M. Kishi.
Nagoya Math. J
Vol. 44 (1971), 79–88

PUISSANCE FRACTIONNAIRE D'UN NOYAU POSITIF DONT LE CARRE EST ENCORE UN NOYAU

MASANORI KISHI

§ 1. Introduction

Le noyau de Riesz-Frostman dans l'espace euclidien à $d(\geq 3)$ dimensions est à la puissance fractionnaire du noyau de Newton. On trouve la conformité dans la théorie des espaces de Dirichlet; on construit un noyau à la puissance fractionnaire d'un noyau associé à l'espace de Dirichlet spécial, qui détermine à nouveau un espace de Dirichlet spécial [2]. En notant que le noyau de Dirichlet est positif et symétrique, et satisfait au principe complet du maximum, on s'interroge: est-il possible de construire de bons noyaux à la puissance fractionnaire pour des noyaux de genre plus large?

Dans cette note nous considérerons des noyaux positifs dont les carrés (= les composés avec eux-mêmes) sont encore des noyaux et qui satisfont au principe de domination, et construirons des noyaux à la puissance fractionnaire en utilisant des résolvantes.

§ 2. Noyaux positifs et potentiels

Soient X un espace localement compact et dénombrable à l'infini, et ξ une mesure de Radon positive sur X. Désignons par $\mathscr{E}$ la famille des ensembles ξ-mesurables et par $\mathscr{E}_0$ la sous famille de $\mathscr{E}$ constituée par les ensembles relativement compacts. Nous considérons un noyau positif N relatif à X et à ξ [4]; il est une fonction positive sur $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$, telle que pour tout ensemble fixe $e_1 \in \mathscr{E}$, $N(e_1, e)$ et $N(e, e_1)$ sont dénombrablement additives sur $\mathscr{E}$, et si e_1 est relativement compact, elles sont absolument continues par rapport à ξ et les dérivées sont localement ξ-sommables. Désignons par $\mathscr{M}^+$ la famille des fonctions positives sur X qui sont ξ-mesurables. Deux fonctions de $\mathscr{M}^+$ qui sont égales ξ-p.p. sur un ensemble e de $\mathscr{E}$ sont considérées comme identiques sur e. Toute fonction f de $\mathscr{M}^+$ détermine de manière unique à des ensembles de ξ-mesure nulle près, un ensemble de

Received February 18, 1971

$\mathscr{E}$, où $f(x)>0$, que nous notons Sf. Nous posons $\mathscr{B}^+ = \{f \in \mathscr{M}^+; f$ est bornée ξ-p.p.$\}$ et $\mathscr{B}_0^+ = \{f \in \mathscr{B}^+; Sf \in \mathscr{E}_0\}$.

Nous définissons le potentiel de $f \in \mathscr{M}^+$ par rapport à N par la relation

$$Nf(e) = \int f(y) N(e, dy).$$

Cela est absolument continu d'après la définition du noyau. Nous notons $Nf(x)$ la dérivée de $Nf(e)$ par rapport à ξ. La famille des fonctions de $\mathscr{M}^+$ dont les potentiels sont localement ξ-sommables est désignée par $\mathscr{L}^+(N)$ ou simplement par $\mathscr{L}^+$. Evidemment nous avons $\mathscr{B}_0^+ \subset \mathscr{L}^+$. De la même manière nous définissons le potentiel adjoint $\check{N}f(x)$ de f par rapport au noyau adjoint $\check{N}: \check{N}(e_1, e_2) = N(e_2, e_1)$.

Etant donnés deux noyaux positifs N_1 et N_2, nous posons

$$N_1 N_2(e_1, e_2) = \int \check{N}_1 \chi_{e_1}(x) N_2 \chi_{e_2}(x) d\xi(x), \tag{1}$$

où χ_e désigne la fonction caractéristique. Si cette relation définit un noyau positif, $N_1 N_2$ est appelé le noyau composé de N_1 et N_2. Une condition nécessaire et suffisante pour que $N_1 N_2$ soit un noyau est la convergence de l'intégrale (1) pour tous les ensembles e_1 et e_2 de la famille $\mathscr{E}_0$. Nous notons le noyau unité $U: U(e_1, e_2) = \xi(e_1 \cap e_2)$.

Nous dirons que N satisfait au principe de domination si le fait que $Nf(x) \leqq Ng(x)$ sur Sf $(f, g \in \mathscr{B}_0^+)$ implique la même inégalité dans X. En remplaçant Ng par $Ng+1$, nous obtenons le principe complet du maximum. Notons que si N satisfait au principe de domination (principe complet du maximun, resp.) et si $Nf(x) \leq Ng(x)$ $(Nf(x) \leq Ng(x)+1$, resp.) sur Sf pour f et g de $\mathscr{L}^+$, alors la même inégalité est vraie dans X.

§ 3. Résolvantes

Une résolvante associée à un noyau positif N relatif à X et à ξ est, par définition, une famille $\{N_p\}$ $(p>0)$ de noyaux positifs relatifs à X et à ξ, telle qu'on ait, quel que soit $p>0$,

$$N - N_p = pNN_p = pN_pN. \tag{2}$$

On connaît les propositions suivantes (voir [4], [6], [8]).

PROPOSITION 1. *Si N satisfait au principe de domination, il existe au plus une résolvante associée à N.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000014562 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2. *Soient* $f \in \mathscr{B}_0^+$ *et* $e \in \mathscr{E}_0$. *La fonction* $(0, \infty) \ni p \to N_p f(e)$ *est décroissante et analytique.*

Nous posons $N_0 f(e) = \lim_{p \downarrow 0} N_p f(e)$. Alors N_0 est un noyau positif majoré par N.

PROPOSITION 3. *Supposons que* $N = N_0$. *Alors, quel que soit* $p > 0$, $N + p^{-1}U = p^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (pN_p)^n$.

D'après cette proposition, $N + p^{-1}U$ satisfait au principe de domination. Cela n'est pas loin de dire que N lui-même satisfait au principe de domination.

DEFINTION. Nous dirons que N est *positif en moyenne*, si $N(e, X) > 0$ pour tout ensemble $e \in \mathscr{E}_0$ avec $\xi(e) > 0$.

PROPOSITION 4. *Si N est positif en moyenne et si $N + p^{-1}U$ satisfait au principe de domination pour tout $p > 0$, alors N satisfait au principe de domination.*

COROLLAIRE. *Supposons qu'il existe une résolvante associée à N telle que $N = N_0$. Si N est positif en moyenne, N satisfait au principe de domination.*

PROPOSITION 5. *Supposons qu'il existe une résolvante associée à N telle que $N = N_0$. Alors N satisfait au principe complet du maximum si et seulement si $pN_p 1(x) \leq 1$ dans X.*

Notons que $N = N_0$ si N^2 est un noyau.

§ 4. Construction de résolvantes

On sait bien que si N est borné (c-à-d, il existe une constante M telle que $N1(x) \leq M$ sur X) et satisfait au principe de domination, alors il existe une seule résolvante associée à N. Nous allons construire une résolvante dans le cas où N n'est pas borné.

LEMME 1. *Soient a_1 et a_2 deux ensembles de $\mathscr{E}$ avec $a_1 \subset a_2$. Posons $N^{(i)}(e_1, e_2) = N(e_1 \cap a_i, e_2 \cap a_i)$ $(i = 1, 2)$, en supposant que N satisfait au principe de domination. Si $\{N_p^{(i)}\}$ $(p > 0)$ est une résolvante associée à $N^{(i)}$, on a, quelle que soit $f \in \mathscr{B}_0^+$ avec $Sf \subset a_1$, $N_p^{(1)} f(x) \geq N_p^{(2)} f(x)$ sur a_1.*

Démonstration. La fonction $g_i = N_p^{(i)} f$ est dans la famille $\mathscr{L}^+(N)$. En notant que $N^{(i)} f = \chi_{a_i} N(\chi_{a_i} f)$, nous obtenons sur a_i

$$Nf = N^{(i)} f = N_p^{(i)} f + pN^{(i)} N_p^{(i)} f = g_i + pN^{(i)} g_i,$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000014562 Published online by Cambridge University Press

d'où nous déduisons, en écrivant $g_1 - g_2 = h = h^+ - h^-$,

$$h^+ + pN(\chi_{a_1}h^+) = h^- + pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-).$$

Donc nous avons sur $S(\chi_{a_1}h^+)$

$$pN(\chi_{a_1}h^+) \leq pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-).$$

Cette inégalité est vraie sur X par le principe de domination, et donc

$$\begin{aligned} &h^- + pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-) \\ &= h^+ + pN(\chi_{a_1}h^+) \leq h^+ + pN(\chi_{a_2} - \chi_{a_1})g_2 + pN(\chi_{a_1}h^-) \end{aligned}$$

sur a_1. Cela nous donne $h^- \leq h^+$ et $g_1 \geq g_2$ sur a_1.

THEOREME 1. *Soit N un noyau positif tel qu'il satisfasse au principe de domination et N^2 soit encore un noyau. Alors une seule résolvante est associée à N.*

Démonstration. Prenons une suite croissante $\{K_n\}$ de compacts telle que $\bigcup_n K_n = X$, et posons $N^{(n)}(e_1, e_2) = N(e_1 \cap K_n,\ e_2 \cap K_n)$. D'après le théorème de Lusin nous pouvons supposer que les noyaux $N^{(n)}$ sont bornés. Donc nous avons les résolvantes $\{N_p^{(n)}\}$ associées aux noyaux $N^{(n)}$, puisque le principe de domination est vérifié. Si e_1 et e_2 sont dans $\mathscr{E}_0$, $\{N_p^{(n)}(e_1, e_2)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ est décroissante d'après le lemme 1, et $N_p(e_1, e_2) = \lim_n N_p^{(n)}(e_1, e_2)$ définit un noyau positif. Il nous faut vérifier l'equation résolvante (2): soient f et g juoctions de $\mathscr{B}_0^+$. Alors

$$N^{(n)}f \cdot \check{N}_p^{(n)}g = N^{(n)}f\{\check{N}^{(n)}g - p\check{N}^{(n)}\check{N}_p^{(n)}g\} \leq Nf \cdot \check{N}g.$$

La dernière fonction est ξ-sommable, puisque N^2 est noyau: $\int \check{N}f \cdot Ngd\xi = \int N^2 f \cdot gd\xi < \infty$. Par conséquent, d'après le théorème de convergence de Lebesgue,

$$\begin{aligned} p\int N_pNf \cdot gd\xi &= p\int Nf \cdot \check{N}_pgd\xi = \lim_n p\int N^{(n)}f \cdot \check{N}_p^{(n)}gd\xi \\ &= \lim_n p\int N_p^{(n)}N^{(n)}f \cdot gd\xi = \lim_n \int (N^{(n)}f - N_p^{(n)}f)gd\xi \\ &= \int (Nf - N_pf)gd\xi. \end{aligned}$$

Donc $pN_pN = N - N_p$. De la même manière nous obtenons $pNN_p = N - N_p$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000014562 Published online by Cambridge University Press

Remarques. 1) Il n'existe pas toujours de résolvante bien que N satisfasse au principe de domination. En effet, si $\xi(X)=\infty$ et $N(e_1, e_2) = \xi(e_1)\cdot\xi(e_2)$, N satisfait au principe complet du maximum, mais il n'existe pas de résolvante associée à N.

2) D'après Hunt-Lion ([3], [7]), il existe une résolvante associée à N, si N est un noyau continu tendant vers 0 à l'infini et s'il satisfait au principe complet du maximum. Nous avons des noyaux continus tels qu'ils ne tendent pas vers 0 à l'infini et dont les carrés sont des noyaux. Par exemple, le noyau N d'Heaviside sur l'espace à 1-dimension: le noyau de convolution défini par

$$k(x)=\begin{cases}1 & \text{pour } x>0\\ 0 & \text{pour } x\leq 0.\end{cases}$$

La résolvante $\{N_p\}$ est donnée par

$$k_p(x)=\begin{cases}e^{-px} & \text{pour } x>0\\ 0 & \text{pour } x\leq 0.\end{cases}$$

§ 5. Puissance fractionaire

Modifiant la définition de la puissance fractionnaire d'un opérateur fermé [9], nous définissons celle d'un noyau positif comme suit.

DEFINITION. Soit $\{N_p\}$ une résolvante associée à N. Pour une constante α telle que $0<\alpha<1$, nous posons

$$N^\alpha(e_1, e_2)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty p^{-\alpha}N_p\chi_{e_2}(e_1)dp. \tag{3}$$

Quand N^α définit un noyau, nous l'appelons *la puissance fractionnaire d'ordre α du noyau N.*

DEFINITION. Nous dirons que N est *spécifiquement borné*, si, quels que soient e_1, $e_2\in\mathscr{E}_0$, $\sup_p pN_p(e_1, e_2)<\infty$.

Si N est spécifiquement borné, l'intégrale (3) converge pour tous les ensembles e_1, $e_2\in\mathscr{E}_0$, et elle définit un noyau. On sait que si N satisfait au principe complet du maximum, il est spécifiquement borné.

DEFINITION. Nous dirons que N est *fortement positif*, si, pour tout $e\in\mathscr{E}_0$ avec $\xi(e)>0$, il existe une fonction $f\in\mathscr{B}_0^+$ telle que $Nf\geq\chi_e$ sur X.

On voit facilement que N est positif en moyenne et spécifiquement borné, s'il est fortement positif. Notons qu'un noyau de convolution défini par une mesure de Radon positive κ est fortement positif si $\kappa \neq 0$, et donc l'intégrale (3) converge toujours et la puissance fractionnaire est bien définie.

Nous considérons des noyaux spécifiquement bornés sans le mentionner.

DEFINITION. Une suite $\{N_n\}$ de noyaux est dite *converger faiblement vers* N, si $Nf(e) = \lim\limits_{n} N_n f(e)$ pour toute $f \in \mathscr{B}_0^+$ et pour tout $e \in \mathscr{E}_0$.

D'après (3), $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} N^\alpha = N^{\alpha_0}$ faiblement si $0 < \alpha_0 < 1$.

THEOREME 2. *Si N^2 est un noyau, $\lim\limits_{\alpha \uparrow 1} N^\alpha = N$ faiblement.*

Démonstration. Soient $f \in \mathscr{B}_0^+$, $e \in \mathscr{E}_0$ et $\varepsilon > 0$. Nous prenons une constante $M > 1$ telle que

$$\operatorname{Max}\{Nf(e),\ \sup_p pN_p f(e)\} \cdot \int_M^\infty p^{-\frac{3}{2}} dp < \varepsilon.$$

Alors nous avons pour α tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$$\frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left| \int_M^\infty \frac{p^{-\alpha}}{1+p} Nf(e)\,dp - \int_M^\infty p^{-\alpha} N_p f(e)\,dp \right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \left\{ \int_M^\infty p^{-\frac{3}{2}} Nf(e)\,dp + \int_M^\infty p^{-\frac{3}{2}} (\sup pN_p f(e))\,dp \right\} < \varepsilon.$$

D'autre part,

$$\left| \int_0^M \frac{p^{-\alpha}}{1+p} Nf(e)\,dp - \int_0^M p^{-\alpha} N_p f(e)\,dp \right|$$

$$\leq \int_0^M p^{-\alpha} (Nf(e) - N_p f(e))\,dp + \int_0^M \frac{p^{1-\alpha}}{1+p} Nf(e)\,dp$$

$$\leq \int_0^M p^{1-\alpha} N_p N f(e)\,dp + M \int_0^M Nf(e)\,dp$$

$$\leq M^2 \{N^2 f(e) + Nf(e)\}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$|Nf(e) - N^\alpha f(e)| = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \left| \int_0^\infty \frac{p^{-\alpha}}{1+p} Nf(e)\,dp - \int_0^\infty p^{-\alpha} N_p f(e)\,dp \right|$$

$$\leq \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} M^2 \{N^2 f(e) + Nf(e)\} + \varepsilon.$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000014562 Published online by Cambridge University Press

Donc $\lim_{\alpha \uparrow 1} |Nf(e) - N^{\alpha} f(e)| \leq \varepsilon$ et $\lim_{\alpha \uparrow 1} N^{\alpha} = N$ faiblement.

Remarques. Même si N^2 est un noyau, N^{α} ne tend pas vers U faiblement quand $\alpha \downarrow 0$.

LEMME 2. *Si $p > 0$, $0 < \alpha < 1$ et si e_1 et e_2 sont dans $\mathscr{E}_0$,*

$$N_p N^{\alpha}(e_1, e_2) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} q^{-\alpha} N_p N_q(e_1, e_2) dq.$$

En effet, on peut approcher l'intégrale par des sommes riemanniennes.

THEOREME 3. *Si α et β sont positifs tels que $0 < \alpha + \beta < 1$, on a $N^{\alpha} N^{\beta} = N^{\alpha+\beta}$.*

Démonstration. Cela est vérifié par un calcul élémentaire en utilisant le lemme précédent, l'équation résolvante et

$$(VP)\int_0^{\infty} \frac{t^{-\alpha}}{t-1} dt = \pi \cot \alpha\pi.$$

LEMME 3. *Il existe une résolvante associée à N^{α} $(0 < \alpha < 1)$.*

Démonstration. La résolvante est donnée par la relation

$$N_p^{(\alpha)}(e_1, e_2) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^{\alpha}}{p^2 + 2pq^{\alpha} \cos \alpha\pi + q^{2\alpha}} N_q \chi_{e_2}(e_1) dq. \tag{4}$$

On montre les égalités $N^{\alpha} - N_p^{(\alpha)} = pN^{\alpha} N_p^{(\alpha)} = pN_p^{(\alpha)} N^{\alpha}$, en utilisant

$$(VP)\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{a^2 + 2at^{\alpha} \cos \alpha\pi + t^{2\alpha}} \frac{1}{t-1} dt = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \frac{a + \cos \alpha\pi}{a^2 + 2a \cos \alpha\pi + 1} \quad (a > 0).$$

THEOREME 4. *Pour tout α, β avec $0 < \alpha, \beta < 1$, on a $(N^{\alpha})^{\beta} = N^{\alpha\beta}$.*

Démonstration. En vertu du fait que

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{-\beta}}{t^2 + 2t \cos \alpha\pi + 1} dt = \pi \frac{\sin \alpha\beta\pi}{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi},$$

on a

$$\begin{aligned}
(N^{\alpha})^{\beta} &= \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \int_0^{\infty} p^{-\beta} N_p^{(\alpha)} dp \\
&= \frac{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi}{\pi^2} \int_0^{\infty} p^{-\beta} dp \int_0^{\infty} \frac{q^{\alpha}}{p^2 + 2pq^{\alpha} \cos \alpha\pi + q^{2\alpha}} N_q dq \\
&= \frac{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi}{\pi^2} \int_0^{\infty} q^{\alpha} N_q dq \int_0^{\infty} \frac{p^{-\beta}}{p^2 + 2pq^{\alpha} \cos \alpha\pi + q^{2\alpha}} dp \\
&= \frac{\sin \alpha\beta\pi}{\pi} \int_0^{\infty} q^{-\alpha\beta} N_q dq = N^{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

LEMME 4. *$N_p^{(\alpha)}$ tend vers N^α faiblement quand $p \downarrow 0$.*

C'est immédiate de l'intégrale (4).

THEOREME 5. *Soit N un noyau positif satisfaisant au principe de domination tel que N^2 soit encore un noyau. Si N est spécifiquement borné et positif en moyenne, alors la puissance franctionnaire N^α définie par* (3) *satisfait au principe de domination.*

Démonstration. D'après les lemmes 3 et 4, N^α est un noyau dont la résolvante associée est $N_p^{(\alpha)}$ et $N_0^{(\alpha)} = N^\alpha$. Donc quel que soit $p > 0$, $N + p^{-1}U$ est proportionnel à un noyau élémentaire d'après la proposition 3. Nous montrons par l'absurde que N^α est positif en moyenne. S'il existait un ensemble $e_1 \in \mathscr{E}_0$ avec $\xi(e_1) > 0$ tel que $N^\alpha(e_1, e_2) = 0$ pour tout $e_2 \in \mathscr{E}_0$, on aura $N_p(e_1, e_2) = 0$ et donc $N(e_1, e_2) = 0$, puisque N_p est décroissante.

COROLLAIRE 1. *Soit N un noyau de convolution satisfaisant au principe de domination. Si N^2 est un noyau, la puissance fractionnaire est un noyau de convolution satisfaisant au principe de domination.*

COROLLAIRE 2. *Si N satisfait au principe complet du maximum et N^2 est un noyau, la puissance fractionnaire satisfait au même principe.*

En effet, on a $pN_p^{(\alpha)}1 \leq 1$ sur X.

§ 6. Exemples

1) $N = aU$, où a est une constante > 0. On voit facilement que la résolvante est donnée par $N_p = a(1 + ap)^{-1}U$ et la puissance fractionnaire N^α est égale à $a^\alpha U$.

2) *Noyau élémentaire* $N = \sum_{n=0}^{\infty} G^n$. La résolvante N_p est donnée par $N_p = \sum_{n=0}^{\infty}(1 + p)^{-(n+1)}G^n$, et donc

$$N^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n-1)}{n!} G^n.$$

Il satisfait au principe de domination, et au principe complet du maximum si $G1(x) \leq 1$. Il est un noyau élémentaire d'un générateur convenable [5], [6].

3) *Noyau de Riesz-Frostman.* Soit N le noyau de Newton dans l'espace à $d(\geq 3)$ dimensions défini par

$$k(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\,|x|^{2-d}.$$

La résolvante N_p est le noyau de convolution défini par

$$k_p(x) = \int_0^\infty e^{-pt}\,(2\pi t)^{-\frac{d}{2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\,dt.$$

Par conséquent, la puissance fractionnaire est le noyau de Riesz-Frostman: le noyau de convolution défini par

$$k^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-\alpha\right)}{2^\alpha \pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\alpha)}\,|x|^{2\alpha-d}.$$

D'après le corollaire 2 du théorème 5, il satisfait au principe complet du maximum, et le théorème 3 nous donne

$$|x|^{2\alpha-d} * |x|^{2\beta-d} = \pi^{\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{d}{2}-\alpha-\beta\right)}{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma\left(\frac{d}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-\beta\right)}\,|x|^{2(\alpha+\beta)-d}$$

α et β étant des nombres positifs avec $0<\alpha+\beta<1$.

4) *Noyau de Bessel.* Soit N le noyau de convolution défini par $k_{1/2}(x)$ de l'exemple précédent. Alors la résolvante est donnée par $k_{(1/2)+p}(x)$ et donc la puissance fractionnaire est le noyau de convolution défini par $k^{(\alpha)}(x)$ dont la transformée de Fourier est égale à $2^\alpha/(1+4\pi^2|y|^2)^\alpha$. C'est le noyau de Bessel qui satisfait au principe complet du maximum si $0<\alpha\leq 1$. La fonction $k^{(\alpha)}(x)$ est donnée par

$$\frac{1}{2^{\frac{d}{2}-1}\,\pi^{\frac{d}{2}}\,\Gamma(\alpha)}K_{\frac{d}{2}-\alpha}(|x|)\,|x|^{\alpha-\frac{d}{2}},$$

où K est la fonction de Bessel modifiée [1].

5) *Noyau d'Heaviside.* Comme nous l'avons mentionné, la résolvante est donnée par

$$k_p(x) = \begin{cases} e^{-px} & \text{pour } x>0 \\ 0 & \text{pour } x\leq 0. \end{cases}$$

Donc la puissance fractionnaire est définie par

$$k^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{pour} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pour} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] N. Aronszajn, K.T. Smith, Theory of Bessel potentials, Ann. Inst. Fourier, **11** (1961), 385–475.

[2] A. Beurling, J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. N.A.S., **45** (1959), 208–215.

[3] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials, I, II, Illinois J. Math., **1** (1957), 44–93, 316–369.

[4] M. Itô, Sur les principes divers du maximum et type positif, à paraître.

[5] ———, Le principe de domination pour les noyaux tayloriens, à paraître.

[6] M. Kishi, Positive kernels and potentials, Lecture notes (1970/71).

[7] G. Lion, Famille d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, **16** (1966), 389–453.

[8] P.A. Meyer, Probabilités et potentiel, Hermann, 1966.

[9] K. Yosida, Functional analysis, 2nd edition, Springer, 1968.

Université de Nagoya