M. Itô
Nagoya Math. J.
Vol. 75 (1979), 1–39

SUR LES NOYAUX DE CONVOLUTION CONDITIONNELLEMENT SOUS-MÉDIANS II

MASAYUKI ITÔ

§ 1. Introduction

Dans toute la suite X désignera un groupe abélien localement compact, séparé et dénombrable à l'infini et ξ désignera la mesure de Haar sur X. Un noyau de convolution N sur X est une mesure de Radon positive dans X et, pour une mesure de Radon réelle μ dans X, le N-potentiel de μ est la convolution $N*\mu$ dès qu'elle a un sens.

Depuis que O. Frostman [5] a étudié le principe classique du maximum pour les noyaux de Riesz-Frostman sur l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n (n \geqq 1)$, il y avait beaucoup de travaux sur le principe classique du maximum.

Dans le cas où X est un tore, il y a un travail important concernant le principe classique du maximum pour les noyaux de convolution symétriques (voir [12]): Un noyau de convolution symétrique N vérifie le principe classique du maximum si et seulement si la transformée de Fourier de N est de la forme $\hat{N} = \lambda_1/\lambda_2$, où λ_j $(j = 1, 2)$ est une fonction définie-négative sur le groupe dual $\hat{X}$ de X à valeurs non-négatives.

Dans le cas où X est non-compact et où il n'existe aucun sous-groupe compact de X excepté $\{0\}$, nous avons donné une caractérisation analogue pour les noyaux de convolution symétriques et s'annulant à l'infini (voir [7]). On se trouve quelques démonstration incomplètes dans [7].

Remarquons que si, pour un noyau de convolution $N, \hat{N}$ est, pour deux fonctions définie-négatives λ_1 et λ_2 sur $\hat{X}$, de la forme $\hat{N} = \lambda_1/\lambda_2$, alors N est conditionnellement sous-médian par rapport au semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ défini par $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\lambda_2)$.

On dit qu'un noyau de convolution N est conditionnellement sous-médian par rapport au semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ donné si,

Received September 1, 1977.

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

pour $t>0$ quelconque, $N*\alpha_t$ a un sens, si, en posant $\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ l'ensemble des fonctions $f\in C_K^+(X)$ vérifiant la condition que $\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*f$ converge uniformément sur tout compact lorsque $t\to 0$, $\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ est dense dans $C_K^+(X)$ et si, pour $f\in\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*f(0)\geqq 0$. Dans ce cas, il existe une mesure de Radon positive σ en dehors de l'origine, et une seule telle que, pour $f\in\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\int f d\sigma = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*f(0)$.

Supposons qu'il n'existe aucun sous-groupe compact excepté $\{0\}$. Le but de cet article est de montrer l'équivalence entre les deux énoncés suivants (a) et (b). Soient N un noyau de convolution et N' un noyau de convolution vérifiant $N=o(N')$. On désigne par ε la mesure d'unité à l'origine.

(a) N vérifie le principe de domination relatif à N'.

(b) Il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ des mesures de Radon positives vérifiant $\alpha_t\neq\varepsilon$ $(t>0)$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et que, pour $t\geqq 0$ quelconque, $N'\geqq N'*\alpha_t$ dans X.

Ceci donnera immédiatement l'équivalence suivante:

Pour qu'un noyau de convolution N s'annulant à l'infini vérifie le principe classique du maximum, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ des mesures de Radon positives vérifiant $\alpha_t\neq\varepsilon$ $(t>0)$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$.

Dans le cas où $X=\boldsymbol{R}^n$, N vérifie le principe classique du maximum si et seulement s'il existe un laplacien généralisé $L\neq 0$ tel que $L*N\geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine.

§ 2. Préliminaires et quelques propositions

Dans ce paragraphe, on ne supposera aucune condition supplémentaire pour X.

On désigne par $C_K = C_K(X)$ l'espace vectoriel topologique usuel des

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

fonctions finies et continues dans X à support compact et par $M_K = M_K(X)$ l'ensemble formé par toutes les fonctions ξ-mesurables et bornées dans X à valeurs réelles et à support compact. Leurs sous-ensembles des fonctions $\geqq 0$ sont notés C_K^+ et M_K^+, respectivement. Pour un noyau de convolution N et pour $f \in M_K$, $N*(f\xi)$ est absolument continu par rapport à ξ, et sa densité s'écrit Nf. Evidemment Nf est localement bornée.

Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. On note $N_1 = O(N_2)$ si, pour $f \in C_K^+$ quelconque, il existe $g \in C_K^+$ et un compact K dans X tel que $N_1 * f \leqq N_2 * g$ sur CK. On note $N_1 = o(N_2)$ si N_1 et $N_2 \neq 0$ sont à support compact ou bien si supp (N_2) est non-compact et si, pour $f \in C_K^+$ quelconque, il existe $g \in C_K^+$ telle que $N_2 * g(x) > 0$ sur supp $(N_1 * f)$ et que

$$\frac{N_1 * f(x)}{N_2 * g(x)} = o(1) \tag{2.1}$$

dans $\{x \in X;\ N_2 * g(X) > 0\}$ à l'infini.

On dit que N_1 vérifie le principe de domination relatif à (resp. le principe transitif de domination par rapport à) N_2 si, pour $f, g \in C_K^+$ quelconques, $N_1 * f \leqq N_2 * g$ (resp. $N_2 * f \leqq N_2 * g$) sur X dès que $N_1 * f \leqq N_2 * g$ (resp. $N_1 * f \leqq N_1 * g$) sur le support de f, supp (f). Dans ce cas, on écrit $N_1 \prec N_2$ (resp. $N_1 \sqsubset N_2$).

Remarque 1. Supposons que $N_1 \prec N_2$. Alors on a:

(2.2) Si $N_2 \neq 0$, alors $N_1 = O(N_2)$.

(2.3) Si $N_1 \neq 0$, alors supp $(N_1) \ni 0$.

(2.4) Si supp $(N_2) \ni 0$, alors supp $(N_1) \subset$ supp (N_2).

On voit facilement (2.2) et (2.3). Pour $f \in C_K^+$ et $g \in C_K^+$ vérifiant supp $(g) \subset \{x \in X; f(x) > 0\}$ quelconques, supp $(N_2) \ni 0$ et $N_1 \prec N_2$ montrent qu'il existe une constante $a > 0$ vérifiant $aN_1 * g \leqq N_2 * f$ sur X, et donc supp (N_1) + supp $(f) \subset$ supp (N_2) + supp (f), où, pour deux sous-ensembles A et B de X, $A + B$ désigne $\{x + y;\ x \in A, y \in B\}$. En faisant supp $(f) \downarrow \{0\}$, on arrive à supp $(N_1) \subset$ supp (N_2), d'où (2.4).

On dit que N_1 vérifie le principe du balayage relatif à N_2 (resp. le principe transitif du balayage par rapport à N_2) si, pour une mesure de Radon positive μ à support compact et un ouvert relativement compact ω dans X quelconques, il existe une mesure de Radon positive μ' (resp. μ'') portée par $\bar{\omega}$ telle que:

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

(2.5) $N_1 * \mu' \leqq N_2 * \mu$ (resp. $N_2 * \mu'' \leqq N_2 * \mu$) dans X.

(2.6) $N_1 * \mu' = N_2 * \mu$ (resp. $N_1 * \mu'' \geqq N_1 * \mu$) dans ω.

Dans ce cas, on écrit $N_1 \prec_B N_2$ (resp. $N_1 \sqsubset_B N_2$), et l'on dit que μ' (resp. μ'') est une mesure balayée (resp. une mesure balayée transitivement) de μ sur ω relativement à (N_1, N_2).

PROPOSITION 2. *Pour deux noyaux de convolution $N_1 \neq 0$ et $N_2 \neq 0$, les six énoncés suivants sont équivalents*:

(a) $N_1 \prec N_2$. (b) $N_1 \sqsubset N_2$. (c) $N_1 \prec_B N_2$. (d) $N_1 \sqsubset_B N_2$.
(e) $\check{N}_1 \prec \check{N}_2$. (f) Pour $c \in (0, \infty)$ quelconque, $N_1 + c\varepsilon \prec N_2$.

Pour un noyau de convolution N, on note $\check{N}$ le noyau de convolution défini par $\int f d\check{N} = \int \check{f} dN$ pour toute $f \in C_K$, où $\check{f}(x) = f(-x)$, et l'on l'appelle le noyau adjoint de N. On dit souvent que ε est le noyau d'unité. Pour (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d), voir le théorème 20 dans [11]. Pour (a) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f), voir les propositions 2, 3 dans [10] et la proposition 4 dans [11].

Pour un noyau de convolution N, on désigne par $D^+(N)$ l'ensemble des mesures de Radon positives dont les N-potentiels sont définis.

PROPOSITION 3. *Soient N un noyau de convolution et $N' \neq 0$ un noyau de convolution vérifiant $N \prec N'$. Soit μ une mesure de Radon positive appartenant à $D^+(N')$. Si $N' \geqq N' * \mu$ dans X, alors $\mu \in D^+(N)$ et $N(\{0\}) \geqq N * \mu(\{0\})$.*

Démonstration. Comme $N = O(N')$, on a $\mu \in D^+(N)$. Soit $\varphi \in C_K^+$ vérifiant $\check{N}' * \varphi(0) > 0$. Pour $\delta \in (0, \infty)$ quelconque, il existe $v \in \mathscr{V}$ tel que, pour $f \in C_K^+$ portée par v et vérifiant $0 \leqq f \leqq 1$, $f(0) = 1$ quelconque,

$$\check{N} * f(x) \leqq \frac{N(\{0\})}{\check{N}' * \varphi(0)} \check{N}' * \varphi(x) + \delta \check{N}' * \varphi(x) \qquad \text{sur } v. \tag{2.7}$$

On désigne ici par $\mathscr{V}$ la totalité des voisinages compacts de l'origine. Comme $\check{N} \prec \check{N}'$, l'inégalité dans (2.7) a lieu sur X. En faisant supp $(f) \downarrow \{0\}$ et $\delta \downarrow 0$, on arrive à

$$\check{N}(\{x\}) \leqq \frac{N(\{0\})}{\check{N}' * \varphi(0)} \check{N}' * \varphi(x) \qquad \text{sur } X. \tag{2.8}$$

On a donc

$$(2.9)\qquad N(\{0\}) - N*\mu(\{0\}) = N(\{0\}) - \int \check{N}(\{x\})d\mu(x)$$
$$\geqq \frac{N(\{0\})}{\check{N}'*\varphi(0)}(\check{N}'*\varphi(0) - \int \check{N}'*\varphi d\mu) \geqq 0 ,$$

d'où la proposition 3.

Pour un noyau de convolution N, on désigne par $S(N)$ l'ensemble des noyaux de convolution N' vérifiant $N \prec N'$. En rappelant (2.8), on obtient le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4. *Soit N un noyau de convolution vérifiant $S(N) \neq \emptyset$ et $S(N) \neq \{0\}$. Si $N(\{0\}) = 0$, alors, pour $x \in X$ quelconque, $N(\{x\}) = 0$.*

Pour deux noyaux de convolution N_1 et N_2, on dit que N_1 est régulier par rapport à N_2 si $\bigcap_{v \in \mathscr{V}} P(N_1, N_2; v) = \{0\}$, où

$$(2.10)\quad P(N_1, N_2; v) = \overline{\{N_1 * \lambda;\ \lambda \in D^+(N_1) \cap D^+(N_2),\ \mathrm{supp}\,(\lambda) \subset Cv,\ N_2 \geqq N_2 * \lambda\}}\,,$$

où l'adhérence est au sens de la topologie vague. On dit simplement qu'un noyau de convolution N est régulier si N est régulier par rapport à lui-même (cf. [11]). On écrit simplement $P(N; v) = P(N, N; v)$.

Remarque 5. Soient N_1 et N_2 deux noyaux de convolution. Si $N_1 = o(N_2)$ ou bien si $N_1 = O(N_2)$ et N_2 est régulier, alors N_1 est régulier par rapport à N_2.

En effet, soit $\eta \in \bigcap_{v \in \mathscr{V}} P(N_1, N_2; v)$ quelconque. Alors il existe une famille filtrante à droite $(v_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathscr{V}$ et une famille filtrante $(N_1 * \lambda_\alpha)_{\alpha \in A}$ des N_1-potentiels des mesures de Radon positives telles que $\bigcup_{\alpha \in A} v_\alpha = X$, $\mathrm{supp}\,(\lambda_\alpha) \subset Cv_\alpha$, $\lim_\alpha N_1 * \lambda_\alpha = \eta$ (vaguement) et que $N_2 \geqq N_2 * \lambda_\alpha$. Si $N_1 = o(N_2)$, on a $\lim_\alpha N_1 * \lambda_\alpha = 0$ (vaguement), d'après la remarque 30 dans [11]. Si N_2 est régulier, alors on a $\lim_\alpha N_2 * \lambda_\alpha = 0$ (vaguement). Comme $N_1 = O(N_2)$, on a aussi $\lim_\alpha N_1 * \lambda_\alpha = 0$ (vaguement). Par conséquent, $\eta = 0$, d'où $\bigcap_{v \in \mathscr{V}} P(N_1, N_2; v) = \{0\}$.

On voit aussi facilement que si $N_1 = O(N_2)$ et N_2 est régulier, alors N_1 est aussi régulier.

Remarque 6. En rappelant la démonstration du théorème 20 et la proposition 25 dans [11], on voit l'énoncé suivant:

Soit N un noyau de convolution vérifiant $S(N) \neq \emptyset$ et $S(N) \neq \{0\}$.

Pour un ouvert relativement compact ω dans X, il existe une mesure de Radon positive μ''_ω portée par $\bar{\omega}$ telle que l'on ait:

(2.11) $N(\{0\})\mu''_\omega \leqq N$ dans X.

(2.12) Pour $N' \in S(N)$ quelconque, μ''_ω est une mesure balayée transitivement de ε sur ω relativement à (N, N').

(2.13) Pour une mesure de Radon positive ν appartenant à $D^+(N)$ et $N' \in S(N)$ quelconques, $N' * \nu \geqq N' * \mu''_\omega$ dans X dès que $N * \nu \geqq N * \mu$ dans ω.

Dans ce cas, μ''_ω s'appelle une mesure balayée transitivement de ε sur ω par rapport à $S(N)$.

Remarque 7. Soit N un noyau de convolution. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ telle que N soit régulier par rapport à N'. Alors, pour un ouvert quelconque ω dans X, il existe une mesure de Radon positive μ''_ω portée par $\bar{\omega}$ vérifiant (2.11), (2.12) et (2.13).

En effet, on choisit une suite croissante $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ d'ouverts relativement compacts telle que $\bigcup_{n=1}^\infty \omega_n = \omega$. Soit μ''_n une mesure balayée transitivement de ε sur ω_n par rapport à $S(N)$. Comme $N' \geqq N' * \mu''_n$ et $N = O(N')$, $(\mu''_n)_{n=1}^\infty$ et $(N * \mu''_n)_{n=1}^\infty$ sont vaguement bornées. Donc on peut supposer que $(\mu''_n)_{n=1}^\infty$ et $(N * \mu''_n)_{n=1}^\infty$ convergent vaguement. Posons $\mu''_\omega = \lim_{n\to\infty} \mu''_n$ et $\eta = \lim_{n\to\infty} N * \mu''_n$ (vaguement). Pour que μ''_ω soit une mesure demandée, il suffit que $\eta = N * \mu''_\omega$. Pour $\varphi \in C_K^+$ vérifiant $0 \leqq \varphi \leqq 1$ quelconque, $\lim_{n\to\infty} N * (\varphi\mu''_n)$ $= N * (\varphi\mu''_\omega)$ (vaguement), et donc

$$0 \leqq \eta - N * \varepsilon''_\omega \leqq \lim_{n\to\infty} N * ((1-\varphi)\mu''_n) \text{ dans } X. \tag{2.14}$$

Ceci donne que, pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, il existe $\eta_v \in P(N, N'; v)$ vérifiant $0 \leqq \eta - N * \mu''_\omega \leqq \eta_v$. En faisant $v \uparrow X$, on arrive à $\eta = N * \mu''_\omega$, d'où la remarque 7.

On dit aussi que μ''_ω est une mesure balayée transitivement de ε sur ω par rapport à $S(N)$. Dans les présentes deux remarques, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $N' * \mu''_\omega$ est uniquement déterminé.

Proposition 8. *Soit N un noyau de convolution vérifiant $N(\{0\}) > 0$. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N'. Alors il existe une mesure de Radon* *positive* μ'' *dans* X *telle que l'on ait*:

$$\mu''(\{0\}) = 0. \tag{2.15}$$

$$N*\mu'' \geqq N \text{ dans } C\{0\}. \tag{2.16}$$

$$N'' \geqq N''*\mu'' \text{ dans } X \text{ pour tout } N'' \in S(N). \tag{2.17}$$

Démonstration. Soit $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à droite d'ouverts relativement compacts dans X telle que $\bar{\omega}_\alpha \subset C\{0\}$ et $\bigcup_{\alpha\in A} \omega_\alpha = C\{0\}$. On prend une mesure balayée transitivement μ''_α de ε sur ω_α par rapport à $S(N)$. Alors $N*\mu''_\alpha \geqq N$ dans ω_α, $N'' \geqq N''*\mu''_\alpha$ dans X pour tout $N'' \in S(N)$ et

$$N(\{0\})\mu''_\alpha \leqq N - N(\{0\})\varepsilon. \tag{2.18}$$

Comme $N' \neq 0$, on peut supposer que $(\mu''_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ''. De la même manière que dans la remarque 7, on a $\lim_\alpha N*\mu''_\alpha = N*\mu''$ (vaguement), et donc μ'' vérifie (2.16) et (2.17). D'après (2.18), on a $\mu''(\{0\}) = 0$. La démonstration est ainsi complète.

Dans ce cas, μ'' est une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N)$.

Une famille $(N_p)_{p>0}$ des noyaux de convolution est, par définition, une résolvante si, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$N_p - N_q = (q-p)N_p*N_q \qquad \text{(Équation résolvante)}. \tag{2.19}$$

On connaît bien que, pour un noyau de convolution N, une résolvante $(N_p)_{p>0}$ vérifiant $\lim_{p\to 0} N_p = N$ (vaguement) est uniquement déterminée dès qu'elle existe. Dans ce cas, en posant $N_0 = N$, $(N_p)_{p\geqq 0}$ s'appelle la résolvante associée à N.

D'après le lemme 35 et la remarque 33 dans [11], on voit la remarque suivante:

Remarque 9. Pour un noyau de convolution N, les deux énoncés suivants sont équivalents:

(a) Il existe la résolvante associée à N.

(b) N est régulier et vérifie le principe de domination.

On dit que N vérifie le principe de domination si $N \prec N$.

PROPOSITION 10. *Soient* $(N_p)_{p>0}$ *une résolvante et* N' *un noyau de convolution. Alors, pour que, pour* $p>0$ *quelconque,* $N_p \prec N'$, *il faut et il suffit que, pour* $p>0$ *quelconque,* $N' \geqq pN' * N_p$.

Démonstration. Comme N_p vérifie le principe de domination, on a $\operatorname{supp}(N_p) \ni 0$ ou bien $N_p = 0$. Donc on peut supposer que $N' \neq 0$. D'après l'équation résolvante, on a, pour tous $p>0$ et $q>0$,

$$N_q + \frac{1}{p}\varepsilon = \frac{1}{p}\Big(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}(pN_{p+q})^{*n}\Big)\,, \tag{2.20}$$

où $(\cdot)^{*1} = (\cdot)$ et $(\cdot)^{*n+1} = (\cdot)^{*n} * (\cdot)$. Si $N' \geqq pN' * N_{p+q}$, alors $N_q + \frac{1}{p}\varepsilon \prec N'$ (voir la proposition 2 et la remarque 10 dans [11]). Si $N_q + \frac{1}{p}\varepsilon \prec_B N'$, alors $N' \geqq pN' * N_{p+q}$. D'après la proposition 2, on voit que $N_q + \frac{1}{p}\varepsilon \prec N'$ et $N' \geqq pN' * N_{p+q}$ sont équivalents. Ceci donne immédiatement la proposition 10 (voir aussi la proposition 2 dans [11]).

PROPOSITION 11. *Soit* $(N_p)_{p>0}$ *une résolvante et supposons qu'il existe un noyau de convolution* $N' \neq 0$ *tel que, pour* $p>0$ *quelconque,* $N' \geqq pN' * N_p$. *Alors* pN_p *converge vaguement vers une mesure de Radon positive* η *dans* X *lorsque* $p \to 0$. *Si* $\eta \neq 0$, *alors, pour* $p>0$ *quelconque,* $\operatorname{supp}(N_p) \subset \operatorname{supp}(\eta)$, η *est portée par un sous-groupe compact* Γ *de* X *et la restreinte de* η *sur* Γ *est la mesure de Haar normalisée de* Γ.

Démonstration. Evidemment $(pN_p)_{p>0}$ est vaguement bornée. Supposons qu'il existe un point vaguement adhérent $\eta \neq 0$ de $(pN_p)_{p>0}$ lorsque $p \to 0$. On prend une famille filtrante $(N_{p_\alpha})_{\alpha \in A}$ telle que $\lim_\alpha p_\alpha = 0$ et $\lim_\alpha p_\alpha N_{p_\alpha} = \eta$ (vaguement). En utilisant le lemme de J. Deny (voir le lemme 5.2 dans [4]) et en faisant $p_\alpha \to 0$ dans l'équation résolvante $(p_\alpha N_{p_\alpha}) * (\varepsilon - (p_\beta - p_\alpha)N_{p_\beta}) = p_\alpha N_{p_\beta}$ $(\beta \in A)$, on voit que $\eta * (\varepsilon - p_\beta N_{p_\beta}) = 0$. On a aussi, pour $p>0$ quelconque,

$$\eta * (\varepsilon - pN_p) = 0\,. \tag{2.21}$$

En faisant $p_\beta \to 0$, on voit que $(\eta)^{*2} = \eta$, en utilisant encore le lemme de J. Deny. D'après le théorème 1 dans [13], η est portée par un sous-groupe compact Γ de X et la restreinte de η sur Γ est la mesure de Haar normalisée sur Γ. Soit η' un point vaguement adhérent de $(pN_p)_{p>0}$

lorsque $p \to 0$ quelconque. D'après (2.21) et le lemme de J. Deny, on a $\eta = \eta * \eta'$, et donc $\eta' \neq 0$. De la même manière que ci-dessus, on a $\eta' = \eta * \eta'$, d'où $\eta = \eta'$. Ceci donne que $\lim_{p \to 0} pN_p = \eta$ (vaguement). D'après (2.21) et la proposition 10, on a, pour tout $p > 0$, $N_p \prec \eta$, et donc $\mathrm{supp}\,(N_p) \subset \mathrm{supp}\,(\eta)$. La démonstration est ainsi complète.

Ensuite une famille $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ des mesures de Radon positives s'appelle un semi-groupe vaguement continu si $\alpha_0 = \varepsilon$, $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s}$ pour tous $t \geqq 0$ et $s \geqq 0$ et l'application $\boldsymbol{R}^+ \ni t \to \alpha_t$ est vaguement continue, où $\boldsymbol{R}^+ = \{t \in \boldsymbol{R}^1; t \geqq 0\}$. Soit N un noyau de convolution. Si N s'écrit, pour un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$, comme $N = \int_0^\infty \alpha_t dt$, alors N s'appelle un noyau de convolution de Hunt. Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est uniquement déterminé et s'appelle le semi-groupe vaguement continu associé à N. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu et supposons que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ est défini. Alors $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante.

Remarque 12. Soit $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. S'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' * \alpha_t$ a un sens et que $N' \geqq N' * \alpha_t$, alors, pour $p > 0$ quelconque $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ est défini.

PROPOSITION 13. *Soit $(N_p)_{p>0}$ une résolvante. Alors, pour qu'il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ tel que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$, il faut et il suffit qu'il existe $p_0 > 0$ tel que N_{p_0} soit non-périodique*[1]. *Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est uniquement déterminé.*

Rappelons la caractérisation d'un noyau de convolution de Hunt suivante:

LEMME 14. *Soit N un noyau de convolution. Alors, pour que N soit un noyau de convolution de Hunt, il faut et il suffit que N soit non-périodique et qu'il existe la résolvante associée à N.*

Voir la proposition 1 dans [8].

Démonstration de la proposition 13. D'après le présent lemme, la

(1) Un noyau de convolution N est non-périodique si, pour $x \neq 0 \in X$ quelconque, $N \neq N * \varepsilon_x$, où ε_x désigne la mesure d'unité à x.

condition est nécessaire. Montrons que la condition est suffisante. En rappelant l'équation résolvante, on voit que, pour $p > 0$ quelconque, N_p est non-périodique. D'après le lemme 14, pour $p > 0$ quelconque, il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_{p,t})_{t\geqq 0}$, et un seul tel que $N_p = \int_0^\infty \alpha_{p,t}dt$. Comme $(N_{p+q})_{q\geqq 0}$ est la résolvante associée à N_p, on a, pour $t \in R^+$ quelconque, $\alpha_{p+q,t} = \exp(-qt)\alpha_{p,t}$. Par conséquent, il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$, et un seul tel que, pour $p \in (0, \infty)$ et $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconques, $\alpha_{p,t} = \exp(-pt)\alpha_t$, d'où la proposition 13.

On dit que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est le semi-groupe vaguement continu associé à $(N_p)_{p>0}$.

PROPOSITION 15. *Soit $(N_p)_{p>0}$ une résolvante des noyaux de convolution $\neq 0$ vérifiant $\lim_{p\to 0} pN_p = 0$ (vaguement) et supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que, pour tout $p > 0$, $N' \geqq pN' * N_p$ dans X. Pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, on désigne par $\mu'_{p,Cv}$ une mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p*[(2)]*. Alors $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ est vaguement bornée et $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p>0}$ converge vaguement lorsque $p \to 0$. Posons η_v sa limite vague. Alors, pour $p > 0$ et un point vaguement adhérent μ'_{Cv} de $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ lorsque $p \to 0$ quelconques,*

$$\eta_v * (\varepsilon - pN_p) = N_p * (\varepsilon - \mu'_{Cv}) \,. \tag{2.22}$$

En particulier, si, pour tout $p > 0$, N_p est non-périodique, alors $\eta_v \neq 0$ et $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ converge vaguement lorsque $p \to 0$.

Démonstration. Admettons la première partie et supposons que, pour tout $p > 0$, N_p est non-périodique. Alors N_p est un noyau de convolution de Hunt (voir le lemme 14). D'après (2.22) et l'injectivité de N_p[(3)], on voit que $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ converge vaguement lorsque $p \to 0$ et que $\eta_v \neq 0$.

Montrons la première partie. D'après la proposition 10, on a, pour tout $p > 0$, $N_p \prec N'$, et donc la proposition 2 donne que $N_p \sqsubset N'$. Ceci

---

(2) Pour une mesure de Radon positive μ à support compact et pour un ouvert ω dans X, μ' est une mesure balayée de μ sur ω relativement à un noyau convolution N si $\operatorname{supp}(\mu') \subset \bar{\omega}$, $N*\mu' \leqq N*\mu$ dans X, $N*\mu' = N*\mu'$ dans ω et si, pour une mesure de Radon positive ν appatenant à $D^+(N)$ quelconque, $N*\nu \leqq N*\mu'$ dans X dès que $N*\nu \leqq N*\mu$ dans ω. Si N est un noyau de convolution de Hunt, alors μ' est uniquement déterminée.

(3) On dit qu'un noyau de convolution N est injectif si, pour μ, ν de $D^+(N)$ quelconques, $\mu = \nu$ dès que $N * \mu = N * \nu$. Il est bien connu qu'un noyau de convolution de Hunt est injectif (voir, par exemple, [4]).

donne que

$$N' \geqq N' * \mu'_{p,Cv} \text{ dans } X \ (p > 0) . \tag{2.23}$$

Par conséquent $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ est vaguement bornée. Montrons que la famille $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p>0}$ est aussi vaguement bornée. Supposons qu'elle ne l'est plus. Alors il existe une suite $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ des nombres positifs telle que l'on ait $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \int d(N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv}) = \infty$. On peut supposer ici que $(\mu'_{p_n,Cv})_{n=1}^{\infty}$ converge vaguement vers une mesure de Radon positive μ'_{Cv} portée par $\overline{Cv}$ lorsque $n \to \infty$. Posons $c_n = \int d(N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv})$ et $\eta_n = \frac{1}{c_n}(N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv})$; alors on peut supposer que $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi vaguement vers une mesure de Radon positive η lorsque $n \to \infty$. Remarquons que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, $\operatorname{supp}(N_p) = \operatorname{supp}(N_q)$, car, pour $r > \max(p, q)$ quelconque, $N_p = \frac{1}{r-p} \sum_{n=1}^{\infty} ((r-p)N_r)^{*n}$ et $N_q = \frac{1}{r-q} \sum_{n=1}^{\infty} ((r-q)N_r)^{*n}$. Donc, pour $p > 0$ quelconque, $\operatorname{supp}(\eta) \subset v \cap \operatorname{supp}(N_p)$ et $\int d\eta = 1$. Le lemme de J. Deny (cité ci-dessus) donne que, pour $p > 0$ quelconque,

$$\lim_{n\to\infty} N_p * \mu'_{p_n,Cv} = N_p * \mu'_{Cv} \text{ (vaguement)}, \tag{2.24}$$

et donc

$$\begin{aligned} \eta * (\varepsilon - pN_p) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n}(N_{p_n} - N_{p_n} * \mu'_{p_n,Cv}) * (\varepsilon - (p - p_n)N_p) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} N_p * (\varepsilon - \mu'_{p_n,Cv}) = 0 \text{ (vaguement)} . \end{aligned} \tag{2.25}$$

En faisant $p \to 0$, on arrive à $\eta = 0$, d'où une contradiction. Donc $(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})_{p>0}$ est vaguement bornée. Soient $0 < p < q$ quelconques. Alors on a

$$N_q * \mu'_{p,Cv} = N_p * \mu'_{p,Cv} * (\varepsilon - (q-p)N_q) \geqq N_q = N_q * \mu'_{q,Cv} \tag{2.26}$$

dans Cv. En rappelant la définition de $\mu'_{p,Cv}$, on a

$$N_q * \mu'_{p,Cv} \geqq N_q * \mu'_{q,Cv} \text{ dans } X . \tag{2.27}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

Soient δ un nombre >0 et $f \in C_K^+$ quelconques. Alors il existe un nombre $p_0 > 0$ tel que, pour $0 < p < p_0$ et $0 < q < p_0$ quelconques,

$$\int fd(qN_q)*(N_p - N_p*\mu'_{p,Cv}) < \delta . \tag{2.28}$$

Pour $p, q \in (0, p_0)$ vérifiant $p < q$ quelconques, on a

$$\begin{aligned}\int fd(N_p - N_p*\mu'_{p,Cv}) &- \int fd(N_q - N_q*\mu'_{q,Cv}) - \delta \\ &= (q-p)\int fdN_q*(N_p - N_p*\mu'_{p,Cv}) - \delta \\ &\quad - \int fd(N_q*\mu'_{p,Cv} - N_q*\mu'_{q,Cv}) < 0 .\end{aligned} \tag{2.29}$$

Soient $\eta_{v,1}$ et $\eta_{v,2}$ deux points vaguement adhérents de $(N_p - N_p*\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ lorsque $p \to 0$ quelconques. Alors on a, pour tout $p \in (0, p_0)$,

$$\int fd\eta_{v,j} \leqq \int fd(N_p - N_p*\mu'_{p,Cv}) + \delta \qquad (j = 1, 2) , \tag{2.30}$$

et donc $\left|\int fd\eta_{v,1} - \int fd\eta_{v,2}\right| \leqq \delta$. En faisant $\delta \downarrow 0$, on arrive à l'egalite $\int fd\eta_{v,1} = \int fd\eta_{v,2}$, d'où $\eta_{v,1} = \eta_{v,2}$. Par conséquent, $(N_p - N_p*\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ converge vaguement lorsque $p \to 0$. L'égalité (2.22) résulte de l'équation résolvante et du lemme de J. Deny. La démonstration est ainsi complète.

On dit que tout le point vaguement adhérent de $(\mu'_{p,Cv})_{p>0}$ lorsque p $\to 0$ est une mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$.

Proposition 16. *Soit N un noyau de convolution vérifiant $N(\{0\}) > 0$. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N'. Soit μ'' une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N)$ vérifiant $\mu''(\{0\}) = 0$. Alors*

$$N'*(N - N*\mu'') \geqq 0 \textit{ dans } X . \tag{2.31}$$

Lemme 17. *Soient N et N' deux noyaux de convolution et supposons que N est régulier par rapport à N'. Alors, pour une famille filtrante $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ des mesures de Radon positives convergeant vaguement vers une mesure de Radon positive μ, $\lim_\alpha N*\mu_\alpha = N*\mu$ dès que $(N*\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est vaguement bornée et que $N' \geqq N'*\mu_\alpha$ dans X.*

Démonstration du lemme 17. On peut supposer que $(N*\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge vaguement. Posons $\eta = \lim_\alpha N*\mu_\alpha$ (vaguement). Alors $\eta \geqq N*\mu$ dans X. Pour $\varphi \in C_K^+$ vérifiant $0 \leqq \varphi \leqq 1$ quelconque, on a

$$\eta - N*\mu = \lim_\alpha N*((1-\varphi)(\mu_\alpha - \mu)) \qquad \text{(vaguement)}\,, \tag{2.32}$$

et donc, pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, il existe $\eta_v \in P(N, N'; v)$ tel que $\eta - N*\mu \leqq \eta_v$ dans X. En faisant $v \uparrow X$, on arrive à $\eta = N*\mu$, d'où le lemme 17.

Démonstration de la proposition 16. Comme $N' \geqq N'*\mu''$ dans X, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \dfrac{1}{1+p}\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+p}\mu''\right)^{*n}\right)$ est défini et $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante.

D'abord on suppose que $\lim_\alpha pN_p = 0$. Comme $N' \geqq pN'*N_p$, le lemme 17 donne que $\lim_{p\to 0} N*(pN_p) = 0$ (vaguement). On a

$$N = \lim_{p\to 0} N_p*(N - N*\mu'') \qquad \text{(vaguement)}\,. \tag{2.33}$$

Donc $N \neq N*\mu''$. D'après (2.33), on peut écrire, pour une constante $c > 0$ et pour une mesure de Radon positive σ, comme $N - N*\mu'' = c\varepsilon - \sigma$. Pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, posons $\sigma_v = \sigma$ sur v et $\sigma_v = 0$ dans Cv. Soit $h \in C_K^+$ vérifiant $N_1 * h(x) > 0$ sur $v + v$. Alors, pour $f \in C_K^+$ portée par v et un entier $n \geqq 1$ quelconque, il existe $0 < p < 1$ tel que

$$N_p*(c\varepsilon - \sigma_v)*f + \frac{1}{n}N_p*h \geqq 0 \qquad \text{sur } \operatorname{supp}(\sigma_v*f)\,. \tag{2.34}$$

Comme $N_p \sqsubset N'$, on a

$$N'*(c\varepsilon - \sigma_v)*f + \frac{1}{n}N'*h \geqq 0 \qquad \text{sur } X\,. \tag{2.35}$$

En faisant $n \to \infty$, $f\xi \to \varepsilon$ et ensuite $v \uparrow X$, on arrive à (2.31).

On suppose ensuite que $\lim_{p\to 0} pN_p \neq 0$. D'après la proposition 11, il existe un sous-groupe compact Γ de X tel que, pour $p > 0$ quelconque, $\operatorname{supp}(N_p) \subset \Gamma$ et que $\lim_{p\to 0} pN_p = \xi_\Gamma$, où ξ_Γ est la mesure de Haar normalisée de Γ. Alors, $\operatorname{supp}(\mu'') \subset \Gamma$ et

$$\begin{aligned}(N - N*\mu'')*\xi_\Gamma &= \lim_{p\to 0}(N - N*\mu'')*(pN_p) \\ &= \lim_{p\to 0} pN*(\varepsilon - pN_p) = 0 \ \text{(vaguement)}\,.\end{aligned} \tag{2.36}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

Comme $N - N*\mu'' \leqq 0$ dans $C\{0\}$, on a supp $(N - N*\mu'') \subset \Gamma$. Donc on peut supposer que supp $(N) \subset \Gamma$, et par suite on a (2.31). La démonstration est ainsi complète.

Par conséquent, on obtiendra la proposition suivante:

Proposition 18. *Soit N un noyau de convolution non-périodique vérifiant $N(\{0\}) > 0$. S'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N', alors il existe deux semi-groupes vaguement continus $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geqq 0}$ tels que, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N'*\alpha_t$, $N' \geqq N'*\beta_t$, $\frac{1}{t}(\varepsilon - \alpha_t)$, $\frac{1}{t}(\varepsilon - \beta_t)$, $\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)$ convergent vaguement lorsque $t \to 0$, $\lim_{p \to 0} p\int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt = 0$ (vaguement) et que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} N*(\alpha_t - \varepsilon) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\beta_t - \varepsilon) . \tag{2.37}$$

Démonstration. Soit μ'' une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N)$ vérifiant $\mu''(\{0\}) = 0$. Comme $N' \geqq N'*\mu''$, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque,

$$\alpha_t = \exp(-t)\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n (\mu'')^{*n}}{n!}\right) \tag{2.38}$$

a un sens et $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu. On a, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$, où $(N_p)_{p>0}$ est la résolvante définie dans la démonstration de la proposition 16. Ecrivons, pour une constante $c \geqq 0$ et pour une mesure de Radon positive σ, comme $N - N*\mu'' = c\varepsilon - \sigma$. Montrons que $c > 0$. Supposons contrairement que $c \leqq 0$. Alors (2.31) donne que $\sigma = 0$, et donc $N - N*\mu'' = 0$. On a alors $\lim_{p \to 0} pN_p \neq 0$ (voir la démonstration de la proposition 16). Posons $\xi_\Gamma = \lim_{p \to 0} pN_p$; alors supp $(\mu'') \subset$ supp (ξ_Γ) et $N*\xi_\Gamma = N*\xi_\Gamma*\mu''$, et donc $\int d\mu'' = 1$. L'égalité $N = N*\mu''$ et le théorème 1 dans [3] donnent que tout le point de supp (μ'') est une période de N[4]. Comme $\mu''(\{0\}) = 0$, ceci est en contradiction avec notre hypothèse. Par conséquent, $c > 0$ et donc $N' \geqq \frac{1}{c} N'*\sigma$ (voir (2.31)). Pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque,

(4) On dit que $x \in X$ est une période de N si $N = N*\varepsilon_x$.

$$\beta_t = \exp(-ct)\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n(\sigma)^{*n}}{n!}\right) \tag{2.39}$$

a un sens et $(\beta_t)_{t \geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu. Comme $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\varepsilon - \alpha_t) = \varepsilon - \mu''$ et $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\varepsilon - \beta_t) = c\varepsilon - \sigma$, on voit (2.37). La démonstration est ainsi complète.

Soient N un noyau de convolution et $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. Rappelons la définition de la sous-médianne conditionnelle de N par rapport à $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ (voir § 1). Lorsque $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ a un sens, cela est dit aussi conditionnellement sous-médian par rapport à N_0.

PROPOSITION 19. *Soient N un noyau de convolution et $(N_p)_{p>0}$ une résolvante vérifiant $\lim_{p \to 0} pN_p = 0$ (vaguement). Supposons que:*

(a) *Il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que $N = O(N')$, pour tout $p > 0$, $N' \geqq pN' * N_p$ et que N soit régulier par rapport à N'.*

(b) *Il existe le semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ associé à $(N_p)_{p>0}$.*

Alors les trois énoncés suivants sont équivalents:

(1) *N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$.*

(2) *Posons $\mathscr{D}^+\left(\lim_{p \to \infty} pN * (pN_p - \varepsilon)\right)$ l'ensemble des fonctions $f \in C_K^+$ vérifiant la condition que $pN * (pN_p - \varepsilon) * f$ converge uniformément sur tout compact lorsque $p \to \infty$. Alors $\mathscr{D}^+\left(\lim_{p \to \infty} pN * (pN_p - \varepsilon)\right)$ est dense dans C_K^+ et, pour $f \in \mathscr{D}^+\left(\lim_{p \to \infty} pN * (pN_p - \varepsilon)\right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\lim_{p \to \infty} pN * (pN_p - \varepsilon) * f(0) \geqq 0$.*

(3) *Pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, $N * \mu'_{Cv} \geqq N$ dans Cv, où μ'_{Cv} est la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$.*

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (3): Pour tout $p > 0$, $N_p \prec N'$, et donc $N' \geqq N' * \mu'_{Cv}$. On voit alors que $N * \mu'_{Cv}$ a un sens, d'après $N = O(N')$. D'après (b), on voit facilement que, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N' * \alpha_t$. Soit η_v la même que dans la proposition 15. Alors on a $\eta_v \neq 0$, d'après la proposition 15. En utilisant le lemme de J. Deny, $\lim_{p \to 0} pN_p * \alpha_t = 0$ (vaguement). On a donc, pour $t > 0$ quelconque,

$$\frac{1}{t}\eta_v * (\alpha_t - \varepsilon) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{t}\left(\int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_s ds\right) * (\varepsilon - \mu'_{p,Cv}) * (\alpha_t - \varepsilon) \tag{2.40}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$$= \lim_{p\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_0^t \exp(-pt)\alpha_s ds - \frac{1-\exp(-pt)}{p}(pN_p)*\alpha_t\right)*(\mu'_{p,Cv}-\varepsilon)$$
$$= \frac{1}{t}\left(\int_0^t \alpha_s ds\right)*(\mu'_{Cv}-\varepsilon) \qquad \text{(vaguement)}\,,$$

où $\mu'_{p,Cv}$ est la mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p. Ceci et le lemme 17 donnent que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} N*\eta_v*(\alpha_t-\varepsilon) = N*(\mu'_{Cv}-\varepsilon) \qquad \text{(vaguement)}\,. \tag{2.41}$$

Donc $\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ contient le sous-cône convexe de C_K^+ engendré par $\{f*\eta_v; f\in C_K^+, v\in\mathscr{V}\}$, et par suite $\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ est dense dans C_K^+. Remarquons que, pour $f\in\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque, $\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t\int d\eta_v}(N*\alpha_t - N)*f*\eta_v(0)\right)_{v\in\mathscr{V}}$ converge vers $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*f(0)$ lorsque $v\downarrow\{0\}$. Alors on voit facilement que (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(2) $\Leftrightarrow$ (3): De la même manière que ci-dessus, (2.22) donne que

$$\lim_{p\to\infty} pN*\eta_v*(pN_p-\varepsilon) = N*(\mu'_{Cv}-\varepsilon) \qquad \text{(vaguement)}\,. \tag{2.42}$$

De la même manière, on voit que (2) $\Leftrightarrow$ (3). La démonstration est ainsi complète.

Dans ce cas, $\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)\subset\mathscr{D}^+\left(\lim_{p\to\infty} pN*(pN_p-\varepsilon)\right)$ et il existe une mesure de Radon positive σ en dehors de l'origine, et une seule telle que, pour $f\in\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ à support $\subset C\{0\}$ quelconque,

$$\int f d\sigma = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*f(0) = \lim_{p\to\infty} pN*(pN_p-\varepsilon)*f(0)\,. \tag{2.43}$$

On a aussi que $\sigma = \lim_{v\downarrow\{0\}} \frac{1}{\int d\eta_v}(\widecheck{N*\mu'_{Cv}} - \check{N})$ (vaguement) en dehors de l'origine.

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

En rappelant la présente démonstration, on voit la remarque suivante:

Remarque 20. Soient N un noyau de convolution et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ tel que, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N' * \alpha_t$, $N = O(N')$ et que N soit régulier par rapport à N'. Alors $\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ est dense dans C_K^+.

En effet, de la même manière, (2.41) a lieu, et donc $\mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ est dense dans C_K^+.

La remarque suivante résulte immédiatement de la définition de la sous-médianne conditionnelle.

Remarque 21. Soient N un noyau de convolution et $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu. Alors pour que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$, il faut et il suffit que, pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, il existe une mesure de Radon positive $\eta_v \neq 0$ portée par v telle que $\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*\eta_v$ converge vaguement dans X lorsque $t \to 0$ et que $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*\eta_v \geqq 0$ en dehors de v.

La proposition suivante jouera un rôle dans la démonstration du théorème principal.

PROPOSITION 22. *Soient N un noyau de convolution, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu et p une constante >0. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $N' \neq 0$ dans $S(N)$ tel que $N' \geqq p\int_0^\infty \exp(-pt)N' * \alpha_t\, dt$ et que N soit régulier par rapport à N'. Posons $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$. Pour un ouvert ω, on désigne par $\mu'_{p,\omega}$ la mesure balayée de ε sur ω relativement à N_p. Si, pour un ouvert relativement compact ω quelconque, $N*(\varepsilon - pN_p)*\mu'_{p,\omega} \geqq N*(\varepsilon - pN_p)$ dans ω, alors N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$.*

Démonstration. Soit $v \in \mathscr{V}$ quelconque. On choisit une famille filtrante à droite $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ des ouverts relativement compacts telle que $\bigcup_{\alpha\in A}\omega_\alpha = Cv$. Alors $\mu'_{p,Cv} = \lim_\alpha \mu'_{p,\omega_\alpha}$ et $N_p * \mu'_{p,Cv} = \lim_\alpha N_p * \mu'_{p,\omega_\alpha}$ (vaguement). D'après l'inégalité $N' \geqq pN' * N_p * \mu'_{p,\omega_\alpha}$ $(\alpha \in A)$, le lemme 17 donne que

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

(2.44) $$pN * N_p * \mu'_{p,Cv} = \lim_\alpha pN * N_p * \mu'_{p,\omega_\alpha} \qquad \text{(vaguement)} .$$

Donc on a

(2.45) $$N * (\varepsilon - pN_p) * \mu'_{p,Cv} \geqq N * (\varepsilon - pN_p) \text{ dans } Cv .$$

Posons $\eta_{p,v} = N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}$; alors $\eta_{p,v} \neq 0$, d'après l'injectivité de N_p. D'après le lemme 17, on a

(2.46) $$\begin{aligned} N * (\varepsilon - pN_p) * (\mu'_{p,Cv} - \varepsilon) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} N * (\varepsilon - pN_p) * \eta_{p,v} * (\exp(-pt)\alpha_t - \varepsilon) \\ &= \lim_{t \to 0} \Big(\frac{1}{t} N * \eta_{p,v} * (\alpha_t - \varepsilon) - \frac{1}{t}(1 - \exp(-pt)) N * \eta_{p,v} * \alpha_t \\ &\quad + \frac{1}{t} pN * N_p * \eta_{p,v} * (\varepsilon - \exp(-pt)\alpha_t) \Big) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} N * \eta_{p,v} * (\alpha_t - \varepsilon) . \end{aligned}$$

D'après la remarque 21, N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$. La démonstration est ainsi complète.

Considérons la convergence d'une famille filtrante des résolvante.

PROPOSITION 23. *Soient $((N_{p,\alpha})_{p>0})_{\alpha \in A}$ une famille filtrante des résolvantes des noyaux de convolution et N' un noyau de convolution non-zéro. Supposons que,* pour $p > 0$ *et* $\alpha \in A$ *quelconques,* $N' \geqq pN' * N_{p,\alpha}$. *Si, pour* $p_0 > 0$, $(N_{p_0,\alpha})_{\alpha \in A}$ *et* $(N' * N_{p_0,\alpha})_{\alpha \in A}$ *convergent vaguement et si* $\lim_\alpha N' * N_{p_0,\alpha} = N' * \left(\lim_\alpha N_{p_0,\alpha}\right)$, *alors, pour* $p > 0$ *quelconque,* $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ *converge vaguement aussi. Posons* $N_p = \lim_\alpha N_{p,\alpha}$ $(p > 0)$. *Alors* $(N_p)_{p>0}$ *est une résolvante et, pour* $p > 0$ *quelconque,* $(N' * N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ *converge vaguement vers* $N' * N_p$.

Démonstration. Posons $N_{p_0} = \lim_\alpha N_{p_0,\alpha}$. Soit $p > 0$ quelconque. Comme, pour tout $\alpha \in A$, $N' \geqq pN' * N_{p,\alpha}$, $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ est vaguement bornée. Soient N_p et N'_p deux points vaguement adhérents de $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ quelconques. On choisit deux sous-familles filtrantes $(N_{p,\alpha'})_{\alpha' \in A'}$ et $(N_{p,\alpha''})_{\alpha'' \in A''}$ de $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ qui convergent vaguement vers N_p et N'_p, respectivement. Soit $f \in C_K^+$ quelconque. Comme $N_{p,\alpha} \prec N'$ (voir la proposition 10), on peut supposer qu'il existe $g \in C_K^+$ telle que, pour $\alpha \in A$ quelconque, $N_{p,\alpha} * f \leqq N' * g$ sur X. Alors on a

$$(2.47)\qquad \begin{aligned} N_p * N_{p_0} * f(0) &\leqq \varliminf_{\alpha'} N_{p,\alpha'} * N_{p_0,\alpha'} * f(0) \leqq \varlimsup_{\alpha'} N_{p,\alpha'} * N_{p_0,\alpha'} * f(0) \\ &= \varlimsup_{\alpha'} (N' * N_{p_0,\alpha'} * g(0) - N_{p_0,\alpha'} * (N' * g - N_{p,\alpha'} * f)(0)) \\ &\leqq N' * N_{p_0} * g(0) - N_{p_0} * (N' * g - N_p * f)(0) \\ &= N_p * N_{p_0} * f(0) \, . \end{aligned}$$

Comme f est quelconque, $N_p * N_{p_0} = \lim_{\alpha'} N_{p,\alpha'} * N_{p_0,\alpha'}$ (vaguement). De la même manière, on a $N'_p * N_{p_0} = \lim_{\alpha''} N_{p,\alpha''} * N_{p_0,\alpha''}$ (vaguement). Donc

$$(2.48)\qquad N_{p_0} = N_p * (\varepsilon - (p_0 - p) N_{p_0}) = N'_p * (\varepsilon - (p_0 - p) N_{p_0}) \, .$$

Si $|p_0 - p| < p_0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} ((p_0 - p) N_{p_0})^{*n}$ converge vaguement et

$$(2.49)\qquad N_p = N'_p = N_{p_0} * \left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} ((p_0 - p) N_{p_0})^{*n}\right) ,$$

car $N' \geqq p_0 N' * N_{p_0}$. On voit ainsi que, pour $p \in (0, 2p_0)$ quelconque, $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement. On voit encore, par récurrence, que, pour $p > 0$ quelconque, $(N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement. En remarquant (2.47), on voit que $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante. De la même manière, on voit que, pour $p \geqq p_0$ quelconque, $(N' * N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers $N' * N_p$. En remarquant que, pour $\alpha \in A$ et un entier $n \geqq 1$ quelconques, $N' \geqq N' * (p_0 N_{p_0})^{*n}$, on voit, par récurrence, que, pour un entier $n \geqq 1$ quelconque,

$$(2.50)\qquad \lim_{\alpha} N' * (p_0 N_{p_0,\alpha})^{*n} = N' * (p_0 N_{p_0})^{*n} \qquad \text{(vaguement)} \, .$$

Soient $0 < p < p_0$ et $f \in C_K^+$ quelconques. Alors, pour un entier $k \geqq 1$ quelconque,

$$(2.51)\qquad \begin{aligned} \int f dN' * N_p &\leqq \varliminf_{\alpha} \int f dN' * N_{p,\alpha} \leqq \varlimsup_{\alpha} \int f dN' * N_{p,\alpha} \\ &= \varlimsup_{\alpha} \left(\frac{1}{p_0 - p} \int f dN' * \sum_{n=1}^{\infty} ((p_0 - p) N_{p_0,\alpha})^{*n} \right) \\ &\leqq \int f dN' * N_p + \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{p_0 - p}{p_0} \right)^n \int f dN' \, . \end{aligned}$$

On voit ainsi que $(N' * N_{p,\alpha})_{\alpha \in A}$ converge vaguement vers $N' * N_p$. La démonstration est ainsi complète.

Proposition 24. *Soient N un noyau de convolution vérifiant $N \prec N$,*

$N' \neq 0$ un noyau de convolution et $p > 0$ une constante. Si $N' \geqq pN' * N$, $N' \neq pN' * N$ et $N \prec N' * (\varepsilon - pN)$, alors il existe un noyau de convolution N_0 et la résolvante $(N_q)_{q \geqq 0}$ associée à N_0 telle que $N_p = N$. Dans ce cas, N_0 est déterminé d'une manière unique et $N_0 \prec N'$.

Démonstration. Comme $N' \geqq pN' * N$ et $N' \neq pN' * N$, $\sum_{n=1}^{\infty} (pN)^{*n}$ converge vaguement, et donc, en utilisant le lemme de J. Deny, $\bigcap_{v \in \mathscr{V}} P(N; v) = \{0\}$; c'est-à-dire, N est régulier. D'après la remarque 9, il existe la résolvante $(M_q)_{q \geqq 0}$ associée à N. D'après $N \prec N' * (\varepsilon - pN)$, on a, pour tout $q > 0$,

$$qN' * (\varepsilon - pN) * M_q \leqq N' * (\varepsilon - pN) , \tag{2.52}$$

et donc $(p + q)N' * M_q \leqq N'$. Posons, pour $q \in [0, p)$ quelconque, $N_q = \dfrac{1}{p-q} \sum_{n=1}^{\infty} ((p-q)M_0)^{*n}$ et, pour $q \in [p, \infty)$ quelconque, $N_q = M_{q-p}$. Alors, pour $q \geqq 0$ quelconque,

$$N_q - N_p = (p - q)N_p * N_q \quad \text{et} \quad \lim_{q \to 0} N_q = N_0 . \tag{2.53}$$

Donc, pour $q \geqq 0$ et $q' > 0$ quelconques,

$$\begin{aligned} N_q - N_{q'} &= (p - q)(N_{q'} + (q' - p)N_p * N_{q'}) * N_q \\ &\quad - (p - q')(N_q + (q - p)N_p * N_q) * N_{q'} \\ &= (q' - q)N_q * N_{q'} . \end{aligned} \tag{2.54}$$

D'après (2.53) et (2.54), $(N_q)_{q \geqq 0}$ est la résolvante associée à N_0. L'unicité de N_0 est bien connue. On a, pour $q > 0$, $N' \geqq qN' * N_q$, et donc la proposition 10 donne que, pour $q > 0$ quelconque, $N_q \prec N'$. En faisant $q \downarrow 0$, on arrive à $N_0 \prec N'$. La démonstration est ainsi complète.

§ 3. Le principe de domination relatif et la sous-médianne conditionnelle

Dans ce paragraphe, on supposera toujours qu'il n'existe aucun sous-groupe compact de X excepté $\{0\}$.

LEMME 25. *Soit $(N_p)_{p>0}$ une résolvante des noyaux de convolution $\neq 0$. Alors il existe le semi-groupe vaguement continu associé à $(N_p)_{p>0}$.*

Démonstration. Pour $p > 0$ et $v \in \mathscr{V}$, on désigne par $\mu'_{p,Cv}$ une mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p. Comme, pour $0 < q < p$, on a

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$N_q \geqq N_q * \mu'_{p,Cv}$, le lemme de J. Deny donne que $\lim_{v \uparrow X} N_p * \mu'_{p,Cv} = 0$ (vaguement). Donc il existe $v \in \mathscr{V}$ tel que $N_p \neq N_p * \mu'_{p,Cv}$. D'après $N_p \prec N_p$, $\mathrm{supp}\,(N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}) \ni 0$. Soit Γ l'ensemble des périodes de N_p; alors Γ est un sous-groupe fermé de X. Comme tout le point de Γ est aussi une période de $N_p - N_p * \mu'_{p,Cv}$, on a $\Gamma \subset v$. En vertu de notre hypothèse pour X, on a $\Gamma = \{0\}$. Donc la proposition 13 donne le présent lemme.

Montrons le premier théorème principal.

THÉORÈME 26. *Soient N un noyau de convolution et N' un noyau de convolution $\neq 0$. Supposons que N est régulier par rapport à N'. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(a) *N vérifie le principe de domination relatif à N'.*

(b) *$N = O(N')$ et il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t > 0)$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ et que, pour $t \geqq 0$ quelconque, $N' \geqq N' * \alpha_t$.*

Démonstration. (b) $\Rightarrow$ (a): On peut supposer que $N \neq 0$. Comme N est régulier par rapport à $N', N' \neq 0$. Posons, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$; alors, $N' \geqq pN' * N_p$. Montrons que $\lim_{p \to 0} pN_p = 0$ (vaguement). Supposons contrairement que cette égalité n'a pas lieu. Alors, d'après la proposition 11 et notre hypothèse pour X, $\lim_{p \to 0} pN_p = \varepsilon$ (vaguement) et, pour tout $p > 0$, $\mathrm{supp}\,(N_p) \subset \{0\}$, et donc $\mathrm{supp}\,(\alpha_t) \subset \{0\}$. Comme $N' \geqq N' * \alpha_t$ et $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t > 0)$, il existe une constante $a > 0$ telle que $\alpha_t = \exp(-at)\varepsilon$. Alors $\lim_{p \to 0} pN_p = \lim_{p \to 0} \dfrac{p}{p + a} = 0$, d'où une contradiction. On obtient ainsi que $\lim_{p \to 0} pN_p = 0$ (vaguement). D'après le lemme 17, on a aussi $\lim_{p \to 0} N * (pN_p) = 0$ (vaguement). Pour montrer que $N \prec N'$, il suffit de montrer que, pour $f, g \in C_K^+$ quelconques,

$$N * f < N' * g \text{ sur } \mathrm{supp}\,(f) \Rightarrow N * f \leqq N' * g \text{ sur } X. \tag{3.1}$$

On choisit $v_0 \in \mathscr{V}$ tel que, pour une mesure de Radon positive ν portée par v_0 de masse totale d'unité quelconque,

$$N * \nu * f(x) < N' * g(x) \text{ sur } \mathrm{supp}\,(f) + v_0\,, \tag{3.2}$$

où $\mathrm{supp}\,(f) + v_0 = \{x + y; x \in \mathrm{supp}\,(f), y \in v_0\}$. Pour $v \in \mathscr{V}$, on désigne par $\mu'_{p,Cv}$ la mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p. Posons

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$\mu'_{Cv} = \lim_{p\to 0} \mu'_{p,Cv}$ et $\eta_v = \lim_{p\to 0} (N_p - N_p * \mu'_{p,Cv})$ (voir la proposition 15). D'après la proposition 15, on a $\eta_v \neq 0$. D'après la proposition 10, on a $N_p \prec N'$. En utilisant la proposition 2, on voit qu'il existe $h_p \in C_K^+$ vérifiant $N_p * h_p = N' * g$ sur $\operatorname{supp}(f) + v_0$ et $N_p * h_p \leqq N' * g$ sur X. Pour $p > 0$ et $v \in \mathscr{V}$ vérifiant $v \subset v_0$ quelconques, on pose

$$\lambda_{v,1} = \frac{1}{\int d\eta_v}(N - N * \mu'_{Cv})^+ \quad \text{et} \quad \lambda_{v,2} = \frac{1}{\int d\eta_v}(N - N * \mu'_{Cv})^- .$$

Alors, d'après la proposition 19, on a $\operatorname{supp}(\lambda_{v,1}) \subset v$. D'après la proposition 15, on a

$$\begin{aligned} N_p * \lambda_{v,1} * f - N_p * \lambda_{v,2} * f \\ = \frac{1}{\int d\eta_v} N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) * f < N_p * h_p \\ \text{sur } \operatorname{supp}(f) + v_0 \supset \operatorname{supp}(f * \lambda_{p,v,1}) . \end{aligned} \tag{3.3}$$

En utilisant $N_p \prec N_p$, on a

$$\frac{1}{\int d\eta_v} N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) * f \leqq N_p * h_p \leqq N' * g \text{ sur } X . \tag{3.4}$$

En faisant $v \downarrow \{0\}$ et ensuite $p \to 0$, on arrive à $N * f \leqq N' * g$ sur X, d'où (3.1). On voit ainsi que (b) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b): D'après la proposition 18, il suffit de montrer (a) $\Rightarrow$ (b) dans le cas où $N(\{0\}) = 0$. Soit a une constante >0 quelconque. On remarque que $S(N + a\varepsilon) \subset S(N)$ et que $N + a\varepsilon$ est régulier par rapport à N'. Soit μ''_a une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ relativement à $(N + a\varepsilon, N')$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$. D'après le corollaire 4 et la proposition 18, il existe deux semi-groupes vaguement continus $(\alpha_{a,t})_{t\geqq 0}$ et $(\beta_{a,t})_{t\geqq 0}$ tels que l'on ait:

$$\alpha_{a,t} = \exp(-t)\left(\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n (\mu''_a)^n}{n!}\right) . \tag{3.5}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\beta_{a,t} - \varepsilon) = (N + a\varepsilon) * (\mu''_a - \varepsilon) \text{ (vaguement)} . \tag{3.6}$$

On a, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N' * \alpha_{a,t}$. Soient $\varphi \neq 0 \in C_K^+$ quelconque fixée et $x_0 \in X$ vérifiant $\varphi(x_0) > 0$ fixé. Posons, pour toute $c > 0$,

$g_c = \left(\int_0^\infty \exp(-t)\alpha_{a,ct}dt\right) * \varphi$. Alors $(g_c)_{c>0}$ converge uniformément vers φ sur tout compact lorsque $c \to 0$ et vers 0 sur tout compact lorsque $c \to \infty$, car

$$g_c = \left(\frac{1}{c}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{c}t\right)\alpha_{a,t}dt\right) * \varphi , \tag{3.7}$$

$\left(\int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_{a,t}dt\right)_{p>0}$ est une résolvante et $\operatorname{supp}(\alpha_t)$ n'est pas compact dès que $\mu_a'' \neq 0$ $(t > 0)$. Il existe donc une constante $c_a > 0$ telle que $g_{c_a}(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$. Pour tout $p > 0$, on pose $N_{p,a} = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_{a,c_a t}dt$. Alors $(N_{p,a})_{p>0}$ est une résolvante et, pour $p > 0$ quelconque, $N' \geqq pN' * N_{p,a}$. Donc, pour $p > 0$ quelconque, $(N_{p,a})_{a>0}$ est vaguement bornée. On peut supposer que $(N_{1,a})_{a>0}$ converge vaguement lorsque $a \to 0$. Posons $N_1 = \lim_{a\to 0} N_{1,a}$. Alors $N_1 * \varphi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$, et donc $N_1 \neq 0$. On a aussi $N_1 \prec N_1$ et $N' \geqq N' * N_1$. Comme $N_{1,a} \prec N'$ et $N_{1,a} \prec N' * (\varepsilon - N_{1,a})$, on a $N_1 \prec N'$ et, pour $f \in C_K^+$ vérifiant $f \leqq 1$ quelconque, $N_1 \prec N' * (\varepsilon - fN_1)$. En faisant $f \uparrow 1$, on a $N_1 \prec N' * (\varepsilon - N_1)$. Montrons qu'il existe une résolvante $(M_p)_{p>0}$ des noyaux de convolution $\neq 0$ vérifiant $M_1 = N_1$. Supposons d'abord que $N' = N' * N_1$. Alors $N' * N_1 = \lim_{a\to 0} N' * N_{1,a}$ (vaguement). D'après la proposition 23, on voit que, pour $p > 0$ quelconque, $(N_{p,a})_{a>0}$ converge vaguement lorsque $a \to 0$ et que, en posant $N_p = \lim_{a\to 0} N_{p,a}$, $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante. On a aussi $N' = pN' * N_p$, et donc $N_p \neq 0$. Par conséquent $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante demandée. Supposons ensuite que $N' \neq N' * N_1$. Alors, d'après la proposition 24, il existe une résolvante $(M_p)_{p>0}$ des noyaux de convolution $\neq 0$, et une seule telle que $M_1 = N_1$. Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à $(M_p)_{p>0}$. Comme $N_1 * \varphi(x_0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$, $N_1 \neq \varepsilon$, et donc, pour tout $t > 0$, $\alpha_t \neq \varepsilon$. Montrons finalement que N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Soit ω un ouvert relativement compact dans X quelconque. On choisit une famille filtrante à droite $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ des ouverts telle que $\bar{\omega}_\alpha \subset \omega$ et $\bigcup_{\alpha\in A} \omega_\alpha = \omega$. Pour $a > 0$, on désigne par $\mu'_{\omega_\alpha,a}$ la mesure balayée de ε sur ω_α relativement à $N_{1,a}$. Comme $N_{1,a} \prec N'$, $N' \geqq N' * \mu'_{\omega_\alpha,a}$, et donc $(\mu'_{\omega_\alpha,a})_{a>0}$ est vaguement bornée. On a

$$\begin{aligned}(N + a\varepsilon) * (\varepsilon - N_{1,a}) * (\mu'_{\omega_\alpha,a} - \varepsilon) \\ = c_a(N + a\varepsilon) * (\varepsilon - \mu_a'') * N_{1,a} * (\mu'_{\omega_\alpha,a} - \varepsilon) \geqq 0 \text{ dans } \omega_\alpha .\end{aligned} \tag{3.8}$$

Soit μ'_{ω_α} un point vaguement adhérent de $(\mu'_{\omega_\alpha,a})_{a>0}$ lorsque $a \downarrow 0$. D'après le lemme 17 et (3.8), on a

$$(3.9)\qquad N*(\varepsilon - N_1)*(\mu'_{\omega_\alpha} - \varepsilon) \geqq 0 \text{ dans } \omega_\alpha .$$

On a aussi $\operatorname{supp}(\mu'_{\omega_\alpha}) \subset \bar{\omega}_\alpha$, $N_1 * \mu'_{\omega_\alpha} \leqq N_1$ dans X et $N_1 * \mu'_{\omega_\alpha} = N_1$ dans ω_α. Soit μ'_ω la mesure balayée de ε sur ω relativement à N_1. Alors μ'_ω est un point vaguement adhérent de $(\mu'_{\omega_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ lorsque $\omega_\alpha \uparrow \omega$, et donc

$$(3.10)\qquad N*(\varepsilon - N_1)*(\mu'_\omega - \varepsilon) \geqq 0 \text{ dans } \omega .$$

D'après la proposition 22, N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq0}$. Comme, pour tout $p>0$, $N' \geqq pN' * M_p$, on a, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N' * \alpha_t$. On voit ainsi (a) $\Rightarrow$ (b). La démonstration est complète.

En particulier, on aura corollaire suivant:

Corollaire 27. *Soit N un noyau de convolution régulier par rapport à ξ. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents*:

(a) *N vérifie le principe classique du maximum; c'est-à-dire, $N \prec \xi$.*

(b) *N est borné*[5] *et il existe un semi-groupe vaguement continu sous-markovien $(\alpha_t)_{t\geqq0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t>0)$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport* à $(\alpha_t)_{t\geqq0}$.

On dit que $(\alpha_t)_{t\geqq0}$ est sous-markovien si, pour tout $t \geqq 0$, $\int d\alpha_t \leqq 1$.

En regardant la démonstration du théorème 26, on verra la remarque suivante:

Remarque 28. Soit N un noyau de convolution. Supposons qu'il existe $N' \neq 0 \in S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N'. Alors il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t>0)$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq0}$ et que, pour $N'' \in S(N)$ et $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconques, $N'' \geqq N'' * \alpha_t$.

Rappelons la démonstration du théorème 26. Soit a une constante >0 quelconque. Soient μ''_a une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N+a\varepsilon)$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$ et $(\alpha_{a,t})_{t\geqq0}$, $(\beta_{a,t})_{t\geqq0}$ les deux semi-groupes vaguement continus définis par μ''_a de la même manière que dans le théorème 26. En faisant la même discussion comme dans

(5) Cela signifie que, pour $f \in C_K$ quelconque, $N*f$ est bornée sur X.

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

le théorème 26 concernant la famille $((\alpha_{a,t})_{t\geqq 0})_{a>0}$ des semi-groupes vaguement continus, on voit facilement qu'il existe un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ demandé.

QUESTION 29. Est-ce que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ dans la remarque 28 est toujours unique excepté la multiplication constante?

Soient $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ deux semi-groupes vaguement continus. On dit que $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ est un multiple constant de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ si, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $\beta_t = \alpha_{ct}$, où c est une constante >0 indépendante de t.

Dans le thérème 26, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ n'est pas toujours unique excepté la multiplication constante. Par exemple, considérer les noyaux de Riesz-Frostman dans $\boldsymbol{R}^n$.

Le théorème suivant indique que le principe classique du maximum et le principe de domination relatif au noyau de convolution de Hunt sont essentiels.

THÉORÈME 30. *Soit N un noyau de convolution vérifiant $S(N) \neq \emptyset$ et $S(N) \neq \{0\}$. Supposons que le sous-groupe fermé engendré par* supp (N) *est égal à X et qu'il existe $N' \neq 0 \in S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N. Alors on a* (a) *ou bien* (b).

(a) *Il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X telle que $S(N) = \{a\varphi\xi\,;\, a \in \boldsymbol{R}^+\}$.*

(b) *Il existe un noyau de convolution de Hunt N_0 tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 et que*

$$(3.11) \qquad S(N) = \{N_0 * \lambda + \eta\,;\, \lambda \in D^+(N_0),\ \eta \text{ est } \geqq 0 \text{ et } N_0\text{-harmonique}\}\,.$$

Dans (b), *N_0 est uniquement déterminé excepté la multiplication constante.*

On dit qu'une fonction finie et continue φ est exponentielle si, pour $x, y \in X$ quelconques, $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$. On voit évidemment que $S(N) = \{a\varphi\xi\,;\, a \in \boldsymbol{R}^+\}$ et $S(\varphi^{-1}N) = \{a\xi\,;\, a \in \boldsymbol{R}^+\}$ sont équivalents, où $\varphi^{-1}N$ est le noyau de convolution dont la densité par rapport à N est égale à φ^{-1}.

Une mesure de Radon réelle η est dite N_0-harmonique si, pour tout $t \geqq 0$, $\eta = \eta * \alpha_t$, où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est le semi-groupe vaguement continu associé à N_0. Dans (b), *N_0 est la plus petite majorante de N (voir* [11]).

Démonstration. Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t > 0)$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et que, pour $N'' \in S(N)$ et $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconques, $N'' \geqq N'' * \alpha_t$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

Pour $p > 0$ quelconque, on pose $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$. Alors, pour $N'' \in S(N)$ quelconque, $N'' \geqq pN'' * N_p$.

Supposons d'abord qu'il existe $p_0 > 0$ et $N_0'' \neq 0 \in S(N)$ tels que $N_0'' \neq p_0 N_0'' * N_{p_0}$. Dans ce cas, on montrera que (b) a lieu. D'après la proposition 24, $\sum_{n=1}^{\infty}(p_0 N_{p_0})^{*n}$ converge vaguement. Alors $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ existe et $N_0 = \sum_{n=1}^{\infty} p_0^{n-1}(N_{p_0})^{*n}$. D'après les définitions, N_0 est un noyau de convolution de Hunt et N est conditionnellement sous-médian par rapport à N_0. On a évidemment $N \prec N_0$. D'après la proposition 10, on a, pour $N'' \in S(N)$ et $p > 0$ quelconques, $N_p \prec N''$, et donc $N_0 \prec N''$. Par conséquent, N_0 est la plus petite majorante de N. L'égalité (3.11) et l'unicité de N_0 sont déjà connues (voir la proposition 31 et la remarque 43 dans [11]). On voit que (b) a lieu.

Supposons ensuite que, pour $p > 0$ et $N'' \in S(N)$ quelconques, $N'' = pN'' * N_p$. Dans ce cas, on montrera que (a) a lieu. On remarque que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, $\operatorname{supp}(N_p) = \operatorname{supp}(N_q)$ et que $\operatorname{supp}(N) \ni 0$. Montrons que, pour $p > 0$, $\operatorname{supp}(N) \subset \operatorname{supp}(N_p)$. Supposons contrairement que cette inclusion n'a pas lieu. Alors il existe deux fonctions $f \neq 0$ et $g \neq 0 \in C_K^+$ et $y \in X$ tels que $\operatorname{supp}(f) \subset \{x \in X; g(x) > 0\}$, $N*f(y) > 0$ et que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p * g(y) = 0$. Comme $\lim_{p \to 0} pN * N_p = 0$ (vaguement), il existe $p_0 > 0$ tel que $N*(\varepsilon - p_0 N_{p_0})*f(y) > 0$. Comme $\operatorname{supp}(N_{p_0}) \ni 0$, il existe une constante $a > 0$ telle que

$$N*(\varepsilon - p_0 N_{p_0})*f \leqq aN_{p_0}*g \text{ sur } \operatorname{supp}(f)\,. \tag{3.12}$$

De la même manière que dans le théorème 26 ((b)$\Rightarrow$(a)), on a $N*(\varepsilon - p_0 N_{p_0})*f \leqq aN_{p_0}*g$ sur X, d'où une contradiction. Par conséquent, $\operatorname{supp}(N) \subset \operatorname{supp}(N_p)$ $(p > 0)$, et donc le sous-groupe fermé engendré par $\operatorname{supp}(N_p)$ est égal à X. Remarquons que, pour $N'' \in S(N)$ quelconque, $N'' = N'' * N_1$. En utilisant le théorème 2 dans [3], on voit qu'il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X telle que

$$\varphi(x) = \varphi * N_1(x) = \left(\int \frac{1}{\varphi} dN_1\right)\varphi(x) \text{ sur } X\,, \tag{3.13}$$

car $\{M$: noyau de convolution; $M = M*N_1\}$ est vaguement fermé. Donc $\int \varphi^{-1} dN_1 = 1$. Comme φ^{-1} est aussi exponentielle, on voit que $(\varphi^{-1}N_p)_{p>0}$ est aussi une résolvante, et pour $p > 0$ quelconque, $p\int \varphi^{-1} dN_p = 1$. On voit facilement que $S(\varphi^{-1}N) = \{\varphi^{-1}N''; N'' \in S(N)\}$. D'après la proposition 10 et (3.13), on a, pour tout $p > 0$, $\varphi\xi \in S(N_p)$. De la même manière que dans le théorème 26 ((b) $\Rightarrow$ (a)), on a $\varphi\xi \in S(N)$, et donc $S(\varphi^{-1}N) \ni \xi$. Supposons que $S(N) \neq \{a\varphi\xi; a \in \boldsymbol{R}^+\}$. Comme supp $(N) \ni 0$, $0 \in S(N)$. Donc il existe $N'' \neq 0 \in S(\varphi^{-1}N)$ tel que, pour tout $a > 0$, $N'' \neq a\xi$. Alors il existe $f \neq 0 \in C_K^+$ telle que, $\min(N''*f, 1)$ ne soit pas une constante. Comme, pour $p > 0$ quelconque,

$$\min(N''*f, 1) \geqq (\min(N''*f, 1))*(p\varphi^{-1}N_p) , \tag{3.14}$$

on a $(\min(N''*f, 1))\xi \in S(\varphi^{-1}N)$, et donc $(\min(N''*f, 1))\varphi\xi \in S(N)$. D'après notre hypothèse, on a, pour $p > 0$ quelconque,

$$(\min(N''*f, 1))*(p\varphi^{-1}N_p) = \min(N''*f, 1) . \tag{3.15}$$

En utilisant le théorème 1 dans [3], on voit que $\min(N''*f, 1)$ est une constante sur le sous-groupe fermé engendré par supp $(\varphi^{-1}N_p)$; c'est-à-dire, $\min(N''*f, 1)$ est une constante. Cela est une contradiction. On voit ainsi que (a) a lieu. La démonstration est complète.

Dans le présent théorème, il est très naturel de supposer que le sous-groupe fermé X' engendré par supp (N) est égal à X, car, en général, il suffit de considérer la restreinte de N sur X' au lieu de N.

Remarque 31. Soient N et N' les mêmes que dans le théorème 30. Supposons qu'il existe un noyau de convolution $\neq 0$ non-proportionel à N' dans $S(N)$. Alors le semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ obtenu dans la remarque 28 est uniquement déterminé excepte la multiplication constante (cf. la question 29).

Cela est un résultat immédiat de l'unicité de la plus petite majorante de N (excepté la multiplication constante).

Le théorème 30 donne immédiatement le corollaire suivant:

COROLLAIRE 32. *Soient N, N' les mêmes que dans le théorème* 30 *et $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ un semi-groupe vaguement continu obtenu dans la remarque* 28. *Alors il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X telle que $(\varphi^{-1}\alpha_t)_{t \geqq 0}$ soit un semi-groupe vaguement continu et markovien*[6], *ou bien $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ a un sens.*

(6) On dit qu'un semi-groupe vaguement continu $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ est markovien si, pour tout $t > 0$, $\int d\alpha_t = 1$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On peut supposer que $N \neq 0$. Soit X' le sous-groupe fermé engendré par supp (N). Alors, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, supp $(\alpha_t) \subset X'$. Supposons que $\int_0^\infty \alpha_t dt$ n'a pas un sens. Comme toute la fonction exponentielle >0 sur X' peut être prolongée en une fonction exponentielle >0 sur X, le théorème 30 donne qu'il existe une fonction exponentielle $\varphi(x) > 0$ sur X tel que $S(N) \supset \{a\varphi\xi; a \in \boldsymbol{R}^+\}$. Comme $\varphi \geqq \varphi * \alpha_t$, $(\varphi^{-1}\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien. Posons, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$; alors $\varphi = \varphi * (pN_p)$, et donc, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $\int \varphi^{-1} d\alpha_t = 1$, d'où le corollaire 32.

On aura aussi le corollaire suivant:

Corollaire 33. *Soit N un noyau de convolution régulier par rapport à ξ. Supposons que le sous-groupe fermé engendré par* supp (N) *est égal à X. Si N vérifie le principe classique du maximum, alors on a* (a) *ou bien* (b).

(a) $S(N) = \{a\xi; a \in \boldsymbol{R}^+\}$.

(b) *Il existe un noyau de convolution de Hunt sous-markovien N_0*(7) *tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à N_0 et que*

$$S(N) = \overline{\{N_0 * \lambda + a\xi; \lambda \in D^+(N_0), a \in \boldsymbol{R}^+\}}\,, \tag{3.16}$$

où l'adhérence est au sens de la topologie vague.

Démonstration. Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu obtenu dans la remarque 28. Comme $S(N) \ni \xi$, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ est sous-markovien. Supposons que (a) n'a pas lieu. Alors, d'après le théorème 30, $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$ a un sens. Soit $N' \in S(N)$ quelconque. Pour $f \neq 0 \in C_K^+$ et $a \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $(\min(N' * f, a))\xi \in S(N)$. D'après le théorème 30, il existe $\lambda_{f,a} \in D^+(N_0)$ et une mesure de Radon positive et N_0-harmonique $\eta_{f,a}$ telles que

$$(\min(N' * f, a))\xi = N_0 * \lambda_{f,a} + \eta_{f,a}\,. \tag{3.17}$$

On remarque ici que, pour tout $t \geqq 0$, $\int d\alpha_t = 1$ ou bien que, pour tout

(7) On dit qu'un noyau de convolution de Hunt est sous-markovien si le semi-groupe associé est sous-markovien.

$t > 0$, $\int d\alpha_t < 1$. Si, pour $t > 0$, $\int d\alpha_t < 1$, alors $\eta_{f,a} = 0$. Supposons $\int d\alpha_t = 1$. D'après le théorème 1 dans [3], tout le point du sous-groupe fermé engendré par supp (N_0) est une période de $\eta_{f,a}$, car $\eta_{f,a}$ est borneé. Comme le sous-groupe fermé engendré par supp (N_0) est égal à X, $\eta_{f,a}$ est proportionnelle à ξ. Ceux-ci donnent que (b) a lieu. La démonstration est ainsi complète.

En généralisant partiellement le théorème 2 dans [10], on obtiendra le théorème suivant:

THÉORÈME 34. *Soit N un noyau de convolution et supposons qu'il existe $N' \neq 0 \in S(N)$ tel que N soit régulier par rapport à N'. Alors il existe deux semi-groupes vaguement continus $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geqq 0}$ tels que, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N' * \alpha_t$ et $N' \geqq N' * \beta_t$, pour $t > 0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$ et que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,*

$$(N * (\varepsilon - pN_p) + qN_p) * N'_q = N_p \,, \tag{3.18}$$

où $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ *et où* $N'_q = \int_0^\infty \exp(-qt)\beta_t dt$.

Démonstration. On peut supposer que $N \neq 0$, car si $N = 0$, alors, en posant $\alpha_t = \exp(-t)\varepsilon$ et $\beta_t = \varepsilon$, $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geqq 0}$ sont les deux semi-groupes vaguement continus demandés. Soit a une constante >0 quelconque. Soit μ''_a une mesure balayée transitivement de ε sur $C\{0\}$ par rapport à $S(N + a\varepsilon)$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$. On note $(\alpha_{a,t})_{t \geqq 0}$ et $(\beta_{a,t})_{t \geqq 0}$ les deux semi-groupes vaguement continus définis par μ''_a de la même manière que dans le théorème 26. Soit c_a une constante >0 définie dans la démonstration du théorème 26. Posons, pour $p > 0$ quelconques, $N_{p,a} = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_{a,c_a t} dt$ et $N'_{p,a} = \int_0^\infty \exp(-pt)\beta_{a,c_a t} dt$. Alors, pour $p > 0$ quelconque, $N' \geqq N' * (pN_{p,a})$ et $N' \geqq N' * (pN'_{p,a})$, d'après la proposition 16. Pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, on a

$$c_a(\varepsilon - \mu''_a) * N_{p,a} = \varepsilon - pN_{p,a} \text{ et } c_a(N + a\varepsilon) * (\varepsilon - \mu''_a) * N'_{q,a} = \varepsilon - qN'_{q,a} \,, \tag{3.19}$$

et donc

$$((N + a\varepsilon) * (\varepsilon - pN_{p,a}) + qN_{p,a}) * N'_{q,a} = N_{p,a} \,. \tag{3.20}$$

De la même manière que dans le théorème 26, on peut supposer que

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$(N_{1,a})_{a>0}$ converge vaguement vers un noyau de convolution N_1 sur X lorsque $a \to 0$.

Supposons d'abord que $N' = N' * N_1$. De la même manière que dans le théorème 26, on voit que, pour $p > 0$ quelconque, $N_p = \lim_{a\to 0} N_{p,a} \neq 0$ (vaguement) existe, $(N_p)_{p>0}$ est une résolvante et que $N' = N' * (pN_p) = \lim_{a\to 0} N' * (pN_{p,a})$ (vaguement). Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à $(N_p)_{p>0}$. Alors on voit aussi que, pour $t > 0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$ et que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Pour $q > 0$ quelconque, on désigne par N'_q un point vaguement adhérent de $(N'_{q,a})_{a>0}$ lorsque $a \to 0$ et on choisit une famille filtrante à gauche $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ des nombres >0 telle que $\lim_\alpha a_\alpha = 0$ et que $N'_q = \lim_\alpha N'_{q,a_\alpha}$ (vaguement). De la même manière que dans la proposition 23, on voit que, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$\lim_\alpha N_{p,a_\alpha} * N'_{q,a_\alpha} = N_p * N'_q \qquad \text{(vaguement)}\,. \tag{3.21}$$

En utilisant le lemme 17 et (3.20), on a

$$(N * (\varepsilon - pN_p) + qN_p) * N'_q = N_p \qquad (p > 0, q > 0)\,. \tag{3.22}$$

On a, en même temps, $N'_q \neq 0$. Pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques, on a

$$\begin{aligned} N_1 * N'_p &= (N * (\varepsilon - N_1) + qN_1) * N'_q * N'_p \\ &= (N * (\varepsilon - N_1) + pN_1) * N'_q * N'_p + (q - p) N_1 * N'_q * N'_p \\ &= N_1 * (N'_q + (q-p) N'_p * N'_q)\,, \end{aligned} \tag{3.23}$$

et donc l'injectivité de N_1 donne que $N'_p - N'_q = (q-p) N'_p * N'_q$. Ceci donne que, pour $p > 0$ quelconque, $N'_p = \lim_{a\to 0} N'_{p,a}$ (vaguement) existe et que $(N'_p)_{p>0}$ est une résolvante. Soit $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à $(N'_p)_{p>0}$. Comme $N' \geqq pN' * N'_p$ $(p > 0)$, on a, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N' * \beta_t$. On voit ainsi que $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ sont deux semi-groupes vaguement continus demandés.

Supposons que $N' \neq N' * N_1$. En regardant la proposition 24 et le théorème 26, on voit qu'il existe un noyau de convolution de Hunt $N_0 = \int_0^\infty \alpha_t dt$, et un seul tel que $N_1 = \int_0^\infty \exp(-t) \alpha_t dt$ et que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à N_0. On a aussi $N \prec N_0$ (voir (3.3) et (3.4)), et donc $N = O(N_0)$. D'après le théorème 2 dans [10] (ou bien le théorème 32 dans [11]), il existe un noyau de convolution de Hunt

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$N' = \int_0^\infty \beta_t dt$, et un seul tel que

$$N * N' = N_0 \,. \tag{3.24}$$

Soient $(N_p)_{p>0}$ la résolvante associée à N_0 et $(N'_p)_{p>0}$ la résolvante associée à N'. En utilisant l'équation résolvante, on voit que (3.24) donne (3.18), d'où $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ sont deux semi-groupes vaguement continus demandés. La démonstration est ainsi complète.

COROLLAIRE 35. *Soient N, N', $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ les mêmes que dans le théorème* 34. *Alors il existe la mesure singulière β associée à $(\beta_t)_{t\geqq 0}$*(8) *et, pour $f \in C_K^+(C\{0\}) \cap \mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ quelconque,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*f(0) = \int \check{f} d\beta \,. \tag{3.25}$$

Démonstration. Comme, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $N' \geqq N' * \beta_t$, la proposition 15 et (2.40) donnent qu'il existe la mesure singulière β associée à $(\beta_t)_{t\geqq 0}$. Soit α' la mesure de Radon positive en dehors de l'origine telle que, pour $f \in C_K^+(C\{0\}) \cap \mathscr{D}^+\left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)\right)$ quelconque,

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*f(0) = \int \check{f} d\alpha' \,.$$

Soient N_p et N'_p les mêmes que dans le théorème 34. Soit $v \in \mathscr{V}$ quelconque. Soient $\mu^{(1)}_{Cv,p}$ et $\mu^{(2)}_{Cv,p}$ la mesure balayée de ε sur Cv relativement à N_p et celle relativement à N'_p, respectivement. Posons $\mu^{(j)}_{Cv} = \lim_{p\to 0} \mu^{(j)}_{Cv,p}$ $(j = 1, 2)$, $\eta_v = \lim_{p\to 0} (N_p - N_p * \mu^{(1)}_{Cv,p})$ et $\eta'_v = \lim_{p\to 0} (N'_p - N'_p * \mu^{(2)}_{Cv,p})$ (voir la proposition 15). On a $\eta_v \neq 0$ et $\eta'_v \neq 0$. D'après (3.18), on a, pour $p > 0$ et $q > 0$ quelconques,

$$\begin{aligned}(N*(\varepsilon - pN_p)*(\varepsilon - \mu^{(1)}_{Cv,p}) + q(N_p - N_p*\mu^{(1)}_{Cv,p}))*(N_q - N_q*\mu^{(2)}_{Cv,q}) \\ = (N_p - N_p*\mu^{(1)}_{Cv,p})*(\varepsilon - \mu^{(2)}_{Cv,q}) \,.\end{aligned} \tag{3.26}$$

On a $\lim_{p\to 0} pN_p = 0$ (vaguement) et $N' \geqq N' * \mu^{(j)}_{Cv,p}$ $(p > 0)$. En faisant $p \downarrow 0$ et ensuite $q \downarrow 0$ dans (3.26), on a, d'après le lemme 17,

$$N*(\varepsilon - \mu^{(1)}_{Cv})*\eta'_v = \eta_v*(\varepsilon - \mu^{(2)}_{Cv}) \,. \tag{3.27}$$

(8) Lorsque β_t/t converge vaguement dans $C\{0\}$ lorsque $t \downarrow 0$, sa limite en dehors de $\{0\}$ s'appelle la mesure singulière associée à $(\beta_t)_{t\geqq 0}$.

Ceci donne que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(N*\alpha_t - N)*(\eta_v*\eta_v') = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\beta_t - \varepsilon)*(\eta_v*\eta_v') \tag{3.28}$$

(vaguement) (voir (2.40) et (2.41)). Donc, pour $f\in C_K^+(C\{0\})$ vérifiant $\operatorname{supp}(f*\eta_v*\eta_v')\subset C\{0\}$ quelconque,

$$\int \widecheck{f*\eta_v*\eta_v'}\,d\beta = \int \widecheck{f*\eta_v*\eta_v'}\,d\sigma' . \tag{3.29}$$

Comme v est quelconque, $\beta = \alpha'$. La démonstration est ainsi complète.

Soit $\hat{X}$ le groupe dual de X. On dit qu'une fonction complexe et continue ψ sur $\hat{X}$ est définie-négative si $\psi(\hat{0}) \geqq 0$ ($\hat{0}$ est l'origine de $\hat{X}$) et si, pour un entier $n\geqq 1$, $(\hat{x}_j)_{j=1}^n \subset \hat{X}$ et $(c_j)_{j=1}^n$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{j=1}^n c_j = 0$ quelconques,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(\hat{x}_j - \hat{x}_k)c_j\bar{c}_k \leqq 0 \tag{3.30}$$

(cf., par exemple, [1] et [6]). Si ψ est à valeurs réelles, alors $\psi \geqq 0$. On connaît bien que, pour un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ sur X (resp. une fonction définie-négative ψ sur $\hat{X}$), il existe une fonction définie-négative ψ sur $\hat{X}$ (resp. un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ sur X), et une seule telle que, pour $t\in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, $\hat{\alpha}_t = \exp(-t\psi)$, où la signe $\wedge$ désigne la transformation de Fourier (cf., par exemple, [6]). Dans ce cas, ψ (resp. $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$) s'appelle la fonction définie-négative associée à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ (resp. le semi-groupe vaguement continu associé à ψ).

Comme une application du théorème 34, on montrera complètement le théorème principal dans [7].

THÉORÈME 36. *Soit N un noyau de convolution symétrique (par rapport à l'origine) et régulier par rapport à ξ. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(a) *N vérifie le principe classique du maximum.*

(b) *Il existe deux fonctions définie-négatives ψ_1 et ψ_2 à valeurs réelles telles que $\frac{\psi_2}{\psi_1}$ soit localement sommable et que*

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$$\hat{N} = \frac{\psi_2}{\psi_1}\hat{\xi}\,, \tag{3.31}$$

où $\hat{\xi}$ est la mesure de Haar sur $\hat{X}$ associée à ξ.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b): D'après le théorème 34, il existe deux semi-groupes vaguement continus et sous-markoviens $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t \geqq 0}$ tels que, en posant $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ $(p > 0)$ et $N'_q = \int_0^\infty \exp(-qt)\beta_t dt$ $(q > 0)$, (3.18) ait lieu. On peut supposer que, pour $a > 0$ quelconque, une mesure balayée transitivement μ''_a de ε sur $C\{0\}$ relativement à $(N + a\varepsilon, \xi)$ vérifiant $\mu''_a(\{0\}) = 0$ est symétrique par rapport à l'origine. On peut supposer donc que, pour $t \in \boldsymbol{R}^+$ quelconque, α_t et β_t sont symétrique par rapport à l'origine. Soient ψ_1 et ψ_2 la fonction définie-négative associée à $(\alpha_t)_{t \geqq 0}$ et celle associée à $(\beta_t)_{t \geqq 0}$, respectivement. Alors ψ_j $(j = 1, 2)$ est à valeurs réelles, et donc $\psi_j \geqq 0$. Pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, on désigne par μ'_{Cv} la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$. Soit η_v la mesure de Radon positive portée par v telle que, pour $p > 0$ quelconque, (2.22) ait lieu; alors $\eta_v \neq 0$. Montrons que la variation totale $|N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p)|$ de $N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p)$ est de masse totale finie. D'après (2.22), on a

$$N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) = N * N_p * (\varepsilon - \mu'_{Cv})\,, \tag{3.32}$$

et donc, (3.18) donne que, pour $q > 0$ quelconque,

$$(N_p * (N - N * \mu'_{Cv}) + qN_p * \eta_v) * N'_q = N_p * \eta_v\,. \tag{3.33}$$

D'après la proposition 19, $\operatorname{supp}((N - N * \mu'_{Cv})^+) \subset v$. Comme $\int dN_p \leqq \frac{1}{p}$, $(N_p * (N - N * \mu'_{Cv}) + pN_p * \eta_v)^+$ est de masse totale finie. Comme $N'_q \sqsubset \xi$, on a

$$\int d(N_p * (N - N * \mu'_{Cv}) + qN_p * \eta_v) \geqq 0\,, \tag{3.34}$$

et donc $|N - N * \mu'_{Cv}|$ est de masse totale finie et $\int d(N - N * \mu'_{Cv}) + q\int d\eta_v \geqq 0$. En faisant $q \downarrow 0$, on arrive à $\int d(N - N * \mu'_{Cv}) \geqq 0$. En utilisant (3.32), on voit que $|N * \eta_v * (\varepsilon - pN_p)|$ est de masse totale finie et que $\int dN * \eta_v * (\varepsilon - pN_p) \geqq 0$. Posons $\sigma_v = \dfrac{\eta_v}{\int d\eta_v}$; alors $|N * \sigma_v * \check{\sigma}_v * (\varepsilon - pN_p)|$

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

est aussi de masse totale finie. D'après (3.18), on a

$$\widehat{N*\sigma_v*\check{\sigma}_v*(\varepsilon - pN_p)} = \frac{\psi_2}{p+\psi_1}|\hat{\sigma}_v|^2 . \tag{3.35}$$

Comme $\lim_{p\to 0} N*(pN_p) = 0$ (vaguement), d'après $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t>0)$, et comme v est quelconque, on voit que N est de type positif (au sens des mesures). D'après le théorème de Bochner, $\hat{N}$ a un sens et est une mesure de Radon positive dans $\hat{X}$. Alors, pour $f \in C_K$ quelconque,

$$\int |\hat{f}|^2 d\hat{N} = N*f*\check{f}(0) = \lim_{v\downarrow\{0\}} \lim_{p\downarrow 0} \int |\hat{f}|^2 |\hat{\sigma}_v|^2 \frac{\psi_2}{p+\psi_1} d\hat{\xi} . \tag{3.36}$$

Donc $\dfrac{\psi_2}{\psi_1}$ est définie $\hat{\xi}$-p.p., localement $\hat{\xi}$-sommable et l'on a

$$\int |\hat{f}|^2 d\hat{N} = \int |\hat{f}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_1} d\hat{\xi} . \tag{3.37}$$

On a encore, pour $f, g \in C_K$ quelconques,

$$\int \hat{f}\bar{\hat{g}} d\hat{N} = \int \hat{f}\bar{\hat{g}} \frac{\psi_2}{\psi_1} d\hat{\xi} . \tag{3.38}$$

Ceci donne immédiatement que $\hat{N} = \dfrac{\psi_2}{\psi_1}\hat{\xi}$, d'où (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Soient $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ et $(\beta_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu associé à ψ_1 et celui associé à ψ_2, respectivement. Comme $\psi_1 \neq 0$, on a, pour $t>0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$. Posons, pour $p>0$ quelconque, $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ et $N'_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\beta_t dt$; alors $p\int dN_p \leqq 1$, $p\int dN'_p \leqq 1$ et $\lim_{p\to 0} pN_p = 0$ (vaguement). Comme $f \in C_K$ quelconque,

$$N*f*\check{f}(0) = \int |\hat{f}|^2 \frac{\psi_2}{\psi_1} d\hat{\xi} < \infty , \tag{3.39}$$

$N*f*\check{f}$ s'annule à l'infini. D'après la définition, N s'annule à l'infini. Donc, pour $p>0$ quelconque, $N*N_p$ a un sens et $\lim_{p\to 0} N*(pN_p) = 0$ (vaguement). On a, pour $p>0$ et $q>0$ quelconque,

$$(N*(\varepsilon - pN_p) + qN_p)*N'_q = N_p . \tag{3.40}$$

Pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, on désigne par $\mu'_{Cv,p}$ la mesure balayée de ε sur

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

Cv relativement à N_p. Comme $\lim_{q\to\infty} qN'_q = \varepsilon$ (vaguement), on a

$$(3.41)\qquad \begin{aligned} & N*(\varepsilon - \mu'_{Cv,p})*(\varepsilon - pN_p) + p(N_p - N_p*\mu'_{Cv,p}) \\ &= \lim_{q\to\infty} q(N*(\varepsilon - \mu'_{Cv,p})*(\varepsilon - pN_p) + p(N_p - N_p*\mu'_{Cv,p}))*N'_q \\ &= \lim_{q\to\infty} q(N_p - N_p*\mu'_{Cv,p})*(\varepsilon - (q-p)N'_q) \leqq 0 \text{ dans } Cv\,, \end{aligned}$$

d'après (3.40) et l'équation rèsolvante. Soit μ'_{Cv} la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$. D'après le lemme 17, on a

$$(3.42)\qquad N*(\varepsilon - \mu'_{Cv}) = \lim_{p\to 0} N*(\varepsilon - \mu'_{Cv,p})*(\varepsilon - pN_p) \leqq 0 \text{ dans } Cv\,.$$

D'après la proposition 19, N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$, et donc le théorème 26 donne que $N \prec \xi$, d'où (b) $\Rightarrow$ (a). La démonstration est ainsi complète.

D'après théorème 36, on verra facilement le corollaire suivant:

Corollaire 37. *Soit N un noyau de convolution symétrique et vérifiant le principe classique du maximum. Alors on a:*

(a) *Si N est régulier par rapport à ξ, alors N s'annule à l'infini.*

(b) *Si N est régulier par rapport à ξ, alors N est de type positif.*

On remarque que l'inverse de (a) existe toujours (voir la remarque 5). Dans le théorème 36, la condition de la symétricité de N est inévitable.

§ 4. Les noyaux de convolution vérifiant le principe classique du maximum sur $\boldsymbol{R}^n$

Dans ce paragraphe, on supposera toujours que $X = \boldsymbol{R}^n$. On dit qu'une distribution L est un laplacien généralisé si, pour $\varphi \in \mathscr{D}$ à valeurs réelles quelconques,

$$(4.1)\qquad L(\varphi) \leqq 0$$

dès que $\varphi(0) = \max_{x\in \boldsymbol{R}^n} \varphi(x)$, où $\mathscr{D}$ désigne l'espace vectoriel topologique usuel des fonctions infiniment dérivables dans $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs complexes et à support compact.

On connaît bien qu'à un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ (resp. un laplacien généralisé L), on associe uniquement un laplacien généralisé L (resp. un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$) tel que, pour $\varphi \in \mathscr{D}$ quelconque,

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$$L*\varphi(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)*\varphi(0) \tag{4.2}$$

(voir, par exemple, [6]). Dans ce cas, $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ s'appelle le semi-groupe vaguement continu défini par L et L s'appelle l'opérateur infinitésimal de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$.

Ceci donne que, pour un laplacien généralisé L (resp. une fonction définie-négative ψ), il existe une fonction définie-négative ψ (resp. un laplacien généralisé L), et une seule telle que

$$\hat{L} = -\psi dx\ , \tag{4.3}$$

où la mesure de Lebesgue désigne dx.

D'après le théorème de Levy-Khinchine, on connaît que, pour un laplacien généralisé L, il existe une constante $c \geqq 0$, une famille $(b_j)_{j=1}^n$ des constantes réelles, une matrice réelle et semi-définie-positive $(a_{jk})_{j,k=1,\cdots,n}$ et une mesure positive σ en dehors de l'origine vérifiant $\int |x|^2/(1+|x|^2)d\sigma(x) < \infty$ telles que, pour $\varphi \in \mathscr{D}$ quelconque,

$$\begin{aligned} L(\varphi) = -c\varphi(0) &+ \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}(0) \\ &+ \int \Big(\varphi(x) - \varphi(0) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) \frac{x_j}{1+|x|^2}\Big) d\sigma(x)\ , \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $|x| = \Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{1/2}$.

En utilisant le théorème 26 (et aussi le corollaire 27), on obtiendra l'équivalence explicite du principe classique du maximum.

THÉORÈME 38. *Soit N un noyau de convolution sur $\boldsymbol{R}^n$ régulier par rapport à dx. Alors les deux énoncés suivants sont équivalents:*

(a) *N vérifie le principe classique du maximum.*

(b) *N est borné et il existe un laplacien généralisé $L \neq 0$ tel que, au sens des distributions,*

$$L*N \geqq 0 \text{ en dehors de l'origine}\ . \tag{4.5}$$

Démonstration. (a)$\Rightarrow$(b): D'après le corollaire 27, il existe un semi-groupe vaguement continu et sous-markovien $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ vérifiant $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t>0)$ tel que N soit conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Soit L l'opérateur infinitésimal de $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$. Alors, d'après $\alpha_t \neq \varepsilon$ $(t>0)$, $L \neq 0$.

En regardant (4.4), on voit qu'il existe un laplacien généralisé L' à support compact et une mesure positive σ' dans $\boldsymbol{R}^n$ de masse totale finie tels que

$$L = L' + \sigma' - \left(\int d\sigma'\right)\varepsilon \,. \tag{4.6}$$

Comme N est borné, $L*N$ a un sens. Soit $(N_p)_{p>0}$ la résolvante vérifiant $N_p = \int_0^\infty \exp(-pt)\alpha_t dt$ $(p>0)$. Alors, pour $p>0$ quelconque, $L*N_p = pN_p - \varepsilon$ (au sens des distributions). Pour $v \in \mathscr{V}$ quelconque, on désigne par μ'_{Cv} la mesure balayée de ε sur Cv relativement à $(N_p)_{p>0}$ et par η_v la mesure positive portée par v vérifiant (2.22). Alors

$$\begin{aligned} L*N*\eta_v*(\varepsilon - pN_p) &= L*N*N_p*(\varepsilon - \mu'_{Cv}) \\ &= N*(pN_p - \varepsilon)*(\varepsilon - \mu'_{Cv}) \,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

D'après (4.6) et le lemme 17, on a, au sens des distributions,

$$\lim_{p\to 0} L*N*\eta_v*(\varepsilon - pN_p) = L*N*\eta_v \,, \tag{4.8}$$

et donc, en utilisant encore le lemme 17 et la proposition 19, on a

$$L*N*\eta_v = N*(\mu'_{Cv} - \varepsilon) \geqq 0 \text{ dans } Cv \,. \tag{4.9}$$

Remarquons que $\eta_v \neq 0$. Comme v est quelconque, (4.9) donne immédiatement (4.5), *d'où* (a) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Soit $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe vaguement continu défini par L. Comme $L \neq 0$, on a, pour $t>0$ quelconque, $\alpha_t \neq \varepsilon$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}$ vérifiant $0 \leqq \varphi \leqq 1$ et $\varphi = 1$ sur $\{x \in \boldsymbol{R}^n; |x| \leqq 1\}$. Comme $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) = L$ (au sens des distributions), on a aussi $\lim_{t\to 0} \varphi\frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) = \varphi L$ et $\lim_{t\to 0}(1-\varphi)\frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon) = (1-\varphi)L$ (au sens des distributions). Comme, pour $t>0$ quelconque, $(1-\varphi)\frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)$ est une mesure positive, $(1-\varphi)L$ est aussi une mesure positive et $(1-\varphi)\frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)$ converge vaguement vers $(1-\varphi)L$ lorsque $t \to 0$. Soit $v \in \mathscr{V}$ quelconque. Soient $(N_p)_{p>0}$, μ'_{Cv} et η_v les mêmes que ci-dessus. Alors, pour $f \geqq 0 \in \mathscr{D}$ vérifiant $\operatorname{supp}(f) \subset Cv$ quelconque,

https://doi.org/10.1017/S0027763000024818 Published online by Cambridge University Press

$$
\begin{aligned}
(4.10) \qquad 0 \leqq L*N*\eta_v(f) &= (\varphi L)*N*\eta_v(f) + ((1-\varphi)L)*N*\eta_v(f) \\
&\leqq \varliminf_{t\to 0} \left(\varphi \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)\right)*N*\eta_v*\check{f}(0) \\
&\quad + \varliminf_{t\to 0} \left((1-\varphi)\frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)\right)*N*\eta_v*\check{f}(0) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\alpha_t - \varepsilon)*N*\eta_v*\check{f}(0) = \int f dN*(\mu'_{Cv} - \varepsilon)\,,
\end{aligned}
$$

d'après (2.41). Par conséquent, la proposition 19 donne que N est conditionnellement sous-médian par rapport à $(\alpha_t)_{t\geqq 0}$, et donc, d'après le corollaire 27, $N \prec \xi$. La démonstration est ainsi complète.

En généralisant le résultat de K. Kunugui (cf. [14]), G. Choquet a donné une condition suffisante pour le principe classique du maximum (cf. [2]). Le théorème 38 est un résultat définitif.

En regardant la remarque 28 et le théorème 38, on verra le corollaire suivant:

COROLLAIRE 39. *Soit N un noyau de convolution régulier par rapport à dx et vérifiant le principe classique du maximum. Alors il existe un laplacien généralisé $L \neq 0$ tel que $L*N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine et que, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $L*N' \leqq 0$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$.*

En effet, d'après la remarque 28, on voit, de la même manière que dans le théorème 38, qu'il existe un laplacien généralisé L tel que $L*N \geqq 0$ au sens des distributions en dehors de l'origine et que, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $L*N' \leqq 0$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$ dès que N' est borné. Pour $N' \in S(N)$ quelconque, il existe une suite $(N'_m)_{m=1}^{\infty}$ des noyaux de convolution bornés $\subset S(N)$ telle que $\lim_{m\to\infty} N'_m = N'$ (vaguement) (voir la démonstration du corollaire 33). En rappelant (4.6), on voit que, pour $N' \in S(N)$ quelconque, $L*N'$ a un sens et que $L*N' \leqq 0$ au sens des distributions dans $\boldsymbol{R}^n$.

BIBLIOGRAPHE

[1] A. Beurling et J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **45** (1959), 208–215.

[2] G. Choquet, Sur une large classe de noyaux de convolution satisfaisant au principe du maximum, Sém. Théorie du potentiel, 1958/59.

[3] G. Choquet et J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$, C. R. Acad. Sci. Paris, **250** (1960), 4260–4262.

[4] J. Deny, Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associé à une famille fondamentale, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 643–667.
[5] O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions (Thèse), Meddel Lunds Univ. Sem., **3** (1935), 1–118.
[6] C. S. Herz, Analyse harmonique à plusieurs variables, Sém. Math. d'Orsay, 1965/66.
[7] M. Itô, Sur le principe classique du maximum pour les noyaux de convolution symétriques, Nagoya Math. J., **41** (1971), 121–133.
[8] ——, Sur la famille sous-ordonnée au noyau de convolution de Hunt II, Nagoya Math. J., **53** (1974), 115–126.
[9] ——, Caractérisation du principe de domination pour les noyaux de convolution non-bornés, Nagoya Math. J., **57** (1975), 167–197.
[10] ——, Sur les noyaux de convolution conditionnellement sous-médians, Nagoya Math. J., **66** (1977), 53–76.
[11] ——, Sur le principe de domination relatif, le balayage et les noyaux condimennellement sous-médians, J. Math. pures et appl., **57** (1978), 423–451.
[12] J.-P. Kahane, Quotients de fonctions définies-négatives, Sém. Bourbaki, 1966/67.
[13] M. Kishi, Positive idempotents on a locally compact abelian group, Kōdai Math. Sem. Rep., **27** (1976), 181–187.
[14] K. Kunugui, Étude sur la théorie du potentiel généralisé, Osaka Math. J., **2** (1950), 63–102.

Départment de Mathématiques
Université de Nagoya