P_1, \ldots, P_n\} \vdash \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ est une sous-conséquence finie exacte de $J \vdash K$.

—La réciproque est triviale.