Can. J. Math., Vol. XXXVIII, No. 4, 1986, pp. 937-946

SUR LES OPERATEURS A PUISSANCES BORNEES ET LE THEOREME ERGODIQUE PONCTUEL DANS $L^p[0, 1]$, $1 < p < +\infty$

I. ASSANI

Introduction. Soient $L^p(X, \mathscr{F}, \mu)$ les espaces de Banach usuels associés à un espace mesuré fini ou σ-fini $(X, \mathscr{F}, \mu)$, p étant un nombre réel compris entre un et l'infini ($1 < p < +\infty$). Notons L^p, l'espace $L^p[0, 1]$. Un opérateur $T:L^p \to L^p$ est dit être à puissances bornées sur L^p si

$$\sup_n \|T^n\| < +\infty.$$

La convergence presque sure de la suite de fonctions

$$M_n(T)f = \frac{I + T + \ldots + T^{n-1}}{n} f$$

a été étudiée dans L^2 pour T contraction [**8**], [**1**] et pour T inversible à puissances bornées dans $L^p_{\mathbf{C}}[0, 2]$, $1 < p \leqq 2$ [**9**].

L'étape essentielle dans ces études est la construction faite par D. Menchoff [**12**] d'un système orthonormal complet dans L^2, (f_i) et d'une fonction $f \in L^2$, $f = \sum a_i f_i$ telle que la série $\sum a_i f_i(t)$ diverge partout sur $[0, 1]$. Ce résultat semble néammoins limitatif pour le cas $p > 2$ ne serait ce que parce que la fonction f n'appartient pas forcément à L^p.

L'idée générale d'obtenir dans L^p une suite de fonctions (f_n) et une fonction $f = \sum a_i f_i$ telle que $\sum a_i f_i(t)$ diverge sur un ensemble de mesure strictement positive, afin de construire un opérateur T dont les moyennes de Césaro divergent semble poser dans L^p (pour $p > 2$) deux problèmes [**9**]:

(i) il faut une certaine régularité des f_i; suite basique

(ii) il faut pouvoir à partir de L^p se "placer" dans $[f_i]$ espace fermé engendré par les f_i ce qui pose le problème de l'existence d'une projection de L^p sur $[f_i]$. Les espaces L^p (pour $p \neq 2$) n'étant pas des espaces de Hilbert il existe dans L^p [**11**] des sous-espaces fermés qui ne sont pas complémentés; c'est-à dire qui ne sont les images d'aucune projection de L^p.

Nous nous proposons dans cet article en nous servant d'un théorème de P. L. Ulyanov [**17**, **18**, **19**] d'obtenir une fonction f appartenant à tous les

Reçu le 14 decembre 1984.

L^p $(1 < p < +\infty)$ et pour chaque p un isomorphisme T à puissances bornée tels que $M_n(T)f$ et $M_n(T^*)f$ ne convergent pas ponctuellement sur un ensemble $E \subset [0, 1]$ tel que $\mu(E) = 1$. L'opérateur T^* sur L^q représente l'opérateur adjoint de T $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Ce résultat donne en particulier un contre exemple au théorème ergodique ponctuel dans L^p pour $p > 2$ ce qui à notre connaissance n'était pas encore résolu. On le généralise ensuite à divers types d'opérateurs barycentriques. Parmi ceux ci figurent les moyennes d'Abel d'un opérateur T,

$$\left((1 - k) \sum_{k=0}^{+\infty} k^n T^n \quad \text{avec} \quad 0 \leqq k < 1\right)$$

et les puissances d'opérateurs définis à l'aide d'une série : tel est le cas de l'opérateur construit par A. Brunel [**6**]. Cette généralisation est motivée par l'exemple de

$$T = \begin{pmatrix} (-1) & 2 \\ 0 & (-1) \end{pmatrix} \text{ sur } L^p(X, \mu),\ X = \{1, 2\}\ \mu(1) = \mu(2) = 1$$

pour lequel les moyennes d'Abel convergent lorsque $k \to 1'$ alors que les moyennes de Césaro divergent.

Des résultats analogues ont été obtenus pour une contraction de L^2 pour de tels opérateurs barycentriques dans [**4**].

Nous modifions aussi la construction donnée par M. Feder [**9**] pour obtenir directement dans $L^p[0, 1]$, $1 < p \leqq 2$ et pour tout $\epsilon > 0$ un isomorphisme T vérifiant

$$\sup_{n \geqq 0} \|T^n\| \leqq 1 + \epsilon$$

et une fonction f de $L^p[0, 1]$ pour laquelle les moyennes de Césaro divergent sur un ensemble B de mesure $(0 < \mu(B) < 1)$ initialement choisi. La démonstration est faite dans le cadre des opérateurs barycentriques définis plus haut et s'applique en particulier aux moyennes de Césaro.

1. Quelques définitions. Dans tout cet article nous appellerons système de Haar l'ensemble des fonctions

$$\{\phi_m(t)\}_{m=1}^{\infty} \quad t \in [0, 1]$$

définies par

$$\phi_1(t) = \phi_0^0(t) \equiv 1 \quad \text{pour } t \in [0, 1] \quad \text{et}$$

pour $m = 2^n + k$ avec $1 \leqq k \leqq 2^n$ et $n = 0, 1, \ldots$

$$\phi_m(t) = \phi_n^k(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} \text{ pour } t \in \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \\ -\sqrt{2^n} \text{ pour } t \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right] \\ 0 \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

Il est bien connu [**15**] que ce système forme une base inconditionnelle de $L^p[0, 1]$ (en norme de L^p) pour tout p, $1 < p < +\infty$.

Définition 1. Soit (f_n) une suite basique inconditionnelle dans $L^p[0, 1]$. Nous dirons que (f_n) est une système de *convergence presque sure* (resp. de *convergence inconditionnelle presque sure*) si pour toute série $\sum a_n f_n$ convergente en norme dans $L^p[0, 1]$ la série $\sum a_n f_n(t)$ converge presque surement sur $[0, 1]$ (resp. pour toute permutation $\pi(n)$, $\sum a_{\pi(n)} f_{\pi(n)}(t)$ converge presque surement).

Remarques. i) Le négligeable peut dépendre de la permutation.

ii) L'espace fermé $[f_n]$, engendré par les f_n n'est pas forcément $L^p[0, 1]$.

iii) Une définition analogue figure dans [**19**] dans le cadre d'un système orthonormé dans L^2.

Il est bien connu que le système de Haar est un système de convergence presque sure [**2**] et que le système de Rademacher est un système de convergence inconditionnelle presque sure [**2**], [**16**].

Il est montré dans [**19**] par une modification de la construction de Zahorski [**20**] que le système de Haar n'est pas un système de convergence inconditionnelle presque sure. Plus précisément il existe une fonction f appartenant à tous les L^p, $f = \sum a_n \phi_n$ et une permutation π des entiers pour laquelle $\sum a_{\pi(i)} \phi_{\pi(i)}(t)$ diverge presque surement. Une permutation plus simple a été donnée dans [**13**], [**14**] et reprise dans [**17**]. On obtient ainsi une démonstration plus simple de ce résultat.

Definition 2. Soit (α_{nk}) une suite de nombres réels positifs ou nuls. Nous dirons que cette suite est *faiblement régulière* (resp. *régulière*) si

$$\text{(i)} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = 1$$

$$\text{(ii)} \quad \forall r \in \mathbf{R}_+ \quad 0 \leqq r < 1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} r^k \underset{n}{\rightarrow} 0$$

(resp.

$$\text{(i)} \quad \forall n \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = 1$$

(ii) $\forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 z \neq 1 \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} z^k \right| \underset{n}{\rightarrow} 0$

(iii) $\forall n \in \mathbf{N}$ les séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} z^k$$

ont un rayon de convergence $r_n > 1$).

Cette définition a été introduite dans [**4**]. Nous nous servirons uniquement de celle d'une suite faiblement régulière et nous plaçant dans la suite de cet article dans le cas réel. Le cas complexe ainsi qu'un contre-exemple au théorème ergodique local dans L^p font l'objet d'un autre article [**5**].

2. Sur le théorème ergodique ponctuel dans $L^p[0, 1]$, $1 < p < +\infty$.

LEMME 1. *Soient* (ϕ_m) *le système de Haar,* π *une permutation des entiers; p quelconque,* $1 < p < +\infty$ *et q tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Posons $Q_n:L^p \rightarrow L^p$ *la projection de* L^p *définie par*

$$Q_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}\right) = \sum_{i>n} a_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}$$

pour

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}, \quad f \in L^p \quad et \quad Q_0 = 0.$$

Alors

$$\text{(a) } Q_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}\right) = \sum_{i \geqq n}^{\infty} b_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}$$

$$\forall g \in L^q, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} b_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}$$

(b) *si* (ϵ_k) *est une suite de nombres strictement positifs il existe un opérateur* $T:L^p \rightarrow L^p$, *inversible tel que*

$$\sup_{n \geqq 0} \|T^n\| < \infty$$

et une suite d'entiers $n_1 < n_2 < \ldots < n_k <$ tels que

$$\|M_{n_k}(T) - Q_k\| < \epsilon_k \quad et \quad \|M_{n_k}(T^*) - Q_k^*\| < \epsilon_k.$$

Démonstration. (a) Le système de Haar forme une base inconditionnelle de tous les L^p; pour p compris entre un et l'infini [**15**]. Ce système de fonctions de L^∞ étant aussi orthonormal dans L^2 la base duale formée par les applications coordonnées dans L^q est encore le système de Haar.

(b) S'obtient d'une manière analogue à celle de [**9**] et provient d'une modification de la démonstration de D. L. Burkholder [**7**] faite par M. Akcoglu [**1**].

THÉORÈME 2. *Il existe une fonction f appartenant à tous les L^p $(1 < p < \infty)$ et pour chaque p un opérateur vérifiant*

$$\sup_{n \geqq 0} \|T^n\| < +\infty \quad T: L^p \to L^p$$

tels que les suites de fonctions

$$M_n(T)f = \frac{I + T + \ldots + T^{n-1}}{n} f$$

et

$$M_n(T^*)f = \frac{I + T^* + \ldots + T^{*n-1}}{n} f$$

ne convergent pas presque surement sur $[0, 1]$.

Démonstration. D'après [**17**, **18**, **19**], il existe une fonction f appartenant à tous les L^p et π une permutation des entiers tels que $f = \sum a_i\phi_i$ et la série $\sum a_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}(t)$ ne converge pas presque surement (en fait on a sur $E \subset [0, 1]$ avec

$$\mu(E) = 1 \quad \limsup_n \left| \sum_{i=1}^m a_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}(t) \right| = +\infty.)$$

Le système de Haar formant une base inconditionnelle en norme de $L^p[0, 1]$ on a aussi

$$f = \sum a_{\pi(i)}\phi_{\pi(i)}.$$

$(\phi_{\pi(i)}$ est aussi une base inconditionnelle de L^p.)

Appliquons le lemme précédent en prenant pour (ϵ_k) une suite appartenant à 1^1. On a

$$\sum \|M_{n_k}(T) - Q_k\| < \infty$$

et

$$\sum \|M_{n_k}(T^*) - Q_k{}^*\| < \infty.$$

De l'expression de $Q_k{}^*$ donnée au lemme précédent on déduit aisément que les suites $M_{n_k}(T)f$ et $M_{n_k}(T^*)f$ ne convergent pas presque surement sur $[0, 1]$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-046-6 Published online by Cambridge University Press

Remarques. L'opérateur T construit dans le théorème précédent vérifie

$$\sup\|T^n\| < K \quad \text{où} \quad K = \sup_{\sigma \in \mathcal{P}} \|P_\sigma\|$$

et où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble desparties de $\mathbf{N}$. On sait que K est relié à la constante d'inconditionalité $\widetilde{K}$ du système de Haar par les inégalités $K \leqq \widetilde{K} \leqq 2K$. G. Pisier nous a indiqué que D. L. Burkholder **[18]** avait montré récemment que

$$\widetilde{K} = \sup(p, q) - 1.$$

De ceci il découle que pour certaines valeurs de p on aura nécessairement $K > 1$. Une conséquence directe du théorème de T. Ando et du théorème de P. L. Ulyanov est que pour toute valeur de p différente de 2 on aura

$$\sup_\sigma \|P_\sigma\| > 1.$$

3. Une généralisation à divers opérateurs barycentriques. On se place comme précédemment dans le cadre réel. On considère une suite faiblement régulière (α_{nk}) (voir Définition 2) et on pose

$$R_n(T)f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} T^k f$$

pour T à puissances bornées.

LEMME 3. *Soient* (ϕ_m) *le système de Haar,* π *une permutation des entiers,* p *quelconque* $1 < p < +\infty$ *et* q *tel que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Prenons Q_n *comme dans le Lemme* 2 *et considérons une suite* (α_{nk}) *faiblement régulière.*

Alors il existe un opérateur $T:L^p \to L^p$, *inversible vérifiant*

$$\sup_{n \geqq 0} \|T^n\| < +\infty,$$

et une suite d'entiers $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *tels que*

$$\|R_{n_k}(T) - Q_k\| < \epsilon_k \quad \text{et}$$

$$\|R_{n_k}(T^*) - Q_k^*\| < \epsilon_k \quad \forall k.$$

Démonstration. Elle se fait de façon analogue à celle du Lemme 1 et utilise les proprié tés de faible régularité de la suite (α_{nk}). On construit par récurrence une suite strictement croissante de nombres réels $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ et on utilise pour cela la continuité à gauche de 1 des fonctions

$$t \to R_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} t^k.$$

On en déduit alors le théorème suivant :

THÉORÈME 4. *Il existe une fonction f appartenant à tous les $L^p[0, 1]$, $1 < p < +\infty$ et pour chaque p un opérateur inversible $T:L^p \to L^p$ vérifiant*

$$\sup_{n \geqq 0} \|T^n\| < +\infty$$

tels que les suites $(R_n(T)f)$ et $(R_n(T^*)f)$ ne convergent pas presque surement sur $[0, 1]$.

5. Une modification de la construction de M. Feder. Nous modifions la construction donnée par M. Feder [**9**]. Nous obtenons ainsi une démonstration directe dans $L^p[0, 1]$ et pour tout $\epsilon > 0$ un opérateur T tel que

$$\sup_n \|T^n\| \leqq 1 + \epsilon.$$

Ces deux précisions ne semblent pas pouvoir être obtenues sans modification de la construction de Feder et ceci par l'utilisation faite des fonctions de Rademacher.

Nous nous plaçons directement dans le cadre des opérateurs barycentriques définis au 4. Ceux-ci généralisent les moyennes de Césaro d'un opérateur. Nous supposons ici que $1 < p \leqq 2$.

LEMME 5 [**10**]. *Fixons p, $1 < p \leqq 2$, $B \subset [0, 1]$ avec $0 < \mu(B) < 1$. Considérons B_n une suite d'ensembles mesurables, partition de B et f_n des fonctions de $L^p[0, 1]$ telles que $1_{B_n} f_n = f_n$ et $\|f_n\|_p = 1$. Alors $\forall N$, $(a_1, a_2, \dots, a_N) \in \mathbf{R}^N$ on a*

$$\left\|\sum_{i=}^{N} a_i 1_{B_i} f_i\right\| = \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

De plus l'espace $[f_i]$ engendré par (f_n) est un-complémenté dans $L^p[0, 1]$.

Démonstration. On a immédiatement du fait de la partition et de la norme des f_n l'égalité écrite dans le lemme. Prenons $(f_n') \in L^q$ avec $(f_m', f_n) = 1$ si $m = n$ et 0 dans le cas contraire. On peut aussi imposer à ces fonctions de vérifier les égalités suivantes

$$\|f_m'\|_q = 1 \quad \text{et} \quad 1_{B_m} f_m' = f_m'.$$

Alors l'opérateur $V:L^p \to L^p$ défini par

$$Vf = \sum_{i=1}^{\infty} (f_i', f) f_i$$

est une projection de norme un sur $[f_n]$.

LEMME 6. *Soient* $l^p(\mathbf{N})$, Q_n, $n \geqq 1$ *les projections sur* $\{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots\}$, (ϵ_i) *une suite de nombres réels positifs et* (α_{nk}) *une suite faiblement régulière. Posons pour* $0 \leqq t < 1$

$$R_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} t^k.$$

Alors il existe une contraction $S: l^p \rightarrow l^p$ *et une suite croissante d'entiers* (n_j), $j \geqq 1$ *tels que*

$$\|R_{n_j}(S) - Q_j\| < \epsilon_j \quad \textit{pour tout } j.$$

LEMME 7. *Soient* (ϕ_n) *le système orthonormé construit par D. Menchoff* [**12**], $\epsilon' > 0$ *et* (f_i) *et* B *les fonctions et l'ensemble du Lemme* 5. *Alors*

$$\text{(i)} \quad \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \epsilon' 1_{B^c} \phi_i\right\| \leqq \epsilon' \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\text{(ii)} \quad \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p} \leqq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i (f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i)\right\|_p$$

$$\leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p} (1 + \epsilon')$$

(iii) $[f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i]$ *est complémenté dans* $L^p[0, 1]$.

Démonstration. (i) et (ii) sont immédiats.

(iii) Posons $U = AVR$ où R est l'opérateur restriction à $L^p(B)$, V est la projection de norme 1 sur $[f_i]$ et A est l'isomorphisme de $[f_i]$ sur $[f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i]$ tel que

$$A(f_i) = f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i.$$

On vérifie que

$$U(f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i) = f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i$$

et donc que $f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i$ est complémenté.

THÉORÈME 8. *Soient* $\epsilon > 0$ *et* (α_{nk}) *une suite faiblement régulière de nombres positifs ou nuls et* $B \subset [0, 1]$ *tel que* $0 < \mu(B) < 1$. *Il existe un opérateur*

$$T: L^p[0, 1] \rightarrow L^p[0, 1]$$

tel que

$$\sup_n \|T^n\| \leqq 1 + \epsilon \quad \textit{et} \quad f \in L^p[0, 1]$$

tels que la suite de fonctions

$$R_n(T)f = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} T^k f$$

ne converge pas ponctuellement sur B^c.

Démonstration. Posons

$$T = WSW^{-1}U \quad \text{où } W: 1^p \to [f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i].$$

L'opérateur W est un isomorphisme. On a

$$\|W\| \leqq 1 + \epsilon'; \|W^{-1}\| \leqq 1 \quad \text{et} \quad T^n = WS^nW^{-1}U.$$

Prenons ϵ' suffisament petit pour que

$$(1 + \epsilon')^2 \leqq 1 + \epsilon$$

alors on a

$$\sup_{n \geqq 0} \|T^n\| \leqq 1 + \epsilon \quad \text{et}$$

$$\|R_{n_j}(T) - WQ_jW^{-1}U\| < (1 + \epsilon)\epsilon_j$$

la suite d'entiers étant celle du Lemme 6.

Considérons la fonction

$$f = \sum b_i \phi_i \in L^p[0, 1]$$

issue de la construction de Menchoff : on a $\sum b_i \phi_i(t)$ diverge sur [0, 1]. De plus

$$f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i \in L^p[0, 1]$$

et $\sum b_i(f_i + \epsilon' 1_{B^c} \phi_i)$ diverge sur B^c.

En prenant comme au 3 une suite $(\epsilon_j) \in 1^1$, on en déduit la divergence de la suite de fonctions $R_{n_j}(T)f$ sur B^c.

Bibliographie

1. M. A. Akcoglu, *Pointwise ergodic theorem in L^p spaces*, Proc. Conf. Ergodic theory (Oberwolfach, 1978). Lecture Notes in Math. *729* (Springer-Verlag, 1979).
2. G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series* (Pergamon Press, New York, Oxford, London, Paris, 1961).
3. T. Ando, *Contractive projections in L^p spaces*, Pac. J. Math. *17* (1966), 391-409.
4. I. Assani, *Sur la convergence ponctuelle de quelques suites d'opérateurs*, (A paraître).
5. ——— *On the punctual and local ergodic theorem for non positive paver bounded operators in L^p_C*, (A paraître).
6. A. Brunel, *Théorème ergodique ponctuel pour un semi-groupe commutatif finiment engendré de contractions de L^1*, Ann. Inst. Henri Poincairé *9* (1973), 327-343.
7. D. L. Burkholder, *Semi-Gaussian subspaces*, Trans. A. M. S. *4* (1962), 123-131.

8. ——— *Boundary value problems and sharp inequalities for martingales transforms*, Ann. of Probability *2* (1984).

9. M. Feder, *On power bounded operator and the pointwise ergodic property*, Proc. A. M. S. *83* (1981).

10. I. M. Kadec et A. Pelczynski, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces LP*, Studia Math. *21* 161-176.

11. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math, *9* (1971), 263-269.

12. D. Menchoff, *Sur les séries de fonction orthogonales*, Fund, Math. *4* (1923), 82-105.

13. A. M. Olevskii, *Fourier series with respect to general orthogonal systems* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975).

14. ——— *Divergent Fourier series of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR. *141* (1961), 28-31.

15. I. Singer, *Bases in Banach spaces I* (Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1970).

16. H. Steinhaus, *Zur konvergenzfrage ber dem Rademacherschen orthogonal system*, Mat. Sb. *35* (1928), 39-42.

17. P. L. Ulyanov, *Kolmogorov and divergent Fourier series*, Uspehi Mat. Nauk. *38* (1983), 51-90 = Russian Math. Surveys *38* (1983), 57-100.

18. ——— *Divergent series in the Haar system and in bases*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR *138* (1961), 556-559.

19. ——— *Divergent Fourier series*, Uspehi Mat. Nauk. *16* (1961), 61-142 = Russian Math. Surveys *16* (1961), 3-75.

20. Z. Zahorski, *Une série de Fourier permutée d'une fonction de class L^2 divergente presque partout*, C. R. A. S. Paris *25* (1960), 501-503.

Université Pierre et Marie Curie,
Paris, France

https://doi.org/10.4153/CJM-1986-046-6 Published online by Cambridge University Press